01

Силовое взаимодействие сверхпроводящего контура с магнитным полем диполя

© В.А. Шувалов, А.А. Яковлев

Центральный научно-исследовательский институт машиностроения,
141070 Королев, Московская область, Россия
e-mail: aayakovlev@tsniimash.ru

(Поступило в Редакцию 21 июля 2014 г.)

Исследованы особенности движения сверхпроводящего контура в магнитном поле диполя (задача „двух магнитов“ с закрепленным центром). Приведено обоснование силовой функции такого контура в постоянном магнитном поле, которая позволяет определить силы взаимодействия и уравнения движения. Рассмотрены структура и устойчивость множества состояний равновесия в динамической системе „магнитный диполь–сверхпроводящий контур“. Показано, что отсутствие омического сопротивления в контуре изменило характер магнитных сил и привело к появлению устойчивого множества состояний равновесия в задаче „двух магнитов“.

Введение

Потребность в обеспечении силового взаимодействия между объектами без механических контактов наблюдается в различных областях науки, техники, промышленности. Наибольшее практическое значение получила система магнитной подвески. Магнитные силы в такой системе создают условия для адекватного обтекания моделей в аэродинамических трубах (экспериментальная аэродинамика), минимизируют или вообще исключают трение в нагруженных механических узлах (гироскопы, униполярные машины, железнодорожный транспорт, кинетические накопители энергии), обеспечивают относительное равновесие, „конвоирование“ и сближение магнитных объектов (в космической технике, химической и атомной промышленности), удерживают в бесконтактном состоянии чувствительные элементы измерительных систем (приборостроение) [1–4]. Важная особенность перечисленных применений связана с необходимостью проектирования магнитной системы таким образом, чтобы в статическом состоянии равновесие магнитных объектов было устойчивым. Это требование позволяет получить рациональные динамические характеристики в системах магнитной подвески (частота колебаний, жесткость, быстродействие, управляемость и так далее). Такие свойства определяются типом магнитных систем и характером силового взаимодействия.

Теоретические и проектные расчеты электромеханических характеристик систем магнитной подвески, а также параметров их движения основаны на использовании силовой (или потенциальной) функции замкнутого электрического контура в постоянном магнитном поле [5–7]. Такой контур с технической точки зрения является некоторой абстракцией, поскольку в практической реальности подобный электромеханический объект отсутствует. Ток в замкнутом электрическом контуре с омическим сопротивлением (например, выполненный из медных проводов) существует только при наличии источника тока. Однако если контур является сверхпроводящим (с нулевым омическим сопротивлением), то он будет функционировать в короткозамкнутом режиме, а ток циркулировать без затухания. При этом электромеханические свойства отличаются от традиционных (несверхпроводящих), а силовая функция взаимодействия сверхпроводящего замкнутого контура с постоянным магнитным полем будет иметь другую структуру. Получим выражение такой функции и некоторые ее особенности.

1. Силовая функция сверхпроводящего замкнутого контура в постоянном магнитном поле

Рассмотрим взаимодействие сверхпроводящего замкнутого электрического контура l, по которому течет ток J, с постоянным магнитным полем $\mathbf{H}$. Определим силу $\mathbf{F}$, действующую на такой контур. Для этого вычислим элементарную работу δA, совершаемую полем H по перемещению каждого элемента контура $d\mathbf{l}$ (направление вектора $d\mathbf{l}$ совпадает с направлением тока) на расстояние $\delta\mathbf{r}$ (рис. 1). Тогда общая элементарная работа δA при перемещении всех элементов контура определяется интегралом по замкнутому контуру l и, следовательно,

$$\delta A = \oint_l (\mathbf{F}, \delta\mathbf{r}) = \oint_l J \cdot \mathbf{H} \cdot [d\mathbf{l}, \delta\mathbf{r}], \qquad (1)$$

где $J = J_1 + \Delta J_1$ — полный ток в контуре, который включает первоначальный транспортный ток J_1 в отсутствие магнитного поля и ток индукционный, обусловленный потоком внешнего поля $\mathbf{H}$ через контур l (он зависит от положения сверхпроводящего контура в $\mathbf{H}$).

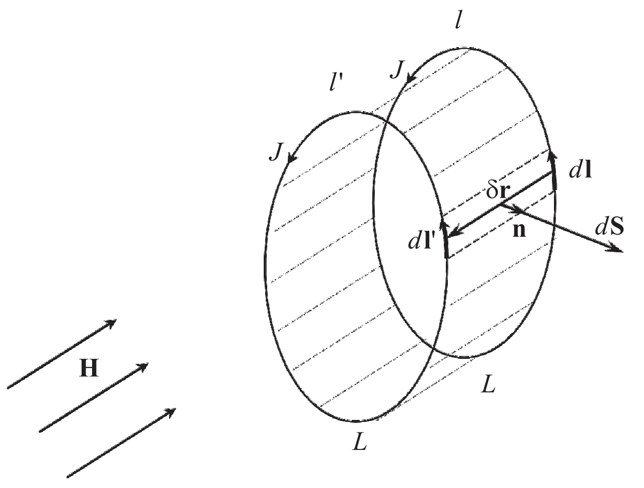

Рис. 1. Перемещение элемента $d\mathbf{l}$ на расстояние $\delta\mathbf{r}$ и смещение всех элементов контура l в положение l'.

Индукционный ток определяется

$$\Delta J_1 = -\Phi/L, \tag{2}$$

где L — индуктивность сверхпроводящего контура, Φ — магнитный поток, вызывающий индукционный ток ΔJ_1.

Пусть $d\mathbf{S}$ — элемент площади, образованной элементом $d\mathbf{l}$ при перемещении $\delta\mathbf{r}$, и векторное произведение в (1) $[\delta\mathbf{r}, \delta\mathbf{l}] = d\mathbf{S}$ (рис. 1). Тогда элементарная работа δA (1) с учетом (2) запишется следующим образом:

$$\delta A = \int_\Sigma (J_1 - \Phi/L)(\mathbf{H}, d\mathbf{S}), \tag{3}$$

где Σ — площадь, описанная всеми элементами контура l при перемещении $\delta\mathbf{r}$; $(\mathbf{H}, d\mathbf{S}) = d\Phi$ — изменение потока вектора $\mathbf{H}$ через контур l, соответствующее магнитному потоку через площадь, образованную элементом контура $d\mathbf{l}$ при перемещении $\delta\mathbf{r}$. Приращение магнитного потока через контур l при его элементарном перемещении $\delta\mathbf{r}$ обозначим $\delta\Phi$. Тогда интеграл (3) можно представить следующим образом:

$$\delta A = \int\limits_{\Phi}^{\Phi+\delta\Phi} (J_1 - \Phi/L)\, d\Phi. \tag{4}$$

Положим, что все изменения полного тока J обусловлены изменением индукционного тока ΔJ_1, т.е. $J_1 = \mathrm{const}$, тогда, вычисляя интеграл (4) с учетом малости $\delta\Phi$, получим элементарную работу

$$\delta A = (J_1 - \Phi/L)\delta\Phi. \tag{5}$$

Если введем функцию

$$U = -\Phi(J_1 - \Phi/2L), \tag{6}$$

тогда элементарная работа (5) с учетом (6) запишется в виде, аналогичном выражению δA в работах [5–7], т.е.

$$\delta A = -\delta U_{(J_1=\mathrm{const})},$$

следовательно, магнитные силы F_i, действующие на сверхпроводящий контур в постоянном магнитном поле по направлению q_i, определяются как обобщенные силы

$$F_i = -\partial U/\partial q_i. \tag{7}$$

Необходимо отметить, что функция (6) отличается от известной силовой функции электрического контура в постоянном магнитном поле [5–7] дополнительным членом $\Phi^2/2L$, который определяет особенности взаимодействия сверхпроводящих контуров с магнитным полем.

2. Особенности движения сверхпроводящего замкнутого контура в магнитном поле неподвижного диполя

Известно, что в классической задаче „двух магнитов“ [8] траектория движения магнитного диполя в магнитном поле закрепленного диполя имеет лимитационный характер, т.е. происходит падение диполя на притягивающий центр. Однако если в качестве подвижного магнитоактивного тела будет сверхпроводящий замкнутый контур, то характер движения изменится. Рассмотрим электромеханические особенности такой системы.

Схема движения сверхпроводящего контура в магнитном поле закрепленного диполя, а также системы координат показаны на рис. 2. Здесь изображены три системы: неподвижная декартовая система $OXYZ$, связанная с закрепленным диполем $\mathbf{M}$; подвижная — $O_1X_1Y_1Z_1$ с началом в центре подвижного сверхпроводящего контура и осями, которые в процессе движения

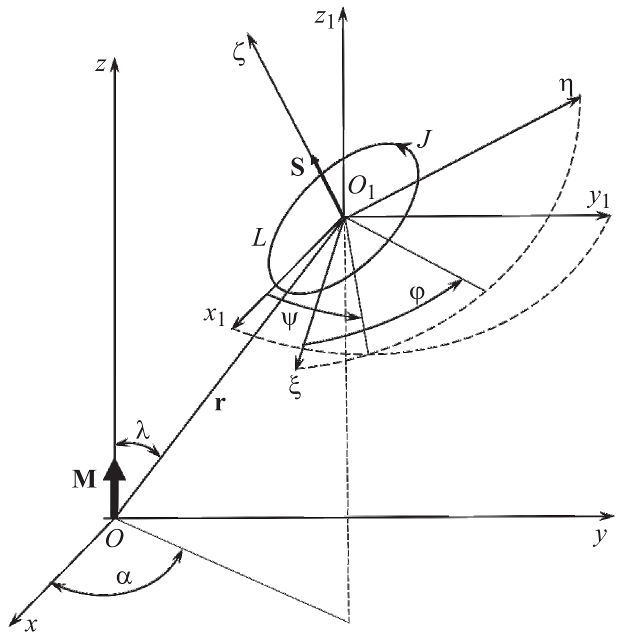

Рис. 2. Схема взаимодействия и система координат.

остаются параллельными осям неподвижной; подвижная — $O_1\xi\eta\xi$, оси которой жестко связаны с главными осями инерции сверхпроводящего контура.

Системы координат определяют положение сверхпроводящего контура как твердого тела. Учитывая обозначение на рис. 2 и выражение для потенциальной энергии (силовой функции) магнитоактивного тела (6), гамильтониан [9] в такой постановке запишется следующим образом:

$$H = 1/2 \cdot \left[P_r^2 + r^2 \cdot \cos\lambda \cdot P_\alpha^2 + r^2 \cdot P_\lambda^2 + \sin^2\vartheta \cdot P_\psi^2 + P_\vartheta^2 + (P_\varphi + P_\psi \cdot \sin\vartheta)^2\right] + \Phi(J_1 - \Phi/2L), \tag{8}$$

где $P_i(i = r, \lambda, \vartheta, \psi, \alpha)$ — импульсы по всем независимым координатам. Тогда система уравнений Гамильтона представляется в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{r} = \partial H/\partial P_r, \ldots, \dot{\alpha} = \partial H/\partial P_\alpha, \\ \dot{P}_r = -\partial H/\partial r, \ldots, \dot{P}_\alpha = -\partial H/\partial\alpha. \end{cases} \tag{9}$$

В рассматриваемой постановке система является консервативной, поэтому гамильтониан H (8) определяет полную энергию и является интегралом уравнений движения (9). Пусть выполняется условие

$$\Phi - J_1 L = 0, \tag{10}$$

тогда уравнение (6) имеет частное решение

$$r = r_0, \ldots, \alpha = \alpha_0; \quad P_i = 0, \tag{11}$$

которое определяет состояние равновесия динамической системы „магнитный диполь–сверхпроводящий контур“. Магнитный поток Φ поля диполя через площадь, охватываемую сверхпроводящим контуром, можно определить следующим образом:

$$\Phi = (\mathbf{B}, \mathbf{S}) = (\mathbf{M}, \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}, \mathbf{S})/r^5 - (\mathbf{M}, \mathbf{S})/r^3, \tag{12}$$

где $\mathbf{B}$ — магнитное поле закрепленного диполя, $\mathbf{S}$ — векторная площадь сверхпроводящего контура, $\mathbf{M}$ — магнитный момент диполя.

В соответствии с рис. 2 магнитный поток (12) можно представить в координатной форме и условие (10) принимает вид

$$M \cdot S\lfloor 3 \cdot \sin\lambda \cdot \cos\lambda \cdot \sin\vartheta \cdot \sin(\psi - \alpha) + 3 \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\lambda - \cos\vartheta\rfloor/r^3 - J_1 L = 0. \tag{13}$$

Условие (10) и выражение магнитного потока Φ через сверхпроводящий контур позволяют заключить, что динамическая система „магнитный диполь–сверхпроводящий контур“ имеет множество частных решений вида (11), т. е. множество состояний равновесия G. Магнитный поток (12) является непрерывной и убывающей функцией координат. Тогда множество состояний равновесия G будет замкнутым, ограниченным множеством. Границей G будет поверхность в пространстве обобщенных координат, каждая точка которой удовлетворяет условию (10), а угол между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{S}$ в (12) равен нулю, т. е.

$$\cos(\mathbf{B}, \mathbf{S}) = 1.$$

Докажем устойчивость множества G. Введем вектор $x = x(r, \ldots, \alpha; P, \ldots, P_\alpha)$, тогда $G = \{x_0\}$, где $x_0 = x_0(r_0, \ldots, \alpha_0; 0, \ldots, 0)$. Следуя работе [10], определим множество $G_\varepsilon = \{x_\varepsilon : x_0 \in G$ и $x_\varepsilon \in G_\varepsilon \Rightarrow \| x_\varepsilon - x_0 \| < \varepsilon\}$ где $\varepsilon > 0$. Дополнения G и G_ε обозначим G^c и G_ε^c. В работе [10] доказана следующая лемма: „Пусть $V(x, t)$ — скалярная функция, частные производные первого порядка которой являются непрерывными функциями при всех x и всех $t \geq 0$, а G — замкнутое множество в n-мерном пространстве. Допустим, что $\dot{V}(x, t) \leq 0$ для всех $x \in G^c$ и всех $t \geq 0$ и что $V(x_1, t_1) < V(x_2, t_2)$ для всех $t_2 \geq t_1 \geq 0$ при любом выборе $x_1 \in G$, а $x_2 \in G_\varepsilon^c$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда любое решение рассматриваемой динамической системы, находящейся в некоторый момент $t \geq 0$ в G уже никогда не сможет покинуть G_ε“.

Рассматриваемая динамическая система (9) удовлетворяет всем требованиям этой леммы. Действительно, поскольку точки пространства G_ε^c определяют положение сверхпроводящего контура в возмущенном движении, введем возмущения следующим образом:

$$x = x_0 + m, \tag{14}$$

где $m = m(m_r, \ldots, m_\alpha; \Delta P_r, \ldots, \Delta P_\alpha)$ — вектор возмущений.

Запишем гамильтониан (8) с учетом (14), тогда получим

$$H = 1/2 \cdot \left[\Delta P_r^2 + (r_0 + m_r) \cdot \cos^2(\lambda_0 + m_\lambda) \cdot \Delta P_\alpha^2 + (r_0 + m_r)^2 \cdot \Delta P_\lambda^2 + \sin(\vartheta + m_\vartheta) \cdot \Delta P_\psi^2 + \Delta P_\vartheta^2 + \left(\Delta P_\varphi + \Delta P_\psi \cdot \sin(\vartheta_0 + m_\vartheta)\right)^2\right] + \Phi_x(J_1 - \Phi_x/2L). \tag{15}$$

Здесь Φ_x — магнитный поток в возмущенном движении. В нашем случае (изолированной системы) функцию $V(x)$ можно записать в виде

$$V(x) = \mu[H_x(x) - H_x(x_0)], \tag{16}$$

где μ — постоянный множитель, $H_x(x)$ — полная энергия возмущенного движения, $H_x(x_0)$ — полная энергия невозмущенного движения (т. е. энергия системы при $x \in G$). Так как $V(x)$ — комбинация интегралов уравнений движения (9), то $\dot{V}(x) = 0$. Далее, при $x \in G$ (т. е. x — положение равновесия) функция $V(x) = 0$. Если $x_1 \in G^c$, то $V(x_1) > 0$. Это следует из (15), рис. 2, а также из того факта, что за счет μ всегда можно обеспечить положительность функции $V(x)$. Таким образом, условия леммы выполнены, движение устойчиво по Лагранжу и не выйдет за пределы ε-окрестности множества G.

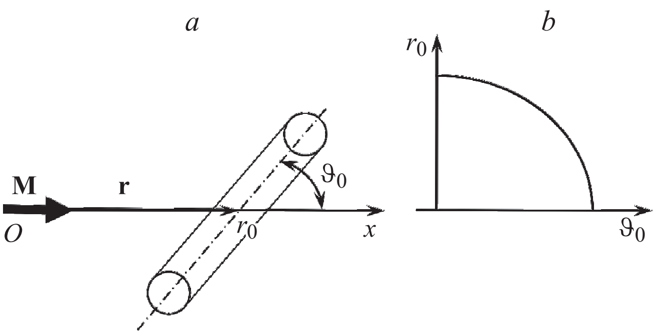

Рис. 3. Упрощенная схема взаимодействия (a) и диаграмма состояний равновесия (b).

Пример

Рассмотрим движение сверхпроводящего контура, имеющего индуктивность L, в магнитном поле диполя $\mathbf{M}$ (рис. $3, a$). Положение контура характеризуется двумя координаторами r и ϑ. Гамильтониан в этом случае принимает вид

$$H = P_r^2/2 + P_\vartheta^2/2 + 2 \cdot M \cdot S \cdot \cos\vartheta$$
$$\times (J_1 - M \cdot S \cdot \cos\vartheta / L \cdot r^3)/r^3 = \text{const}.$$

Условие (13) запишется

$$2 \cdot M \cdot S \cdot \cos\vartheta / r^3 - J_1 \cdot L = 0.$$

Множество G показано на рис. $3, b$, а функция $V(x)$ имеет следующую структуру:

$$V(x) = \mu \cdot \left\{ \left[\frac{\Delta P_r^2}{2} + \frac{\Delta P_\vartheta^2}{2} + \frac{2MS \cdot \cos(\vartheta_0 + m_\vartheta)}{(r_0 + m_r)^3} \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(J_1 - \frac{MS \cdot \cos(\vartheta_0 + m_\vartheta)}{L \cdot (r_0 + m_r)^3} \right) \right] - \frac{2MS}{r_0^3} \left(J_1 - \frac{MS}{L \cdot r_0^3} \right) \right\}.$$

При $\mu = 1$ функция $V(x)$ удовлетворяет требованиям леммы об устойчивости множества G.

Заключение

Исследования показали, что движение сверхпроводящего замкнутого контура в магнитном поле диполя не является лимитационным. Взаимодействие такого контура с постоянным магнитным полем приводит к возникновению множества равновесных состояний, которое является устойчивым (но не асимптотически) в пространстве обобщенных координат. В окрестности этого множества движение устойчиво по Лагранжу (предельно ограничено), что совершенно не имеет места для динамических систем с обычными (несверхпроводящими) магнитами.

Предложенная в работе силовая функция позволяет учесть и исследовать возникающие особенности электромеханического взаимодействия, которые определяются свойством замкнутого сверхпроводящего (или идеально проводящего) контура сохранять полный магнитный поток постоянным.

Список литературы

[1] *Метлин В.Б.* Магнитные и магнитодинамические опоры / Под ред. А.И. Бертинова. М.: Энергия, 1968. 192 с.
[2] *Вышков В.Д., Иванов В.И.* Магнитные опоры в автоматике. М.: Энергия, 1978. 169 с.
[3] *Ким К.К.* Системы электродвижения с использованием магнитного подвеса и сверхпроводимости. Монография. М.: Изд-во УМЦ ЖДТ, 2007. 360 с.
[4] *Анцев Г.В., Богословский С.В., Сапожников Г.А.* Проектирование устройств с электромагнитным подвесом. М.: Наука, 2010. 424 с.
[5] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
[6] *Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н.* Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985. 400 с.
[7] *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: Иностранная литература, 1954. 604 с.
[8] *Тамм И.Е.* Собрание научных трудов. Т. 1. Ядерная физика. М.: Наука, 1975. 606 с.
[9] *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1975. 300 с.
[10] *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 166 с.