

07,13

Скорость волны и спектр частот продольных колебаний растянутых нанопленок из интерметаллидов

© М.А. Ильгамов

Институт механики УНЦ РАН,
Уфа, Россия

E-mail: ilgamov@anrb.ru

(Поступила в Редакцию 10 октября 2014 г.
В окончательной редакции 20 ноября 2014 г.)

На основании последних данных по изучению напряженно-деформированного состояния нанопленок из интерметаллидных сплавов FeAl и NiAl определены скорость волны и спектр собственных частот их продольных колебаний. В зависимости от степени статического растяжения пленки эти характеристики меняются от хорошо известных значений до сверхнизких. При определенной степени статического растяжения частоты падают до нуля, но при дальнейшем росте растяжения частоты резко возрастают.

1. Введение

Уникальные свойства нановолокон и нанопленок обуславливают изменение эксплуатационных механических характеристик по сравнению с классическими объемными материалами (эти свойства изучаются, например, в [1–8]). В частности, прочность наноматериалов, многократно большая, чем у обычных металлов и сплавов, и близкая к теоретической прочности, позволяет ограничиваться относительно малой толщиной пакета пленок (пучка волокон) в условиях растягивающих напряжений. Но при этом резко ухудшаются такие характеристики, как статическая и динамическая устойчивость исходной формы при напряжениях сжатия и спектральные свойства.

Необыкновенно большие обратимые деформации при одноосных испытаниях указанных волокон и пленок (до относительного удлинения $\varepsilon = 0.3–0.4$), сложность диаграммы напряжение σ — деформация ε приводят к отличному от обычных материалов поведению в конкретных условиях их применения.

На рис. 1 представлена такая диаграмма. При ее построении из многих существующих способов определения больших деформаций (логарифмический и т. д.) принят простейший способ Коши $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$, где l_0 , l — начальная и текущая длины образца при одноосном растяжении. При контролируемом увеличении растягивающего напряжения происходит плавное возрастание деформации, однако затем деформация возрастает при меньших значениях напряжения. После достижения значения $\varepsilon \approx 0.23$ снова происходит изменение характера зависимости $\varepsilon(\sigma)$. Показано [7], что при разгрузке имеется незначительное отклонение кривой вниз в узкой области $\varepsilon = 0.23–0.25$. При контролируемой деформации растяжения образца имеется однозначная зависимость $\sigma(\varepsilon)$.

Известно, что поведение тонких пленок, пластин, оболочек сильно зависит от свойств упругой подложки [9]. В частности, определенная разница в действу-

ющих напряжениях и температурном расширении, а также в механических характеристиках приводит к коротковолновой потере устойчивости исходной формы поверхности контакта и к его нарушению. Учет контакта пленки с покоящейся или движущейся жидкостью также важен [10]. При этом наблюдается, например, взаимодействие упругой и гидродинамической неустойчивостей [11]. Учет динамического взаимодействия тонкой пленки даже с газовой средой необходим, в частности, в условиях сильных акустических и ударных воздействий. Однако для изучения таких вопросов требуется знание диссипативных свойств нанопленок. По-видимому, такие данные в литературе пока отсутствуют.

Установление особенностей скорости распространения волны и спектра частот колебаний растяжения-сжатия нанопленки является необходимым шагом в определении ее эксплуатационных характеристик. Это важно даже без учета взаимодействия со средой, находящейся в контакте. Данная статья посвящена этому вопросу.

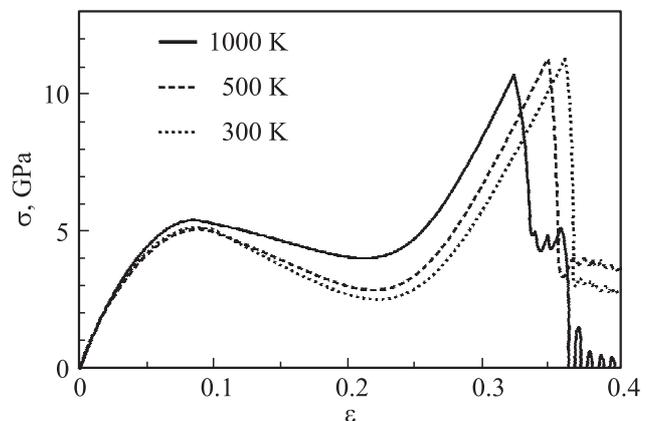


Рис. 1. Зависимость растягивающего напряжения σ от деформации ε для нанопленок из сплава FeAl при различных температурах [5].

2. Собственные частоты нанопленок при контролируемом напряжении растяжения

Примем, что полоска пленки единичной ширины с начальной длиной l_0 и толщиной h_0 и текущими значениями l_* и h_* верхней кромкой ($x = 0$) неподвижно зажата, а по нижней нагружена распределенной силой Mg . Поэтому граничные условия имеют вид

$$u_* = 0 \quad (x = 0)$$

$$\sigma_* h_* = M \left(g + \frac{\partial^2 u_*}{\partial t^2} \right) \quad (x = l_*), \quad (1)$$

где t — время, g — гравитационное ускорение. Продольное перемещение $u_* = u_s + u$ и толщина $h_* = h_s + h$ состоят из статической и динамической частей u_s, h_s и u, h , причем предполагается $u \ll u_s, h \ll h_s$ (это же относится и к величинам $\sigma_* = \sigma_s + \sigma, \varepsilon_* = \varepsilon_s + \varepsilon, l_* = l_s + l$).

Приближенную связь между h_s и h_0 в условиях плоской задачи определим из закона Гука $E\varepsilon_s = \sigma_s - \nu\sigma_{sz}, E\varepsilon_{sz} = \sigma_{sz} - \nu\sigma_s$, где $\varepsilon_s = (l_s - l_0)/l_0, \varepsilon_{sz} = (h_s - h_0)/h_0, \nu$ — коэффициент Пуассона. Полагая напряжение, нормальное к плоскости пленки, $\sigma_{sz} = 0$ и исключая σ_s , находим

$$h_s = h_0(1 - \nu\varepsilon_s). \quad (2)$$

Ввиду $h \ll h_0, \varepsilon \ll \varepsilon_s$ справедливо также соотношение $h_* = h_0(1 - \nu\varepsilon_*)$.

Предполагаем, что численные значения ν не отличаются от значений, характерных для изотропных материалов ($0 < \nu < 0.5$). Для анизотропных материалов они могут меняться значительно.

Из уравнения продольных деформаций полоски

$$\frac{\partial(\sigma_* h_*)}{\partial x} - \rho_* h_* \frac{\partial^2 u_*}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

для статического растяжения имеем $\partial(\sigma_s h_s)/\partial x = 0$. Здесь $\rho_* = \rho_s + \rho$ — текущая плотность материала, x — лагранжева координата. Определив константу интегрирования из второго условия (1), находим $\sigma_s h_s = Mg$ или с учетом (2)

$$\sigma_s h_0(1 - \nu\varepsilon_s) = Mg. \quad (4)$$

Так как $\rho_0 l_0 h_0 = \rho_* l_* h_*$, то

$$\rho_0 = \rho_s(1 + \varepsilon_s)(1 - \nu\varepsilon_s). \quad (5)$$

На рис. 2 приводится кривая деформации из рис. 1 при температуре 1000 К. Для удобства в дальнейшем здесь координаты обозначены через σ_s и ε_s . При плавном увеличении нагрузки на участке от 0 до 1 зависимость $\sigma_s(\varepsilon_s)$ может быть представлена в виде

$$\sigma_s = E_1 \varepsilon_s - E_2 \varepsilon_s^2, \quad (6)$$

где $E_1 = 130$ ГПа, $E_2 = 780$ ГПа для данной кривой. При этом координаты точки 1 равны $\varepsilon_{s1} = 0.083, \sigma_{s1} = 5.42$ ГПа.

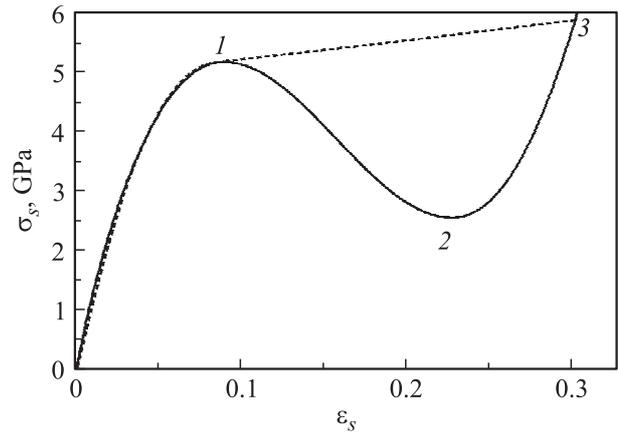


Рис. 2. Диаграмма растяжения, соответствующая диаграмме при температуре 1000 К на рис. 1.

С учетом (4), (6) можно выразить деформацию ε_s через приложенную нагрузку Mg , отбрасывая относительно меньший член с ε_s^3 на участке 0–1,

$$\varepsilon_s = \frac{E_1}{2(E_2 + \nu E_1)} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4Mg(E_2 + \nu E_1)}{E_1^2 h_0}} \right]. \quad (7)$$

В начале процесса нагружения, когда в (7) второй член под корнем мал по сравнению с единицей,

$$\varepsilon_s = \frac{Mg}{E_1 h_0} \left[1 + \frac{Mg(E_2 + \nu E_1)}{4E_1^2 h_0} \right]. \quad (8)$$

После достижения напряжением точки 1 кривая при постоянном значении Mg идет от точки 1 к точке 3, как это показано штриховой линией на рис. 2. Поскольку константа интегрирования уравнения $\partial(\sigma_s h_s)/\partial x = 0$ определяется при этом по данным в точке 1, то $\sigma_s h_s = \sigma_{s1} h_{s1}$ и аналогично $\sigma_* h_* = \sigma_{s1} h_{s1}$. Величины $\sigma_{s1}, \varepsilon_{s1}$ определяются из условия $\partial\sigma_s/\partial\varepsilon_s = 0$. С учетом (6) имеем $\varepsilon_{s1} = E_1/2E_2, \sigma_{s1} = E_1^2/4E_2$. Их численные значения приведены выше. Кроме того $h_{s1} = h_0(1 - \nu\varepsilon_{s1})$. Штриховая линия построена по уравнению

$$\sigma_s = \sigma_{s1}(1 - \nu\varepsilon_{s1})(1 - \nu\varepsilon_s)^{-1} \quad (9)$$

при $\nu = 0.3$. Если не учитывать изменения толщины в процессе растяжения пленки, то $\sigma_s = \sigma_{s1}$ (или для материала с коэффициентом $\nu = 0$).

Подставляя в (1) и (3) выражения $\sigma_* = \sigma_s + \sigma, h_* = h_s + h, \rho_* = \rho_s + \rho$, вычитая из них уравнения $\sigma_s h_s = Mg, \partial(\sigma_s h_s)/\partial x = 0$ с учетом $\partial^2 u_s/\partial t^2 \equiv 0$ и проведя линеаризацию относительно возмущений, получаем

$$h_s \sigma + \sigma_s h = M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (l = l_s),$$

$$\frac{\partial(h_s \sigma + \sigma_s h)}{\partial x} - \rho_s h_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Сумма $h_s\sigma + \sigma_s h$ определяется отдельно для рассматриваемых двух участков (рис. 2). На участке 0–1

$$\sigma = \sigma_* - \sigma_s = (E_1 - 2E_2\varepsilon_s)\varepsilon,$$

$$h = h_* - h_s = -h_0\nu\varepsilon. \tag{11}$$

Так как при равномерном статическом растяжении h_s, σ_s не зависят от x и в соответствии с (11), а также $\varepsilon = \partial u/\partial x$, первое уравнение (10) приобретает вид

$$\frac{h_s\rho_s c^2}{M} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (x = l_s),$$

$$c^2 = \frac{E}{\rho_0}, \quad E = [E_1(1 - 2\nu\varepsilon_s) - E_2\varepsilon_s(2 - \nu\varepsilon_s)](1 + \varepsilon_s). \tag{12}$$

Для круговой частоты колебаний ω и волнового числа ω/c отношение левой части уравнения (12) к правой равно $h_s\rho_s c/M\omega$. Так как низшая собственная частота продольных колебаний $\omega \sim c/l_s$, то это отношение имеет порядок $\rho_s h_s l_s/M$. Оно представляет собой отношение массы полоски пленки единичной ширины, длиной l_s и толщиной h_s к массе подвешенного груза и в нашей задаче много меньше единицы. Поэтому условие на нижней кромке может быть записано $\partial^2 u/\partial t^2 = 0$ ($x = l_s$). Итак, из (10) и (11) получаем

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{13}$$

$$u = 0 \quad (x = 0), \quad u = 0 \quad (x = l_s).$$

Задача (13) имеет частное решение $\sin(n\pi x/l_s) \exp(i\omega_n t)$. Спектр собственных частот определяется по формуле $\omega_n = n\pi c/l_s$ ($n = 1, 2, \dots$) или в соответствии с (2), (5), (11)

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l_0}\right)^2 \frac{[E_1(1 - 2\nu\varepsilon_s) - E_2\varepsilon_s(2\varepsilon_s - \nu\varepsilon_s^2)]}{\rho_0(1 + \varepsilon_s)}, \tag{14}$$

где ε_s определяется по (7) или (8).

Приведенная выше оценка членов в первом уравнении (10) для участка 0–1 сохраняет силу и для участка 1–3 (рис. 2). Поэтому $u = 0$ ($x = l_s$). Первый член во втором уравнении (10) для участка 1–3 в соответствии с (9), (11) равен $h_s(\sigma_* - \sigma_s) - \sigma_s \nu h_0 \varepsilon$. Подстановка сюда приведенных выше зависимостей дает нуль. Следовательно, на участке 1–3 деформации пленки скорость распространения волны и собственные частоты колебаний равны нулю ($c = 0, \omega_n = 0$). Физическое объяснение этого результата состоит в том, что в данной постановке задачи нет возмущения растягивающей силы $\sigma_* h_* = Mg$ (хотя есть возмущение напряжения из-за уменьшения толщины пленки).

3. Собственные частоты нанопленок при контролируемой деформации растяжения

В случае задания перемещения нижней кромки пленки u_{se} , следовательно, задания статической деформации $\varepsilon_s = u_{se}/l_0$, как, например, на испытательной машине растяжения-сжатия, сплошная кривая 0–1–2–3 на рис. 2 может быть аппроксимирована выражением

$$\sigma_s = E_1\varepsilon_s - E_2\varepsilon_s^2 + E_3\varepsilon_s^3. \tag{15}$$

Зависимость на рис. 2 построена при $E_1 = 130$ ГПа, $E_2 = 1000$ ГПа, $E_3 = 2100$ ГПа.

Вместо второго граничного условия (1) теперь будет $u_* = u_{se}$ ($x = l_0 + u_{se}$), а первое условие останется без изменения. Динамические возмущения не приводят к изменению заданного статического перемещения нижнего конца. Поэтому граничные условия (13) сохраняются. Входящие в (10) параметры h_s, ρ_s, h выражаются через их начальные значения формулами (2), (5), (11), а σ в соответствии с (15)

$$\sigma = \sigma_* - \sigma_s = (E_1 - 2E_2\varepsilon_s + 3E_3\varepsilon_s^3)\varepsilon.$$

Приходим к задаче (13), где $c^2 = E/\rho_0$,

$$E = \left\{ [1 + (1 - \nu)\varepsilon_s]E_1 - [2 + (2 - \nu)\varepsilon_s]\varepsilon_s E_2 + [3 + (3 - \nu)\varepsilon_s]\varepsilon_s^2 E_3 \right\} (1 - \nu\varepsilon_s). \tag{16}$$

Спектр собственных частот определяется по формуле $\omega_n = n\pi c/l_s$ или

$$\omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l_0(1 + \varepsilon_s)}\right)^2 \frac{(1 - \nu\varepsilon_s)}{\rho_0} \left\{ [1 + (1 - \nu)\varepsilon_s]E_1 - [2 + (2 - \nu)\varepsilon_s]\varepsilon_s E_2 + [3 + (3 - \nu)\varepsilon_s]\varepsilon_s^2 E_3 \right\}. \tag{17}$$

На рис. 3 представлена зависимость c/c_0 от деформации ε_s , где $c_0 = \sqrt{E_1/\rho_0}$. Пунктирная линия относится к случаю нагружения образца плавно возрастающей силой Mg , а сплошная линия — к случаю задания перемещения u_{se} нижней кромки образца.

В первом случае с увеличением нагрузки скорость волны падает до нуля в точке 1 и остается на этом уровне до точки 3 (рис. 2, 3), после чего происходит скачок и дальнейшее повышение.

Во втором случае до точки 1 падение значения c/c_0 совпадает с первым случаем (некоторое их расхождение объясняется округлением численных значений E_1, E_2, E_3). Между точками 1 и 2 отношение c/c_0 имеет мнимое значение, поэтому эта часть кривой не показана на рис. 3. После точки 2 происходит возрастание значения c/c_0 .

На рис. 4 дана зависимость отношения первых собственных частот растянутой ω_1 (17) и нерастянутой ω_{01} пленки, где $\omega_{01} = \pi c_0/l_0$.

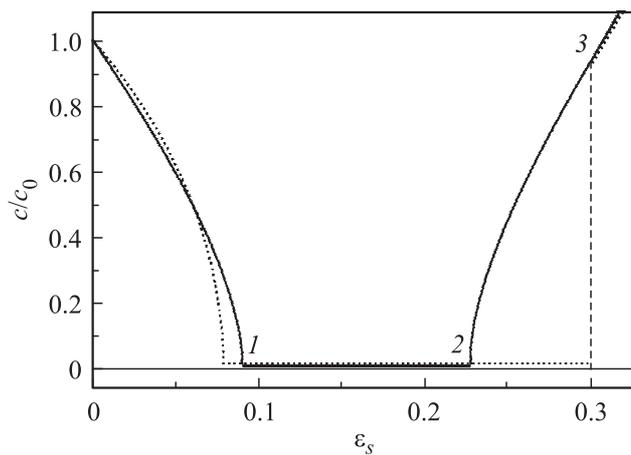


Рис. 3. Зависимость отношения скоростей волны в растянутой и нерастянутой ($\varepsilon_s = 0$) пленке от деформации, построенная по формулам (12), (16). 1–3 соответствуют тем же характерным координатам, что и на рис. 2.

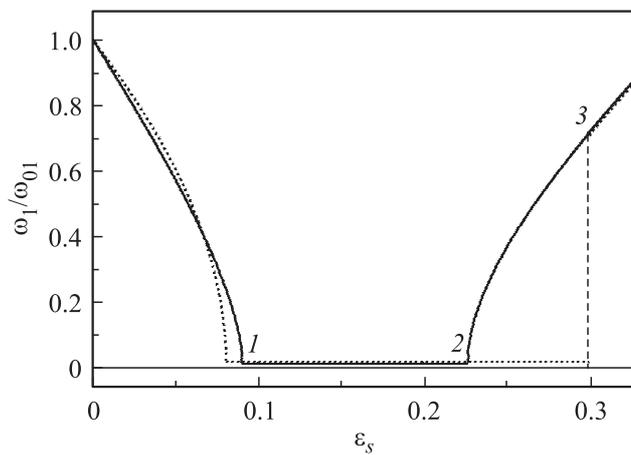


Рис. 4. Зависимость отношения первых собственных частот колебаний в растянутой и нерастянутой пленке от деформации, построенная по формулам (14), (17). 1–3 соответствуют тем же характерным координатам, что и на рис. 2.

На участке 1–2, где c имеет мнимое значение, решение уравнения (13) включает функцию $\exp(\pm at)$, где $a^2 = -c^2$, а c^2 определяется по (16). Очевидно, приведенного линейного решения недостаточно для описания движения на этом участке и требуется дальнейший анализ с учетом нелинейных факторов.

Как видно из (12), (14), (16), (17), скорость волны и спектр частот значительно зависят от коэффициента Пуассона ν . Между тем его теоретическое значение для одного и того же материала меняется в широких пределах [12–15]. Это диктует необходимость экспериментального определения ν . Однако для нанопленки это связано с большими трудностями. Один из возможных способов состоит в экспериментальном определении частот продольных колебаний пленки и вычислении по этим данным коэффициента Пуассона. Как пример, рассмотрим (14) для участка 0–1 в процессе нагружения

пленки. Принимаем, что известны начальные размеры полоски l_0, h_0 , плотность материала ρ_0 и коэффициенты E_1, E_2 по диаграмме растяжения. Тогда по экспериментально определенным значениям статической деформации ε_s и первой собственной частоты $f_1 = \omega_1/2\pi$ при этой деформации коэффициент ν определяется по (14)

$$\nu = \frac{E_1 - 2E_2\varepsilon_s - 4\rho_0 l_0^2 f_1^2 (1 + \varepsilon_s)}{(2E_1 - E_2\varepsilon_s)\varepsilon_s}.$$

Экспериментальное значение ε_s должно находиться в согласии со значением по формулам (7), (8) при известной заданной нагрузке Mg .

4. Заключение

Как известно, скорость распространения волны и спектр частот колебаний растяжения-сжатия тонких стержней и пластинок из обычных материалов не зависят от их предварительного напряженно-деформированного состояния. В нанопленках имеется сильная зависимость скорости волны и спектра частот от упругого статического растяжения. Эта особенность обусловлена большой упругой деформацией и сложностью диаграммы растяжения. Определяющей особенностью является неустойчивость однородной упругой деформации достаточно длинных нанопленок, появление доменов с различной степенью деформации [6,7].

Поскольку диаграммы растяжения нановолокон и нанопленок из разных материалов значительно отличаются, то их динамические характеристики также разнятся.

Полученные результаты устанавливают связи между входными и искомыми параметрами задачи в явном виде. Скорость волны растяжения-сжатия и спектр частот зависят не только от геометрических размеров, линейно-упругих характеристик и плотности материала пленки, но и от предварительного напряженно-деформированного состояния и вида его диаграммы. Имеет значение и способ натяжения пленки. Рассматриваются случаи задания силы натяжения и задания перемещения. При малых деформациях пленки скорость волны и частоты одинаковы при обоих способах натяжения и совпадают с классическими значениями. При деформации $\varepsilon_s \approx 0.1$ эти характеристики снижаются до нуля. При $\varepsilon_s \approx 0.3$ в первом способе натяжения в рассматриваемом примере происходит скачок характеристик от нуля до примерно классического значения (рис. 2). Во втором случае натяжения при $\varepsilon_s \approx 0.23$ начинается возрастание характеристик. При дальнейшем увеличении деформации по обоим способам натяжения происходит совпадающий между собой рост характеристик.

Список литературы

- [1] S. Li, X. Ding, J. Deng, T. Lookman, J. Li, X. Ren, J. Sun, A. Saxena. *Phys. Rev. B* **82**, 205 435 (2010).
- [2] V.K. Sutkarar, D.R. Mahapatra. *Intermet.* **18**, 1565 (2010).

- [3] D.M. Kochmann, W.J. Drugan. *Appl. Phys. Lett.* **99**, 011 909 (2011).
- [4] A.V. Dyskin, E. Pasternak. *Int. J. Eng. Sci.* **58**, 45 (2012).
- [5] R.I. Babicheva, K.A. Bukreeva, S.V. Dmitriev, K. Zhou, R.R. Mulyukov. *Comp. Meth. Sci. Technol.* **19**, 3, 127 (2013).
- [6] К.А. Букреева, Р.И. Бабичева, С.В. Дмитриев, К. Zhou, Р.Р. Мулюков. *ФТТ* **55**, 9, 1847 (2013).
- [7] К.А. Букреева, Р.И. Бабичева, А.Б. Султангужина, С.В. Дмитриев, К. Zhou, Р.Р. Мулюков. *ФТТ* **56**, 6, 1112 (2014).
- [8] T. Yalcinkaya, W.A.M. Brekelmans, M.G.D. Geers. *Int. J. Solids Struct.* **49**, 2625 (2012).
- [9] М.А. Ильгамов, В.А. Иванов, Б.В. Гулин. *Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем*. Наука, М. (1977). 332 с.
- [10] E.H. Dowell, M. Ilgamov. *Studies in Nonlinear Aeroelasticity*. N.Y.–London–Tokyo, Springer-Verlag (1988). 456 p.
- [11] М.А. Ильгамов. *Изв. РАН. Механика твердого тела* **2**, 28 (2012).
- [12] A.A. Vasiliev, S.V. Dmitriev, Y. Ishibashi, T. Shigenari. *Phys. Rev. B* **65**, 094 101 (2002).
- [13] X.F. Wang, T.E. Jones, W. Li, Y.C. Zhou. *Phys. Rev. B* **85**, 134 108 (2012).
- [14] A.U. Ortiz, A. Boutin, A.H. Fuchs, F.-X. Coudert. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 195 502 (2012).
- [15] T. Tian, X.F. Wang, W. Li. *Solid State Commun.* **156**, 69 (2013).