Журнал технической физики, 2015, том 85, вып. 6

01

Исследование внутреннего импеданса завитых сталеалюминиевых проводов на промышленной частоте

© А.Г. Меркушев, И.А. Елагин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Научно-образовательный центр „Электрофизика“ физического факультета,
Санкт-Петербург, Петергоф, Россия
e-mail: alexei.merkushev@gmail.com

(Поступила в Редакцию 5 ноября 2014 г.)

Предложена оригинальная упрощенная математическая модель, описывающая распределение гармонического электромагнитного поля в завитых высоковольтных проводах с однослойной обмоткой и стальным сердечником на промышленной частоте. Навитые жилы в рамках физической идеализации, лежащей в основе модели, представлены в виде анизотропно проводящего слоя. Показано, что учет завивки приводит к возникновению осевого магнитного поля, наличие которого может существенно сказываться на потерях в проводе. Для провода марки АС-70 с помощью модели получены зависимости внутреннего импеданса от магнитной проницаемости сердечника при трех различных значениях угла закрутки внешних жил, которые сопоставлены с результатами модели „полый цилиндр“, а также с результатами расчетов в полной постановке с помощью метода конечных элементов.

Введение

Точность задания погонных электротехнических характеристик высоковольтных (ВВ) линий электропередачи (ЛЭП) имеет ключевое значение при решении прикладных задач электроэнергетики. К таковым, в частности, относятся задачи моделирования номинальных и аварийных режимов распределительных сетей, задачи расчета уставок систем релейной защиты, а также задачи идентификации и локализации аварий [1,2], которые имеют непосредственное отношение к проблеме создания „умных сетей“ [3].

В российских сетях среднего класса напряжений часто применяются завитые провода с однослойной обмоткой марок АС-70, АС-50, АС-35. Перечисленные провода имеют единственную центральную несущую жилу, выполненную из прочной конструкционной стали, и 6 завитых плотно прилегающих жил обмотки того же диаметра, выполненных из алюминия [4]. Каждая из внешних жил описывает вдоль провода винтовую линию, а его геометрия в целом является периодической (рис. 1, a). В некоторых других странах аналогичные однослойные и многослойные провода часто имеют маркировку ACSR.

Для оценки внутреннего импеданса ВВ-проводов традиционно применяются упрощенные модели типа „полый цилиндр“ [5]. Их общей чертой является то, что внешние жилы представляются в виде сплошного однородного изотропного цилиндрического слоя (рис. 1, b). В рамках таких моделей эффектом закрутки принято пренебрегать.

Имеющиеся экспериментальные данные [6] показывают, что традиционные модели с высокой точностью описывают провода, полностью выполненные из немагнитных материалов, даже при наличии завивки. Однако, как указано в [5], применение традиционных моделей для завитых проводов по крайней мере с нечетным числом слоев в обмотке и стальной основой, по-видимому, не правомерно, так как они не учитывают намагничивание сердечника продольным полем обмотки. Последнее может приводить к существенной зависимости потерь в проводе от, вообще говоря, нелинейных магнитных свойств сердечника [7] и, как следствие, к тому, что эффективный импеданс придется рассматривать как функцию величины тока, что подтверждается экспериментальными данными [8].

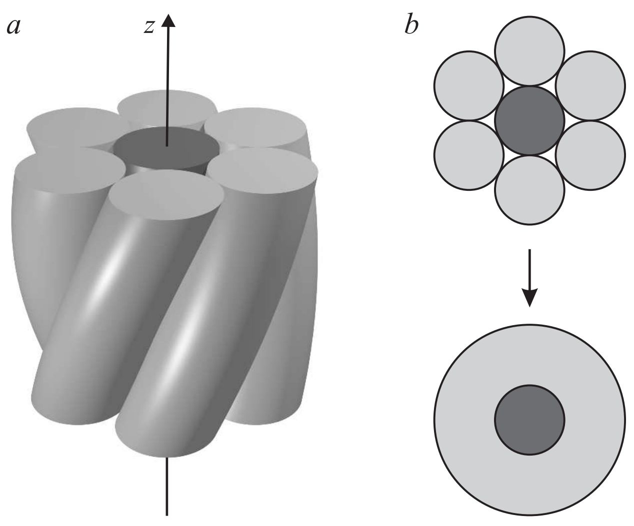

Рис. 1. a — схематичное изображение однослойного завитого провода с сердечником, b — представление отдельных жил обмотки в виде сплошного слоя.

Указанные обстоятельства обусловливают интерес к проблеме описания импеданса однослойных завитых проводов с сердечником, т.е. к разработке моделей, позволяющих учесть и количественно оценить влияние продольного намагничивания центральной жилы на потери в проводе и его погонные характеристики. В рамках этой задачи получено достаточно большое количество экспериментальных и теоретических результатов [7]. Тем не менее современные вычислительные возможности позволяют проводить моделирование электромагнитных задач на качественно более высоком уровне, что снимает множество ограничений, с которыми приходилось сталкиваться исследователям этой проблематики прежде, и позволяет подвергать упрощенные модели более тщательной проверке.

Получение точного аналитического решения для распределения электромагнитного поля с учетом всех деталей геометрии завитого провода, очевидно, сопряжено со значительными трудностями, если вообще возможно. Поэтому в нашей модели используется упрощение геометрии, аналогичное модели „полый цилиндр": представление внешних жил в виде сплошного цилиндрического слоя (рис. 1, *b*). Это допущение подразумевает рассмотрение усредненного по азимутальному углу электрического поля, в котором отсутствуют возмущения, обусловленные геометрическими границами каждой из жил. В реальном проводе эти возмущения приводят к тому, что вектор плотности тока в обмотке описывает винтовые линии, „повторяя" контуры жил. Чтобы учесть этот эффект в рамках усредненного поля, в нашей модели для описания электропроводности обмотки применяется анизотропный закон Ома. Сама по себе идея применения анизотропной проводимости для моделирования завивки не является новой [9], однако в предложенной ниже аналитической модели используется ее оригинальная реализация, обеспечивающая высокую точность описания электропроводности завитых внешних жил.

Построение упрощенной модели

Как показывают оценки, при частотах, близких к промышленной частоте $\nu = 50\,\text{Hz}$, при анализе распределения электромагнитного поля в завитом проводе можно пренебречь процессами распространения. Предполагая линейность всех сред, обратимся к рассмотрению комплексных амплитуд полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В однородной изотропной хорошо проводящей среде их распределения подчиняются уравнению Гельмгольца с комплексным волновым числом k [10]

$$\Delta\mathbf{E} = -k^2\mathbf{E}, \quad \Delta\mathbf{H} = -k^2\mathbf{H},$$
$$k^2 = -i\omega\mu\mu_0\sigma \qquad \omega = 2\pi\nu, \tag{1}$$

где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, μ и σ — относительная магнитная проницаемость и удельная электропроводность среды соответственно.

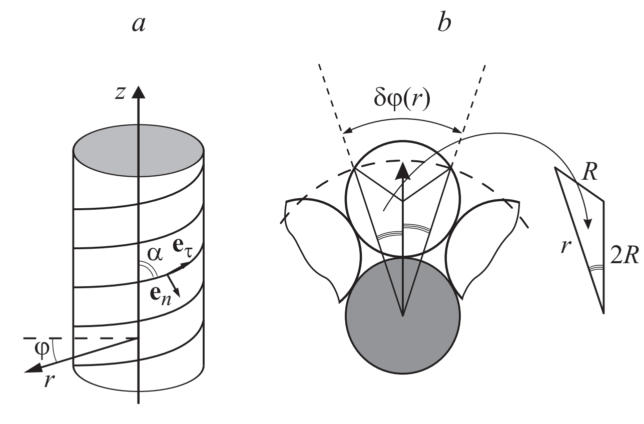

Рис. 2. *a* — локальная винтовая система координат и направляющий угол для вектора плотности тока, *b* — схема, поясняющая вывод выражения для весовой функции $w(\rho)$.

Оценки безразмерной величины $\xi = kR$, где R — радиус жилы провода, показывают, что скин-эффект, описываемый уравнением (1), в алюминиевых жилах сравнительно мал, и им можно пренебречь, в стальной жиле, напротив, его влияние существенно. В частности, при частоте $\nu = 50\,\text{Hz}$ для провода марки АС-70, где $R = 1.9\,\text{mm}$, принимая $\sigma_{\text{Al}} = 3.6 \cdot 10^7\,\text{S/m}$, $\sigma_{\text{St}} = 7.3 \cdot 10^6\,\text{S/m}$, имеем следующие оценки: $\xi_{\text{Al}} = 0.2$, $\xi_{\text{St}} = 0.1\sqrt{\mu_{\text{St}}}$, где $\mu_{\text{St}} \approx 100{-}1000$ и более. Это дает основания считать распределение усредненного поля в обмотке близким к стационарному, тогда для компонент поля $\mathbf{E}$ в цилиндрической системе координат можно записать

$$E_\varphi \approx A\rho + \frac{B}{\rho}, \quad E_z \approx C + D\ln\rho, \quad \rho = \frac{r}{R}. \tag{2}$$

Используя теорему о циркуляции поля $\mathbf{E}$, нетрудно показать, что коэффициенты A и D в (2) определяются величинами осевого и углового магнитных потоков в обмотке, которыми в силу неравенства $\mu_{\text{St}} \gg 1 = \mu_{\text{Al}}$ можно пренебречь. В результате имеем

$$\rho E_\varphi \approx \text{const}, \qquad E_z \approx \text{const}. \tag{3}$$

Усредненное поле (3) не отображает влияние границ внешних жил на токопрохождение, поэтому для описания электропроводности идеализированной обмотки введем в рассмотрение анизотропный дифференциальный закон Ома

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E}, \qquad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_n & 0 \\ 0 & \sigma_\tau \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\hat{\sigma}$ — эффективный тензор проводимости, который дан в локальной винтовой системе координат (рис. 2, *a*), σ_n и σ_τ — проводимости „поперек" и „вдоль" жил обмотки соответственно. Причем σ_τ — суть электропроводности материала обмотки, т.е. $\sigma_\tau = \sigma_{\text{Al}}$, а σ_n определяется сопротивлением контакта соседних жил, откуда $\sigma_n \ll \sigma_\tau$, что позволяет с хорошей точностью считать $\sigma_n = 0$.

Тензор $\hat{\sigma}$ можно выразить в цилиндрической системе координат с помощью преобразования поворота, тогда с учетом замечания о соотношении величин компонент проводимости будем иметь

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{cyl}} = \hat{b}^{-1} \cdot \hat{\sigma} \cdot \hat{b} = \hat{b}^{t} \cdot \hat{\sigma} \cdot \hat{b}$$

$$= \sigma_{\mathrm{Al}} \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \end{pmatrix},$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Формула (5) позволяет найти выражение для осевой компоненты плотности тока j_z в обмотке

$$j_z = \sigma_{\mathrm{Al}}(\sin\alpha\cos\alpha E_\varphi + \cos^2\alpha E_z), \qquad (6)$$

где α — угол, задающий направление тока в данной точке, который нетрудно выразить, используя уравнение семейства винтовых линий с шагом, равным шагу скрутки h внешних жил:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = \sin\varphi,$$

$$\varphi = qz \Rightarrow \tan\alpha = \max\left|\frac{dx}{dz}\right| = \max\left|\frac{dy}{dz}\right| = \theta\rho,$$

$$q = \frac{2\pi}{h}, \qquad \theta = qR. \qquad (7)$$

Интегрируя (6) по объединению сечений жил обмотки S_w, получим полный ток в обмотке I_w. С учетом приближенного представления (3) ток I_w оказывается возможным выразить как линейную комбинацию компонент электрического поля на границе сердечник-обмотка:

$$I_w = \Sigma_z E_z|_{r=R} + \Sigma_\varphi E_\varphi|_{r=R},$$

$$\Sigma_z = \sigma_{\mathrm{Al}} \int\limits_{S_w} \cos^2\alpha(\rho)\, dS,$$

$$\Sigma_\varphi = \sigma_{\mathrm{Al}} \int\limits_{S_w} \frac{\sin\alpha(\rho)\cos\alpha(\rho)}{\rho}\, dS, \qquad (8)$$

где Σ_z и Σ_φ — осевая и угловая компоненты погонной проводимости обмотки. Опираясь на (7) и учитывая известные тригонометрические тождества, нетрудно показать, что

$$\Sigma_z = \sigma_{\mathrm{Al}} \int\limits_{S_w} \frac{dS}{1 + \theta^2\rho^2}, \qquad \Sigma_\varphi = \theta\Sigma_z. \qquad (9)$$

Интеграл, образовавшийся в (9), в силу идентичности жил обмотки можно выразить через интеграл по сечению одной жилы, который, в свою очередь, может быть приведен к однократному интегралу по радиальной координате r, так как ввиду (3) интегрирование по азимутальному углу φ сводится к умножению на величину угла $\delta\varphi$ (рис. $2, b$). Используя известное обобщение теоремы Пифагора, выразим косинус угла $\delta\varphi/2$ и сам угол $\delta\varphi$:

$$\cos(\delta\varphi/2) = \frac{r^2 + 3R^2}{4rR} = \frac{\rho^2 + 3}{4\rho}$$

$$\Rightarrow \delta\varphi = 2\arccos\left(\frac{\rho^2 + 3}{4\rho}\right). \qquad (10)$$

В результате, учитывая (10), формуле для Σ_z из (9) можно придать следующий вид:

$$\Sigma_z = 6\pi R^2 \sigma_{\mathrm{Al}} Q,$$

$$Q = \langle\cos^2\alpha(\rho)\rangle = \int\limits_1^3 \frac{w(\rho)d\rho}{1 + \theta^2\rho^2},$$

$$w(\rho) = \frac{2\rho}{\pi}\arccos\left(\frac{\rho^2 + 3}{4\rho}\right), \qquad (11)$$

где $w(\rho)$ — весовая функция, являющаяся нормированным на площадь единичного круга произведением угла $\delta\varphi$ и безразмерной радиальной координаты ρ, возникающей из якобиана полярной системы координат.

Величина $Q = Q(\theta)$ в (11) имеет смысл безразмерного „форм-фактора“, числено равного усредненному по сечению жилы обмотки косинусу направляющего угла тока. Интеграл, входящий в выражение для Q, по-видимому, не может быть найден аналитически. По этой причине Q при каждом значении θ следует находить численно. Поскольку подынтегральное выражение в (11) не имеет особенностей на отрезке [1,3] для всех $\theta \geq 0$, то для нахождения Q можно использовать стандартные приемы и квадратурные формулы.

В совокупности выражения (8), (9) и (11) представляют искомый приближенный способ описания электропроводности завитой обмотки.

Теперь рассмотрим поле в сердечнике. Нетрудно показать, что уравнения (1) приводятся к уравнениям для функций Бесселя нулевого и первого порядка для осевых и угловых компонент поля соответственно. В частности, для магнитного поля в сердечнике, с учетом требования регулярности поля при $r = 0$, можем записать

$$H_\varphi = C_\varphi \frac{J_1(k_{\mathrm{St}} r)}{J_1(k_{\mathrm{St}} R)}, \quad H_z = C_z \frac{J_0(k_{\mathrm{St}} r)}{J_0(k_{\mathrm{St}} R)},$$

$$k_{\mathrm{St}}^2 = -i\omega\mu_{\mathrm{St}}\mu_0\sigma_{\mathrm{St}}. \qquad (12)$$

Произвольные постоянные C_φ и C_z, присутствующие в (12), найдем из граничных условий

$$H_\varphi|_{r=R} = \frac{I_0 - I_w}{2\pi R}, \qquad H_z|_{r=R} = \frac{I_w}{h}, \qquad (13)$$

которые благодаря (8) образуют замкнутую систему с учетом того, что полный ток в проводе I_0 является параметром. Решая эту систему, получим

$$C_\varphi = \gamma C_z, \qquad C_z = \frac{i_0}{1+\gamma\theta},$$

$$i_0 = \frac{I_0}{h}, \quad \gamma = \frac{B}{A}, \quad \Sigma_c = \pi R^2 \sigma_{\mathrm{St}}, \tag{14}$$

$$A = \frac{k_{\mathrm{St}} R J_0(k_{\mathrm{St}} R)}{J_1(k_{\mathrm{St}} R)}, \quad B = \frac{2}{\theta}\frac{\Sigma_c}{\Sigma_z} - \theta \frac{k_{\mathrm{St}} R J_1(k_{\mathrm{St}} R)}{J_0(k_{\mathrm{St}} R)}.$$

Распределение **E** в сердечнике найдем, рассматривая ротор **H**. В частности, благодаря рекуррентным формулам для функций Бесселя [11] имеет место следующее выражение:

$$E_z|_{r=R} = C_\varphi \frac{k_{\mathrm{St}}}{\sigma_{\mathrm{St}}} \frac{J_0(k_{\mathrm{St}} R)}{J_1(k_{\mathrm{St}} R)}. \tag{15}$$

Учитывая (3) и принимая во внимание, что на промышленной частоте вне провода с высокой точностью выполняется равенство $H_z = 0$, выразим с помощью (15) внутренний импеданс провода Z_{int} как коэффициент пропорциональности между $E_z|_{r=R}$ и полным током I_0, чем и завершается построение приближенной аналитической модели:

$$Z_{\mathrm{int}} = \frac{k_{\mathrm{St}}}{\sigma_{\mathrm{St}} h} \frac{\gamma}{1+\gamma\theta} \frac{J_0(k_{\mathrm{St}} R)}{J_1(k_{\mathrm{St}} R)}. \tag{16}$$

Проведенные нами численные эксперименты показывают, что точность (16) можно несколько повысить, если при пересчете продольной компоненты электрического поля на внешнюю границу обмотки приближенно учесть отброшенный при переходе от (2) к (3) магнитный поток. В этом случае уточненная оценка внутреннего импеданса завитого провода Z^*_{int} принимает следующий вид:

$$Z^*_{\mathrm{int}} = Z_{\mathrm{int}} + \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\left[1 - \psi + \frac{\gamma\theta}{1+\gamma\theta}(\psi\rho_*^2 - 1)\right],$$

$$\psi = \frac{\ln \rho_*^2}{\rho_*^2 - 1}, \qquad \rho_*^2 = 7. \tag{17}$$

Наконец, заметим, что наряду с шагом скрутки h для характеристики завивки внешних жил удобно рассматривать угол закрутки α_0. Опираясь на (7), нетрудно показать, что их связывает соотношение $h = 4\pi R/\tan\alpha_0$, если принять, что α_0 — это направляющий угол тока α, отвечающий центру жилы обмотки.

Результаты и их обсуждение

На рис. 3 представлены распределения осевой компоненты усредненного магнитного поля в сердечнике провода АС-70 в расчете на полный ток в 1 A при $\alpha_0 = 15°$, полученные с помощью предложенной модели. Вне зависимости от μ_{St} у края сердечника наблюдается область, в которой $|H_z/I_0|$ составляет порядка $10\,\mathrm{m}^{-1}$.

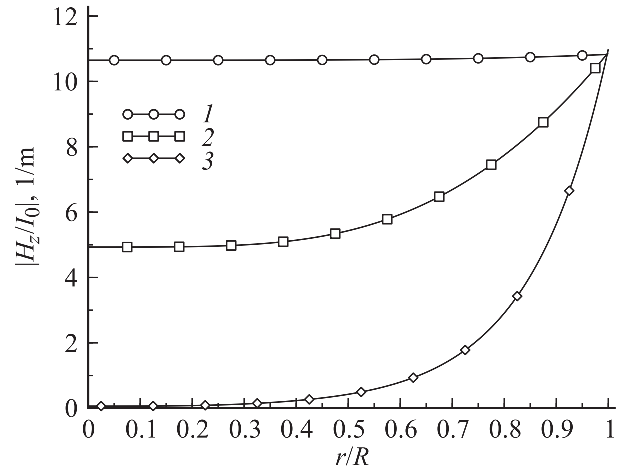

Рис. 3. Радиальные распределения продольной компоненты усредненного магнитного поля в сердечнике провода АС-70 в расчете на единичный полный ток при $\alpha_0 = 15°$ для различных значений μ_{St}: *1* — 100, *2* — 1000, *3* — 10 000.

Таким образом, при токах короткого замыкания (КЗ) порядка 100–200 A значение $|H_z|$ в этой области составит 1–2 kA/m, что соответствует насыщению стали или в зависимости от ее магнитных свойств по крайней мере области сильной нелинейности B-H кривой [12]. При номинальных токах порядка 10 A значение $|H_z|$ у края сердечника составит всего 0.1 kA/m, что соответствует режиму, далекому от насыщения, где нелинейность проявляется гораздо слабее. Предложенная модель, таким образом, показывает, что в номинальных и аварийных режимах сердечник ведет себя по-разному, что никак не отражается в рамках традиционных моделей. Графики

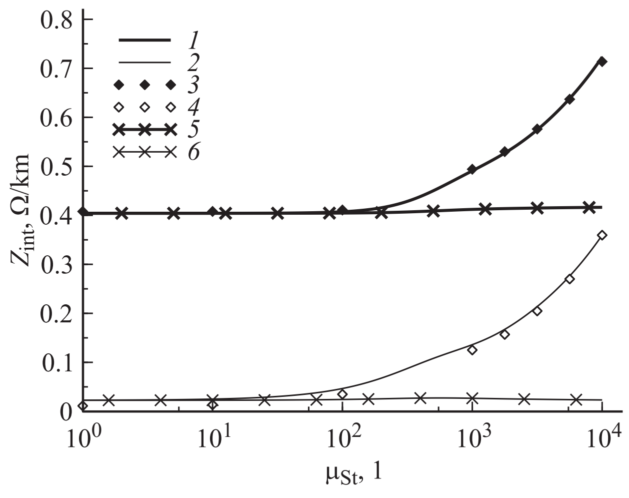

Рис. 4. Результаты расчета зависимости внутреннего импеданса провода АС-70 от μ_{St} при $\alpha_0 = 10°$: *1* и *2* — предложенная модель, вещественная и мнимая части соответственно, *3* и *4* — расчет МКЭ в полной постановке, вещественная и мнимая части соответственно, *5* и *6* — модель „полый цилиндр“, вещественная и мнимая части соответственно.

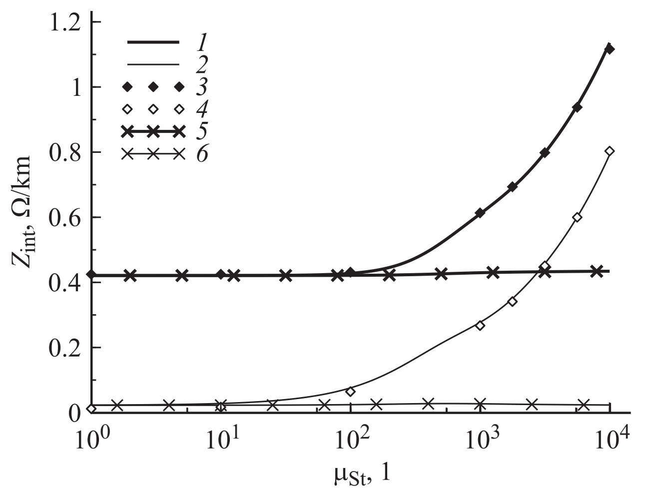

Рис. 5. Результаты расчета зависимости внутреннего импеданса провода АС-70 от μ_{St} при $\alpha_0 = 15°$: *1* и *2* — предложенная модель, вещественная и мнимая части соответственно, *3* и *4* — расчет МКЭ в полной постановке, вещественная и мнимая части соответственно, *5* и *6* — модель „полый цилиндр", вещественная и мнимая части соответственно.

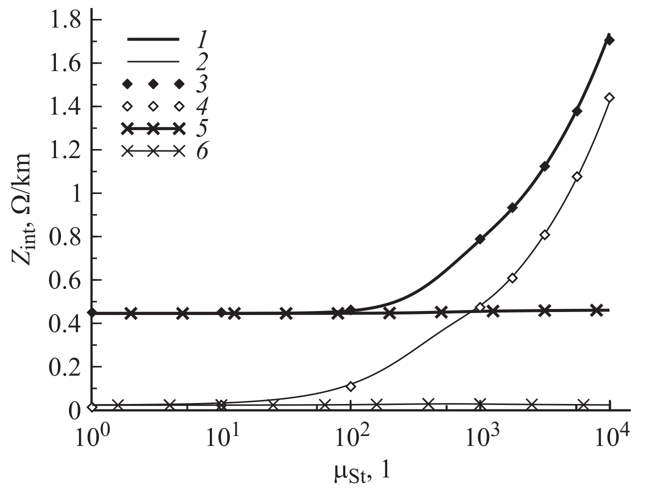

Рис. 6. Результаты расчета зависимости внутреннего импеданса провода АС-70 от μ_{St} при $\alpha_0 = 20°$: *1* и *2* — предложенная модель, вещественная и мнимая части соответственно, *3* и *4* — расчет МКЭ в полной постановке, вещественная и мнимая части соответственно, *5* и *6* — модель „полый цилиндр", вещественная и мнимая части соответственно.

на рис. 3 выявляют необходимость учета нелинейности магнитных свойств сердечника по крайней мере при токах КЗ.

На рис. 4–6 представлены зависимости внутреннего импеданса провода АС-70 от μ_{St} при $\alpha_0 = 10°$, $15°$ и $20°$, полученные с помощью модели „полый цилиндр", предложенной модели, а также полученные в результате расчета полной электромагнитной задачи методом конечных элементов (МКЭ) с учетом всех особенностей геометрии завитого провода. Несмотря на приближенный характер нашей модели, ее результаты очень хорошо согласуются с расчетами МКЭ, максимальное отличие значений импеданса составляет менее 3%. Модель „полый цилиндр" демонстрирует приемлемое совпадение с двумя другими наборами данных только в области малых $\mu_{St} \leq 10$, что согласуется с данными [6], при бóльших μ_{St} отличие оказывается чрезвычайно велико, особенно для реактивной части импеданса, и растет с увеличением μ_{St}.

Заключение

В совокупности графики на рис. 3–6 согласуются с данными [5–8] и показывают, что использование простых моделей типа „полый цилиндр" для однослойных завитых проводов со стальным сердечником является неправомерным. Приведенные результаты моделирования подтверждают тезис о том, что намагничивание сердечника действительно является причиной существенной токовой зависимости эффективного импеданса провода. Предложенную авторами модель, однако, нельзя считать исчерпывающей, поскольку, как было показано, количественно верное описание потерь в проводе в широком диапазоне токов требует учета нелинейности магнитных свойств его сердечника, а также, по-видимому, потерь на магнитный гистерезис. С другой стороны, и то и другое имеет отношение к пересмотру постановки задачи только в сердечнике. По этой причине предложенная модель может служить надежной базой для создания приближенной нелинейной модели в части упрощенного способа моделирования завивки, что позволяет обойти проблему вычислительной сложности и ресурсоемкости, выходящую на первый план в рамках решения МКЭ, особенно при попытке учета нелинейности.

Список литературы

[1] *Saha M.M., Izykowski J.J., Rosolowski E.* Fault Location on Power Networks. Springer, 2010. 425 p.
[2] *Awad M.S.* // IJES. 2012. Vol. 2. N 2. P. 210–221.
[3] *Kezunovic M.* // IEEE Transactions on Smart Grid. 2011. Vol. 2. N 1. P. 11–22.
[4] Провода, неизолированные для воздушных линий электропередачи. ГОСТ 839-80.
[5] *Dommel H.W.* et al. EMTP Theory Book. BPA Contract. 1986. 483 p.
[6] *Kennelly A.E., Laws F.A., Pierce P.H.* // AIEE Trans. 1915. Vol. 34. N 2. P. 1953–2018.
[7] *Morgan V.T.* // IEEE Transactions on Power Delivery. 2013. Vol. 28. N 3. P. 1252–1262.
[8] *Barrett J.S., Nigol O., Fehervari C.J., Findlay R.D.* // IEEE Transactions on Power Systems. 1986. Vol. PWRD-1. N 2. P. 198–207.

[9] *Carr Jr. W.J.* // J. Appl. Phys. 1974. Vol. 45. N 2. P. 929–934.
[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1982. Т. 8. 621 с.
[11] *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Книга по требованию. 2013. 799 с.
[12] *Takahashi S.* et al. // IEEE Transactions on Magnetics. 2006. Vol. 42. N 11. P. 3782–3784.