01

Возможность колебательной электродинамической неустойчивости в нематическом жидком кристалле в постоянном неоднородном электрическом поле

© М.А. Зеликман[1], Е.Д. Эйдельман[2,3]

[1] Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
E-mail: marzelik@mail.ru
[2] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург
[3] Санкт-Петербургская химико-фармацевтическая академия

Поступило в Редакцию 29 декабря 2014 г.

Показано, что в неоднородном электрическом поле электрогидродинамическая неустойчивость имеет колебательный характер. Найдена частота, которая оказалась близка к частоте осцилляций, наблюдавшихся экспериментально.

Электрогидродинамика [1–3] и физика жидких кристаллов [4,5] активно развиваются более полувека. В последние годы стали исследоваться и электрогидродинамические эффекты в жидких кристаллах. Известно, что электрогидродинамическая неустойчивость в нематическом жидком кристалле (НЖК) возникает апериодически, при нулевой частоте (см. [4,6,7]. Отметим, что во всех этих работах рассматривалась модель слоя, а электрическое поле считалось однородным. Недавно были проведены эксперименты [8–10], в которых показано, что ячеистое движение возникает в колебательном режиме с периодом 1.7 s. Покажем, что такая ситуация вполне возможна, если электрическое поле неоднородно.

Рассмотрим для определенности полый цилиндр с радиусами r_0 и $r_0+\Delta r$, $r_0 \gg \Delta r = \alpha r_0$, в котором находится НЖК с директором $\mathbf{n}\,(0,0,1)$, параллельным оси цилиндра (ось z). Отметим сразу, что при директоре, направленном нормально к стенкам цилиндра, результат изменяется лишь численно. Пусть приложены поля $E_{0z} = \mathrm{const}$ и радиальное поле E_{0r}, зависящее от координаты r. Такая постановка задачи соответствует обычно рассматриваемому возбуждению термической конвекции при подогреве сбоку, возникающему, как известно [6,7], без порога. Отметим, что в решаемой задаче роль градиента температуры играет электрическое поле.

В такой геометрии естественно считать, что возникает движение в основном по оси z. Это означает, что $v = v_z(r) \gg v_r$ и $v_{\varphi=0}$. Эта скорость должна удовлетворять уравнению движения (Навье–Стокса). Запишем его φ-проекцию, предварительно исключив потенциальные слагаемые и давление взятием оператора rot. Получим

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) - \frac{1}{r^2}\right]\frac{dv}{dr} = 0.$$

Это однородное уравнение, и его решение имеет вид $v = C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные. Граничные условия $v(r) = v(r+\Delta r) = 0$ и $\int\limits_r^{r+\Delta r} v r dr = 0$ также однородны, что доказывает, что при поле $E_{0z}(z)$ существует равновесное состояние $v = 0$. Если E зависит не только от z, но и от r, то равновесия нет.

Пусть теперь к стенкам цилиндра приложено напряжение U, т.е. между стенками в НЖК будет электрическое поле

$$E_{0r} = \frac{U}{r\ln(r+\Delta r)} = \frac{C}{r}.$$

Дальнейшее рассмотрение будет верно только при $E_{0z} \geqslant E_{0r}$.

Рассмотрим поведение возникающей при возбуждении неустойчивости скорости v, отклонений потенциала ψ и директора $\mathbf{n}_1(\theta, 0, 0)$ от их стационарных значений. Директор выражен через $\sin\theta \approx \theta$ — угол, показывающий его отклонение.

Ищем все величины малых отклонений в виде, пропорциональном $\exp(ikz + im\varphi - i\omega t)$, и решаем краевую задачу, в которой остаются только зависимости от r, обозначенные теми же самыми буквами. Эти зависимости нужно искать в виде разложения по цилиндрическим (бесселевым) функциям первого $J_m(s_{mp}r)$ и второго рода $N_m(t_{mp}r)$, а s_{mp} и t_{mp} — корень номер p этих функций. Если подставить такие разложения в уравнения, умножить после этого уравнения на $J_m(s_m r)$ и $N_m(t_{mp}r)$ соответственно и проинтегрировать, то получится бесконечномерная система алгебраических уравнений для коэффициентов разложений. Равенство нулю определителя такой системы даст характеристическое уравнение решаемой задачи. Конечно, такое решение громоздко, возможно только численно, и из него трудно извлечь качественные следствия, которые только и необходимы при современном состоянии эксперимента, отраженном в [8–10].

Ограничимся поэтому приближением, соответствующим „пленочному“ приближению в модели плоского слоя, в котором соблюдается симметрия малых отклонений и поэтому $v_\varphi = 0$, а также $m = 0$ в предположении, что величины малых отклонений зависят от φ только при значениях E_0, больших, чем реально используемые.

Система, описывающая задачу, состоит из уравнения несжимаемости среды (Эйлера)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv_r) + ik_z v_z = 0$$

и уравнения движения (Навье–Стокса), которое мы запишем по компонентам:

z-проекция

$$-ik_z\left[p - \gamma_1\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_r}{dr}\right)\right] + \left[\gamma_3\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) - \gamma_2 k_z^2\right]v_z = -i\omega v_z;$$

r-проекция

$$-\frac{dp}{dr} + ik_z\gamma_1\frac{dv_z}{dr} + \left[\gamma_2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) - \gamma_3 G\right]v_r$$
$$+ E_{0r}\left[(\varepsilon + \varepsilon_a)k_z^2 - \varepsilon\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\right]\psi + ik_z\varepsilon E_{0r}^2\theta = 0.$$

Здесь введены три комбинации из присущих НЖК шести коэффициентов кинематической вязкости $\gamma_1 = \nu_4 + \nu_5$; $\gamma_2 = \nu_1 + \nu_4 + \nu_5 + \nu_6$; $\gamma_3 = \nu_3$. Отметим, что вязкость изотропной жидкости $\nu = \nu_4$; G — коэффициент упругости, эквивалентный модулям упругости, изгиба и кручения, которые для НЖК можно считать примерно одинаковыми (см. [5, 7]). Все эти параметры, как и давление p, взяты на единицу плотности несжимаемого НЖК. В уравнении движения, кроме кулоновской силы ρE_0, учтена и непотенциальная часть электрострикционной силы $E_j E_l \partial\varepsilon_{jl}/\partial x_i$, так как она оказывается того же порядка, что и кулоновская сила. Отметим, что именно эта сила, содержащая производную первого порядка, и приводит к возможности осцилляций при возбуждении неустойчивости. Для определения возникающей плотности заряда используется уравнение Пуассона

$$\left[(\varepsilon+\varepsilon_a)k_z^2-\varepsilon\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{d}{dr}\right)\right]\psi+ik_z\varepsilon_a E_{0r}\theta=\rho.$$

Плотность заряда ρ, как и электрострикционная сила, выражена через тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}=\varepsilon\delta_{ij}+\varepsilon_a n_i n_j$, в котором учтена анизотропия, характерная для НЖК, а именно $\varepsilon_a/\varepsilon\ll 1$. Отметим, что и диэлектрическая проницаемость взята на единицу плотности НЖК. Кроме того, учтено, что $\omega\ll dv_r/dr\approx v_r/\Delta r$. Это неравенство будет обосновано ниже.

Еще в систему входит уравнение непрерывности для электрического тока

$$\sigma\left[k_z^2-\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{d}{dr}\right)\right]\psi+\sigma_a(ik_zE_{0r}\theta+k_z^2\psi)=0,$$

где анизотропная часть тензора проводимости σ_{ij} введена подобно тому, как это сделано для диэлектрической проницаемости, и учтено, что в НЖК $\sigma/\varepsilon\gg\omega$.

Наконец, уравнение директора содержит только r-проекцию, которая имеет вид

$$G\left[k_z^2-\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{d}{dr}\right)\right]\theta-\varepsilon_a E_{0r}^2\theta+ik_z\varepsilon_a E_{0r}\psi=ik_z\gamma_4 v_r+\gamma_5\,\frac{dv_z}{dr},$$

где кроме уже объясненных обозначений введены еще две комбинации из присущих НЖК коэффициентов вязкости $\gamma_4=(\nu_1+\nu_6)/2$; $\gamma_5=\nu_4+\nu_5+(\nu_1+\nu_6)/2$ и, как и в уравнении движения, учтено, что $\omega\ll dv_r/dr$.

Более подробно обоснование вида системы уравнений для малых отклонений в НЖК, в частности для уравнения директора, можно найти в [7], правда, там действующим началом является не электрическое поле, а нагрев.

Система уравнений должна решаться с граничными условиями, соответствующими твердым металлическим стенкам:

$$v_z=v_r=\psi=\theta=p=0 \quad \text{при} \quad r=r_0 \quad \text{и} \quad r=r_0+\Delta r.$$

Линеаризованная система уравнений может быть решена только численно, но, следуя [6], можно получить основные результаты приближенно, с точностью до числа порядка единицы. Для этого в духе „пленочного“ приближения переменную r полагаем равной r_0 (можно полагать и $r_0 + \Delta r$), а dr — равным Δr. Такое преобразование приводит к необходимости считать, что все корни цилиндрических (бесселевых) функций равны π, деленному на r_0 (или на $r_0 + \Delta r$). После этого оказывается, что все отклонения пропорциональны $A_f J_0(\pi r/r_0) + B_f N_0(\pi r/r_0)$, где A_f и B_f — постоянные, а индекс показывает, какой функции υ_z, υ_r, ψ, p или θ эти постоянные соответствуют. В силу граничных условий все $B_f = 0$. Для линейных уравнений $A_f J_0(\pi r/r_0) + B_f N_0(\pi r/r_0) \approx A_f \sin(\pi r/r_0)$. Умножая уравнения системы на $A_f J_0(\pi r/r_0) r dr$ и интегрируя от r_0 до $r_0 + \Delta r$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения A_f. Действительная и мнимая части определителя пятого порядка этой системы дают дисперсионное и характеристическое уравнения. Еще проще в соответствии с указанным выше приближением заменить радиальную часть лапласиана величиной $\pi^2/(\Delta r)^2 = k_r^2$ и последовательно исключать переменные, выражая их через υ_z и подставляя в z проекцию уравнения Навье–Стокса.

Оказалось, что, разделяя действительную и мнимую части в полученном таким образом выражении, на которое умножается υ_z, минимизируя по величине отношения $(k_z/k_r)^2$, окончательно получим, что неустойчивость наступает, когда $(k_z/k_r)^2 \approx 1$, а внешнее поле

$$E_{0z} > E_c \approx a \, \frac{r_0}{\Delta r} \left(b \, \frac{G\sigma}{\varepsilon \sigma_a} \right)^{1/2}.$$

Здесь $a r_0/\Delta r$ — число порядка единицы, величина которого обусловлена цилиндрической геометрией. В модели слоя [4] это число равно $4\pi\sqrt{\pi}$. Такого же порядка и число b, которое представляет собой отношение линейных комбинаций коэффициентов вязкости. Анализ показывает, что прежде всего возбуждаются возмущения, не зависящие от азимутального угла. Критерий неустойчивости не связан с зависимостью электрического поля от координат. Критическое электрическое поле E_c, при котором возникает электрогидродинамическая неустойчивость в НЖК, определяется результатом [4] и в цилиндрической геометрии.

При пренебрежении неоднородностью поля неустойчивость возбуждается апериодически. В неоднородном поле из-за присутствия в электрострикционной силе непотенциальных производных первого порядка, при возбуждении неустойчивости частота не обращается в ноль. Возбуждение неустойчивости происходит с частотой

$$\omega = 2\pi^2 c\nu \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} \frac{1}{r_0 \Delta r} \min\left[\frac{E_{0r}(r_0)}{E_{0z}}, \frac{E_{0z}}{E_{0r}(r_0)}\right] \frac{E_{0r}^2}{E_c^2},$$

где c — число порядка единицы.

При $E_{0r} \approx E_{0z} \approx E_C$ и $r_0 \approx 1\,\text{cm}$, $\Delta r \approx 10^{-2}\,\text{cm}$, $\varepsilon_a/\varepsilon \approx 0.1$, $\nu \approx \approx 0.1\,\text{cm}^2\,\text{s}^{-1}$ частота $\omega \approx 10\,\text{s}^{-1}$, что хорошо согласуется с результатами эксперимента $\omega = 4\,\text{s}^{-1}$, приведенными в [10]. При этом форма возникающей ячейки почти кубическая. Это утверждение подлежит экспериментальной проверке.

Список литературы

[1] *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 320 с.
[2] *Стишков Ю.К., Остапенко А.А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 175 с.
[3] *Жакин А.И.* // УФН. 2012. Т. 182. № 5. С. 495–520.
[4] *Пикин С.А.* Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981. 336 с.
[5] *Блинов Л.М.* Жидкие кристаллы: Структура и свойства. М.: Книжный дом „ЛИБРОКОМ", 2013. 480 с.
[6] *Эйдельман Е.Д.* // УФН. 1995. Т. 165. № 11. С. 1279–1294.
[7] *Эйдельман Е.Д.* // ФТТ. 1995. Т. 37. В. 1. С. 160–174.
[8] *Делев В.А., Батыршин Э.С., Чувыров А.Н., Скалдин О.А.* // Вестник Башгосуниверситета. 1997. № 1. С. 26–28.
[9] *Delev V.A., Batyrshin E.S., Scaldin O.A., Chuvyrov A.N.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1999. V. 329. P. 1111–1118.
[10] *Чувыров А.Н.* // Флуктуации и шумы в сложных системах живой и неживой природы / Под ред. Р.М. Юльметьева, А.В. Мокшина, С.А. Демина, М.Х. Салахова. Казань, 2008. 456 с.