

## Проводящее тело в переменном магнитном поле

© А.О. Савченко,<sup>1</sup> О.Я. Савченко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090 Новосибирск, Россия  
e-mail: savch@ommfao1.sccc.ru

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет,  
630090 Новосибирск, Россия

(Поступило в Редакцию 7 июля 2014 г.)

Предложен численный метод определения векторного и градиента скалярного потенциалов внутри проводника во внешнем магнитном поле, гармонически изменяющемся по времени. Задача сводится к решению уравнения Гельмгольца в проводящем теле при условии, что нормальная составляющая правой части уравнения на поверхности проводника равна нулю. Для решения исходной задачи предложен итерационный метод, в котором сначала находится распределение поверхностного заряда, обеспечивающего выполнение граничного условия для векторного потенциала на поверхности проводника, а потом находится последующее приближение для векторного потенциала решением уравнения Пуассона. Метод иллюстрирован численными экспериментами.

### Введение

Необходимым этапом в моделировании движения проводящего тела в переменном магнитном поле является создание новых экономичных способов вычисления суммарного магнитного поля. Для сверхпроводящих тел ранее были аналитически определены токи в виде суммы конечного числа слагаемых на поверхности шара, помещенного в осевое магнитное поле, меняющееся на оси как полином степени  $n$  [1], и на поверхности эллипсоида, расположенного соосно такому же магнитному полю [2]. В случае конечной однородной проводимости тела в [3] предложен способ определения векторного потенциала в виде аналитического ряда в любом проводящем осесимметричном теле, помещенном в любое соосное магнитное поле.

В предлагаемой работе предложен способ определения в квазистационарном приближении [4] векторного потенциала в виде аналитического ряда в любом теле конечной однородной проводимости, помещенном в непроводящей среде в переменное магнитное поле, гармонически изменяющееся по времени. Особенность задачи состоит в том, что на поверхности проводника, окруженного непроводящей средой, возникает электрический заряд, что вызывает необходимость рассматривать математическую постановку задачи определения четырехмерного потенциала электромагнитного поля. Эта задача сводится к решению уравнения Гельмгольца в области, занимаемой проводящим телом, при условии, что правая часть уравнения тангенциальная на поверхности тела, а решением задачи с нулевой проводимостью тела является векторный потенциал внешнего магнитного поля. Решение этого уравнения находится в виде ряда, каждый член которого определяется из решения уравнения Пуассона при условии, что правые части этих уравнений тангенциальные на поверхности тела. Распределение поверхностного заряда, который обеспе-

чивает выполнение этого условия при заданном значении векторного потенциала, находится итерационной процедурой перед вычислением каждого последующего члена ряда. Отметим, что поле внутри проводящего тела однозначно определяется векторным потенциалом внешнего поля в области, занимаемой объемом проводящего тела.

### Постановка задачи и метод решения

Пусть в переменное магнитное поле, созданное сторонним током в непроводящей среде, в которой нет электрических зарядов, помещают проводящее тело с нулевым зарядом. Предполагается, что в области, куда помещают тело, и в теле нет сторонних источников тока. При воздействии на него внешнего магнитного поля в проводящем теле возникает распределение заряда и начинает циркулировать электрический ток. Электромагнитное поле внутри проводника определяется уравнениями Максвелла [4]. Будем считать, что электромагнитное поле и ток в проводнике удовлетворяют условиям квазистационарности. Первое из них состоит в пренебрежении током смещения по сравнению с током проводимости, что можно записать в виде неравенства [4]

$$\tau \gg 1/\lambda,$$

где  $\lambda$  — коэффициент проводимости тела,  $\tau$  — характерное время изменения магнитного поля. При увеличении проводимости относительная доля тока смещения уменьшается, и при достаточно больших значениях  $\lambda$  доля тока смещения в общем токе будет настолько мала, что ею можно пренебречь. Тогда уравнения Максвелла в области внутри проводника переходят в квазистацио-

нарные уравнения [4]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей внутри проводника,  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  — плотности зарядов и токов проводника, а диэлектрическая и магнитная проницаемости равны единице.

Квазистационарное поле будем описывать с помощью векторного и скалярного потенциалов, которые введем соотношениями

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi.$$

Нетрудно убедиться, что при калибровке  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  потенциалы квазистационарного поля в однородном изотропном проводнике будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= -4\pi\rho, \\ \Delta \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Второе условие квазистационарности состоит в пренебрежении эффектами запаздывания электромагнитных полей, которое можно записать в виде неравенства [4]

$$\tau \gg l/c,$$

где  $l$  — характерный размер тела,  $c$  — скорость света. В этом случае связь между плотностью тока проводимости и напряженностью электрического поля можно считать такой же, как в статическом случае [4]

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}.$$

Из квазистационарных уравнений следует, что  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ . Поэтому внутри тела с однородной проводимостью  $\lambda$  в переменном магнитном поле нет электрического заряда, так как в этом случае справедливо равенство

$$-\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \left( \operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \Delta \varphi = -4\pi\rho = 0.$$

Не появляется электрический заряд и вне тела из-за нулевой проводимости в этой области. Поэтому заряд возникает только на поверхности  $S$  проводящего тела  $\bar{V} = V \cup S$ , и векторный потенциал  $\mathbf{A}$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi\lambda}{c} \left( \operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad (1)$$

где  $\varphi$  — скалярный потенциал от заряда на поверхности  $S$ . В рассматриваемом квазистационарном приближении нормальная составляющая тока в проводнике вблизи его поверхности равна нулю [4], так как плотность нормальной составляющей тока, которая создает

заряд на поверхности тела, при  $\tau \gg 1/\lambda$  пренебрежимо мала по сравнению с ее тангенциальной составляющей, и выполняется следующее граничное условие в точках внутри тела, ближайших к его поверхности:

$$\left( \operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_{\perp} = 0. \quad (2)$$

Здесь и далее вектор с символом  $\perp$  в индексе будет обозначать проекцию вектора на внешнюю нормаль в точке поверхности  $S$ . Ввиду гармоничности скалярного потенциала от заряда проводника внутри и вне поверхности его градиент может быть определен из формулы

$$\operatorname{grad} \varphi = \int_s \frac{\sigma_0 \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds, \quad (3)$$

где  $\sigma_0$  — плотность поверхностного заряда,  $\mathbf{r}_{01}$  — вектор с началом в точке  $r_0$ , где находится значение искомого электрического поля, и точкой на поверхности  $r_1$ , где производится интегрирование,  $r_{01}$  — длина этого вектора. Однако формула (3) не является удобной для численных расчетов. Для выбора более подходящей формулы воспользуемся аналогом метода электростатических изображений. Будем искать распределение заряда  $\sigma_1$  на поверхности  $S_1$ , заключающей в себя исходное тело  $\bar{V}$ , а значения градиента скалярного потенциала по формуле

$$\operatorname{grad} \varphi_1 = \int_{S_1} \frac{\sigma_1 \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1, \quad r_0 \in V, \quad r_1 \in S_1, \quad (4)$$

при условии

$$\left( \int_{S_1} \frac{\sigma_1 \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_{\perp} = 0, \quad r_0 \in S, \quad r_1 \in S_1.$$

Значения градиента скалярного потенциала внутри тела, вычисленного по формулам (3) и (4), будут совпадать. Действительно, скалярные потенциалы  $\varphi$  и  $\varphi_1$  являются решениями второй краевой задачи для уравнения Лапласа с граничными условиями

$$-\left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_{\perp} = (\operatorname{grad} \varphi)_{\perp} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = (\operatorname{grad} \varphi_1)_{\perp} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n},$$

которая имеет единственное решение с точностью до константы. Отсюда следует, что  $\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} \varphi_1$ .

Если внешнее магнитное поле меняется по времени по гармоническому закону  $\exp(-i\omega t)$ , то через достаточно длинный промежуток времени ток, поверхностный заряд и векторный потенциал будут меняться по времени по тому же закону. В квазистационарном приближении, когда частота  $\omega \ll \frac{c}{l}$ , а также  $\omega \ll \lambda$ , где  $l$  — линейный размер проводника, вблизи поверхности тела  $S$  будет выполняться условие

$$\mathbf{E}_{\perp} = \left( \frac{i\omega}{c} \mathbf{A} - \int_{S_1} \frac{\sigma'_1 \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1 \right)_{\perp} = 0, \quad (5)$$

а внутри проводящего тела в области  $V$  будет справедливо следующее уравнение:

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi\lambda}{c} \left( \frac{i\omega}{c} \mathbf{A} - \int_{S_1} \frac{\sigma' \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1 \right), \quad (6)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$ ,  $\sigma'(\mathbf{r}_0)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$  — амплитуды электрического поля, плотности поверхностного заряда и векторного потенциала.

Вводя обозначения

$$K^2 = i\alpha, \quad \alpha = \frac{4\pi\omega\lambda}{c^2}, \quad \sigma = -i \frac{c}{\omega} \sigma', \quad (7)$$

запишем граничное условие (5) и уравнение (6) в виде

$$\left( \mathbf{A} - \int_{S_1} \frac{\sigma \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1 \right)_{\perp} = 0, \quad (8)$$

$$\Delta \mathbf{A} + K^2 \left( \mathbf{A} - \int_{S_1} \frac{\sigma \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1 \right) = 0. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) дополним условием для потенциала поля при нулевой проводимости тела. В этом случае амплитуда искомого потенциала равна амплитуде потенциала внешнего поля  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_0)$ , т.е.

$$\mathbf{A}(K=0) = \mathbf{A}_0. \quad (10)$$

Для решения задачи (8)–(10) предлагается итерационный метод. Идея его состоит в том, что решение уравнения (9) находится в виде суммы решений уравнений Пуассона в проводящем теле. Решение каждого такого уравнения может быть найдено путем интегрирования с известной функцией Грина и эти интегралы вычисляются по конечному объему тела. Правая часть каждого уравнения Пуассона является суммой векторного потенциала и интеграла от плотности поверхностного заряда, полученных на предыдущей итерации, при условии, что они удовлетворяют граничному условию (8). Значения интеграла от плотности поверхностного заряда, являющегося гармонической функцией внутри тела и удовлетворяющего граничному условию (8), могут быть однозначно определены по заданным значениям векторного потенциала на границе тела. На первой итерации значения векторного потенциала полагаются равными векторному потенциалу внешнего поля, что обеспечивает выполнение условия (10).

## Решение уравнения для векторного потенциала

Решение уравнения (9) внутри тела можно найти в виде ряда

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_0), \quad (11)$$

слагаемые которого удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{A}_0 = 0, \\ \Delta \mathbf{A}_1 = -K^2 \left( \mathbf{A}_0 - \int_{S_1} \frac{\sigma_0 \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1 \right), \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{A}_{n+1} = -K^2 \left( \mathbf{A}_n - \int_{S_1} \frac{\sigma_n \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1 \right) \end{cases} \quad (12)$$

при условии

$$\left( \mathbf{A}_j - \int_{S_1} \frac{\sigma_j \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1 \right)_{\perp} = 0, \quad j = 0, \dots, n. \quad (13)$$

В справедливости формулы (11) нетрудно убедиться, сложив правые и левые части уравнений (12). Поскольку правые части уравнений удовлетворяют граничным условиям (13), то решение уравнения (9) в виде ряда (11) будет удовлетворять граничному условию (8). Из (11) и (12) следует выполнение условия (10). Решение каждого уравнения системы (12), кроме первого, будем искать при условии гармоничности искомого функций вне проводника, что согласуется с условием непроводимости внешней среды. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{j+1}(\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{K^2}{r_{01}} \left( \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_1) - \int_{S_1} \frac{\sigma_j \mathbf{r}'_{01}}{r'_{01}{}^3} ds_1 \right) dv', \\ j &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $r_{01}$  и  $r'_{01}$  — расстояния между текущей точкой интегрирования по объему  $V$  и точками наблюдения и интегрирования по поверхности  $S_1$  соответственно. Из формул (11), (14) следует, что если ряд (11) сходится, то значения потенциала внешнего поля  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}_0)$  в области объема  $V$ , куда помещают проводящее тело, однозначно определяют решение  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$  в этой области.

## Нахождение градиента скалярного потенциала по известным значениям векторного потенциала

Предположим, что значения слагаемых  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_j$  в ряде (11) уже найдены. Для нахождения последующего слагаемого  $\mathbf{A}_{j+1}$  необходимо найти функцию  $\sigma_j$ , удовлетворяющую граничному условию (13). Приближенное значение этой функции также найдем итерационным процессом, в котором его  $k$ -е приближение определяется таким образом, чтобы норма функции

$$\left( \mathbf{A}_j - \int_{S_1} \frac{\sigma_j^{(k)} \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1 \right)_{\perp} \quad (15)$$

стремилась к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Выберем поверхность  $S_1$  подобной поверхности  $S$  с коэффициентом подобия  $p$ .

Определим внутренний итерационный процесс следующим образом:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}_0) = \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_0) - \beta \int_{S_1} \frac{A_{j\perp} \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1, \quad (16)$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_0) = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_0) - \beta \int_{S_1} \frac{B_{1\perp} \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1, \quad (17)$$

$$\dots$$

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{r}_0) = \mathbf{B}_{k-1}(\mathbf{r}_0) - \beta \int_{S_1} \frac{B_{(k-1)\perp} \mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1, \quad (18)$$

где  $\mathbf{r}_0 \in S$ ,  $\mathbf{r}_1 \in S_1$ ,  $\beta > 0$  — некоторый множитель, а функции  $A_{j\perp}(\mathbf{r}_1)$ ,  $B_{i\perp}(\mathbf{r}_1)$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ , являются проекциями векторов  $(\mathbf{A}_j)_\perp$ ,  $(\mathbf{B}_i)_\perp$  на внешнюю нормаль в точке поверхности  $\mathbf{r}_1/p$ :

$$A_{j\perp}(\mathbf{r}_1) = (\mathbf{A}_j)_\perp(\mathbf{r}_1/p), \quad B_{i\perp}(\mathbf{r}_1) = (\mathbf{B}_i)_\perp(\mathbf{r}_1/p).$$

Просуммировав правые и левые части уравнений (16)–(18), получим

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{r}_0) = \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_0) - \int_{S_1} \sigma_j^{(k)} \frac{\mathbf{r}_{01}}{r_{01}^3} ds_1, \quad (19)$$

где  $\sigma_j^{(k)} = \beta(A_{j\perp} + \sum_{i=1}^{k-1} B_{i\perp})$ . Если итерационный процесс (16)–(18) сходится, то отсюда следует, что  $\|(\mathbf{B}_k)_\perp\| \rightarrow 0$  с ростом числа итераций  $k$ . Отсюда следует стремление к нулю и нормы функции (15). Если поверхность  $S_1$  будет близка к поверхности  $S$ , то заряд участка  $ds_1$  с поверхностной плотностью  $\beta B_{i-1,\perp}(\mathbf{r}_1)$ , где  $\beta = 1/(2\pi)$ , компенсирует значение функции  $(\mathbf{B}_i)_\perp(\mathbf{r}_1/p)$ ,  $i = 2, \dots, k-1$ , под участком поверхности  $ds$ , подобной  $ds_1$ , что ведет к уменьшению ее нормы по сравнению с нормой на предыдущей итерации. При увеличении коэффициента подобия оптимальное значение параметра  $\beta$  будет увеличиваться, что демонстрируют численные эксперименты, приведенные в следующем разделе.

### Численные эксперименты

Численное решение уравнений (12) было подробно рассмотрено в [3], а потому в данном разделе рассмотрим вычисление поверхностного заряда методом, изложенном в предыдущем разделе. Для численной апробации метода выберем тело, имеющее форму эллипсоида вращения с большой полуосью, превышающей длину малой оси в 4 раза и направленной перпендикулярно оси внешнего осесимметричного магнитного поля (рис. 1). Найдем плотность поверхностного заряда на подобных ему телах, для которой будет выполняться уравнение (13). Здесь и далее будем обозначать вектором с индексами  $X, Y$  и  $Z$  его проекции на соответствующие оси координат.

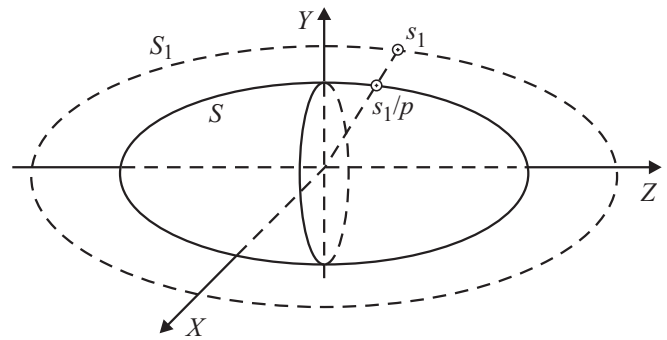


Рис. 1.

На рисунках 2, *a, b* приведена зависимость проекций векторов  $(\mathbf{B}_k)_X(\theta_0, \varphi_0)$  и  $(\mathbf{B}_k)_\perp(\theta_0, \varphi_0)$  из формул (16)–(18) от номера итерации  $k$ ,  $k = 1, \dots, 24$  при разных размерах подобных эллипсоидов, характеризующихся коэффициентом подобия  $p$ , для значений углов  $\theta_0$  и  $\varphi_0$  в сферических координатах, равных  $\pi/4$ . Значение  $\beta$  было выбрано равным  $\beta = 1/(2\pi)$ .

На рисунках 3, *a, b* приведены зависимости проекций векторов  $(\mathbf{B}_k)_Z(\theta_0, \varphi_0)$  и  $(\mathbf{B}_k)_\perp(\theta_0, \varphi_0)$  от номера итерации  $k$ ,  $k = 1, \dots, 24$  для второго члена ряда (11) для разных значений параметра  $\beta$  в формулах (16)–(18). Значение  $p$  для подобного эллипсоида было равно 1.5, коэффициент  $\alpha$  из формул (7) был равен 6.

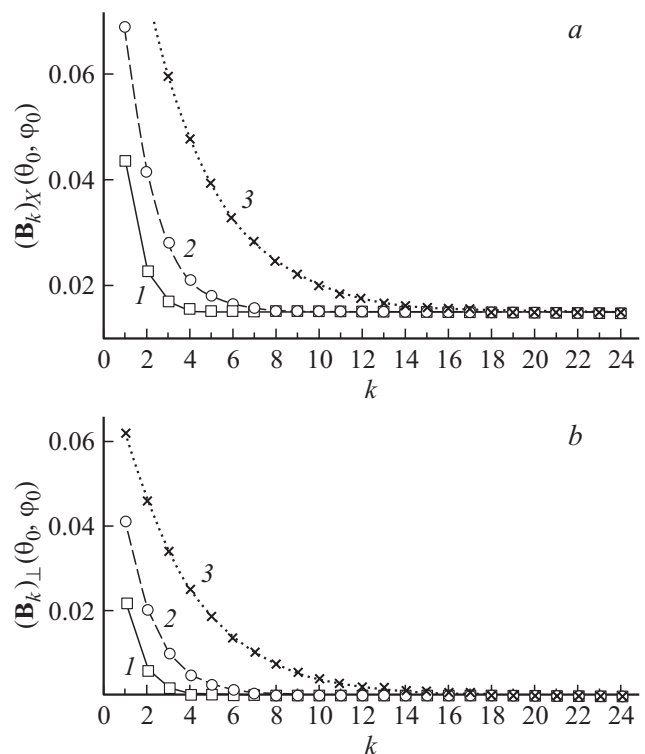
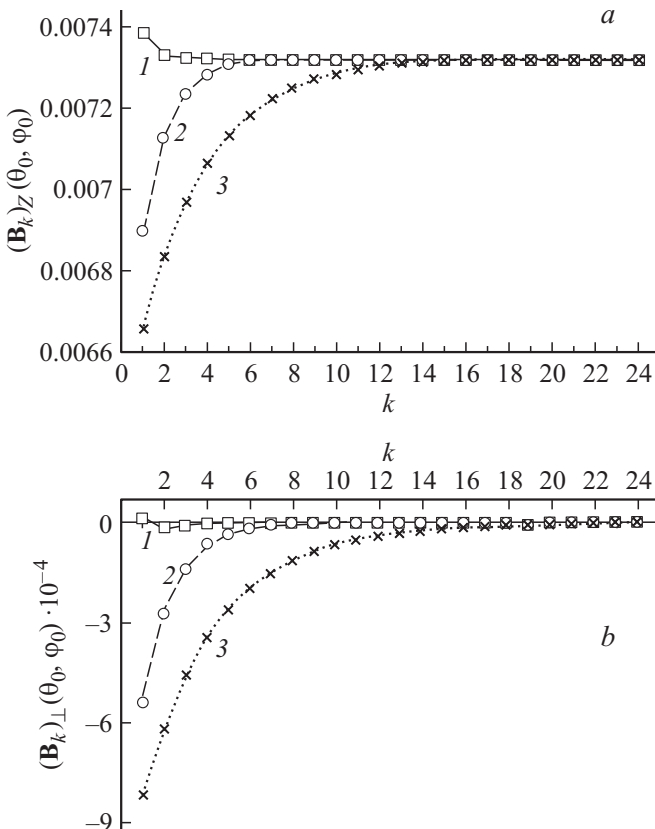


Рис. 2. Зависимость проекции векторов  $(\mathbf{B}_k)_X(\theta_0, \varphi_0)$  и  $(\mathbf{B}_k)_\perp(\theta_0, \varphi_0)$  от номера итерации для первого члена ряда (11).  $p = 1.06$  (1), 1.2 (2), 1.5 (3).  $(\mathbf{B}_0)_X(\theta_0, \varphi_0) = (\mathbf{A}_0)_X(\theta_0, \varphi_0) = 0.1251$ ,  $(\mathbf{B}_0)_\perp(\theta_0, \varphi_0) = (\mathbf{A}_0)_\perp(\theta_0, \varphi_0) = 0.0841$ .

$p$	1.2	1.5	1.8
$(\mathbf{B}_{96})_x(\theta_0, \varphi_0)$ $(\mathbf{B}_0)_x(\theta_0, \varphi_0) = -0.2105e-02$	$-0.688110e-03$	$-0.688118e-03$	$-0.688124e-03$
$(\mathbf{B}_{96})_z(\theta_0, \varphi_0)$ $(\mathbf{B}_0)_z(\theta_0, \varphi_0) = 0.6416e-02$	$0.731528e-02$	$0.731525e-02$	$0.731526e-02$
$(\mathbf{B}_{96})_{\perp}(\theta_0, \varphi_0)$ $(\mathbf{B}_0)_{\perp}(\theta_0, \varphi_0) = -0.1096e-02$	$-0.1399e-08$	$0.6858e-09$	$-0.6636e-08$



**Рис. 3.** Зависимость проекций векторов  $(\mathbf{B}_k)_z(\theta_0, \varphi_0)$  и  $(\mathbf{B}_k)_{\perp}(\theta_0, \varphi_0)$  от номера итерации для второго члена ряда (11).  $\beta = 2/\pi$  (1),  $1/\pi$  (2),  $1/(2\pi)$  (3).  $(\mathbf{B}_0)_z(\theta_0, \varphi_0) = (\mathbf{A}_1)_z(\theta_0, \varphi_0) = 0.00642$ ,  $(\mathbf{B}_0)_{\perp}(\theta_0, \varphi_0) = (\mathbf{A}_1)_{\perp}(\theta_0, \varphi_0) = -0.0011$ .

Как видно из приведенных рисунков, конечный результат слабо зависит как от размеров подобных эллипсоидов, так и от выбора параметра  $\beta$  в итерационном процессе (16)–(18). Особенно это видно из таблицы, в которой приводятся значения  $(\mathbf{B}_{96})_x(\theta_0, \varphi_0)$ ,  $(\mathbf{B}_{96})_z(\theta_0, \varphi_0)$  и  $(\mathbf{B}_{96})_{\perp}(\theta_0, \varphi_0)$  для разных размеров подобных эллипсоидов и для второго члена ряда (11) при  $\beta = 1/\pi$ . Для сравнения в этой же таблице приведены и начальные значения для выбранных проекций вектора  $\mathbf{B}$ .

Рис. 2 и результаты таблицы иллюстрируют сходимость предложенного метода „подобных тел“ для вычисления поверхностного заряда в некоторой выбранной

точке, которая имеет аналогичный характер и для других точек расчетной области. Из вида графиков функций можно заключить, что сходимость метода будет более быстрой, если подобное тело расположено ближе к исходному. Как видно из рис. 3, на скорость сходимости влияет также и величина параметра  $\beta$  в формулах (16)–(18), предпочтительным значением которого является  $\beta = 2/\pi$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00648-а).

### Список литературы

- [1] Савченко А.О., Савченко О.Я. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 7. С. 130–133.
- [2] Савченко А.О., Савченко О.Я. // ТМФ. 2012. Т. 170. № 3. С. 381–392.
- [3] Савченко А.О., Савченко О.Я. // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 1. С. 18–27.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.