

01;11

## О границе обобщенной синхронизации в сложных динамических системах

© А.А. Короновский<sup>1,2</sup>, О.И. Москаленко<sup>1,2</sup>, А.О. Сельский<sup>1,2</sup>,  
А.Е. Храмов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

<sup>2</sup> Саратовский государственный технический университет

им. Гагарина Ю.А.

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com

Поступило в Редакцию 27 февраля 2015 г.

Исследован характер границы режима обобщенной хаотической синхронизации в системе трех хаотических осцилляторов, два из которых однонаправленно связаны с третьим. Показано, что расположение границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров связи определяется величиной расстройки частот взаимодействующих хаотических осцилляторов. Характер такого расположения границ объяснен с помощью метода модифицированной системы [2].

Обобщенная синхронизация в хаотических системах [1,2], являясь частным случаем хаотической синхронизации [3], представляет большой интерес как нелинейное явление, встречающееся во многих системах [4–6]. В последнее время, помимо исследования хаотической синхронизации отдельных осцилляторов, активно развиваются исследования синхронного поведения в сложных сетях хаотических осцилляторов [7–10], включая режимы обобщенной хаотической синхронизации [11–13]. Понятно, что в данном случае, когда много осцилляторов взаимодействуют друг с другом, ситуация становится более сложной по сравнению со случаем двух взаимодействующих осцилляторов, что находит свое отражение в сложности диагностики и изучении данного вида синхронного поведения (см. работу [12] и список литературы в ней). В то же самое время можно ожидать, что основные механизмы, отвечающие за установление режима обобщенной синхронизации [2] в системе двух взаимодействующих систем, будут играть определяющую роль и в случае более сложной структуры взаимодействующих осцилляторов, которая, в свою очередь, будет

накладывать свой отпечаток на особенности возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации.

В данной работе рассматривается вопрос об установлении режима обобщенной хаотической синхронизации, соответственно о характере границы синхронного режима в плоскости управляющих параметров для случая, когда ведомая система находится под воздействием двух ведущих хаотических осцилляторов, которые различаются только значениями управляющих параметров и не связаны друг с другом. В качестве модельных систем будем рассматривать динамику трех хаотических осцилляторов Ресслера, два из которых (1) и (2) являются ведущими и воздействуют однонаправленно на ведомый (3) осциллятор:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, \\ \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \omega_2 y_2 - z_2, \\ \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \\ \dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon_1(x_1 - x_r) + \varepsilon_2(x_2 - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c). \end{aligned} \quad (3)$$

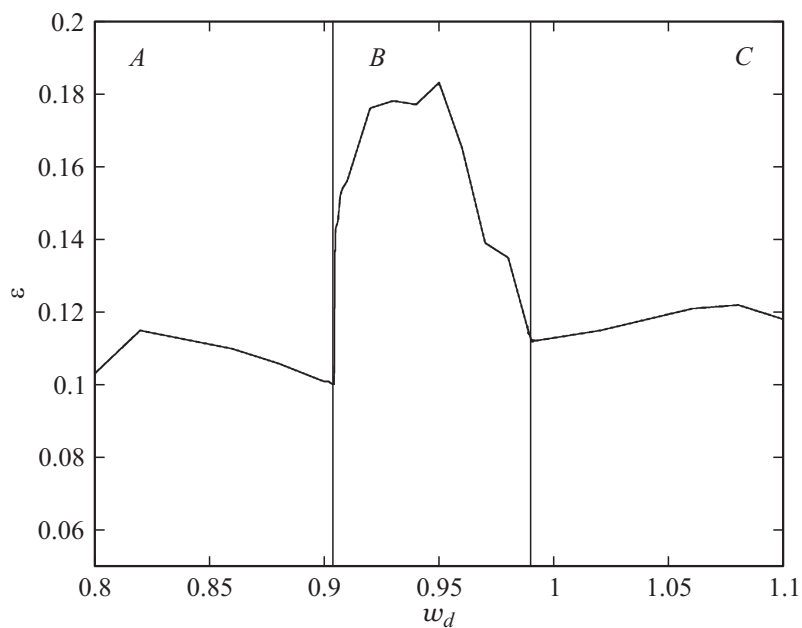
В уравнениях (1)–(3):  $\omega_1, \omega_2, \omega_r = 0.95$  — параметры, определяющие собственные частоты взаимодействующих осцилляторов,  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10$  — управляющие параметры,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — параметры связи между ведущими и ведомой системами соответственно.

В случае совпадения значений параметров  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\omega_1 = \omega_2$ ) поведение системы (1) можно (с некоторой погрешностью) свести к хорошо изученному случаю взаимодействия двух однонаправленно связанных осцилляторов с параметром связи  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Действительно, согласно [2], для объяснения механизма возникновения синхронного режима в двух связанных осцилляторах можно ввести в рассмотрение

модифицированную систему. При таком подходе слагаемое, соответствующее диссипативной связи между системами, распадается на два, что позволяет разделить при рассмотрении внешнее воздействие со стороны ведущей системы и дополнительную диссипацию, играющую ключевую роль в установлении режима обобщенной синхронизации, поскольку установление обобщенной синхронизации происходит тогда, когда за счет увеличения параметра связи в систему вносится дополнительная диссипация, достаточная для подавления собственной хаотической динамики в модифицированной системе (см. [2]). Аналогично можно ввести в рассмотрение модифицированную систему и для рассматриваемого случая трех взаимодействующих систем. В случае, когда управляющие параметры ведущих осцилляторов идентичны ( $\omega_1 = \omega_2$ ), с увеличением величины  $\varepsilon$  модифицированная система переходит при некотором критическом значении параметра  $\varepsilon_c$  в периодический режим, а ведомая система — в режим обобщенной синхронизации, и соответственно на плоскости параметров  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  граница режима обобщенной синхронизации для рассматриваемой системы (1) будет определяться соотношением  $\varepsilon_2 = \varepsilon_c - \varepsilon_1$  и представлять собой диагональную прямую линию.

Однако в случае различных параметров (и соответственно базовых частот) ведущих (1) и (2) осцилляторов ситуация другая, что объясняется тем, что помимо дополнительной диссипации, вносимой в систему за счет диссипативной связи, на установление/разрушение режима обобщенной хаотической синхронизации влияет также внешнее воздействие, которое в противоположность влиянию диссипации может, наоборот, возбуждать собственную хаотическую динамику в модифицированной системе, разрушающую синхронный режим. Именно влияние внешнего воздействия обуславливает специфический характер границы режима обобщенной хаотической синхронизации в случае взаимодействия двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов [12]. Поскольку эта граница является отражением влияния воздействия со стороны ведущей системы на возбуждение собственной хаотической динамики ведомой системы, она, как будет показано ниже, играет важную роль и в рассматриваемом случае трех взаимодействующих осцилляторов.

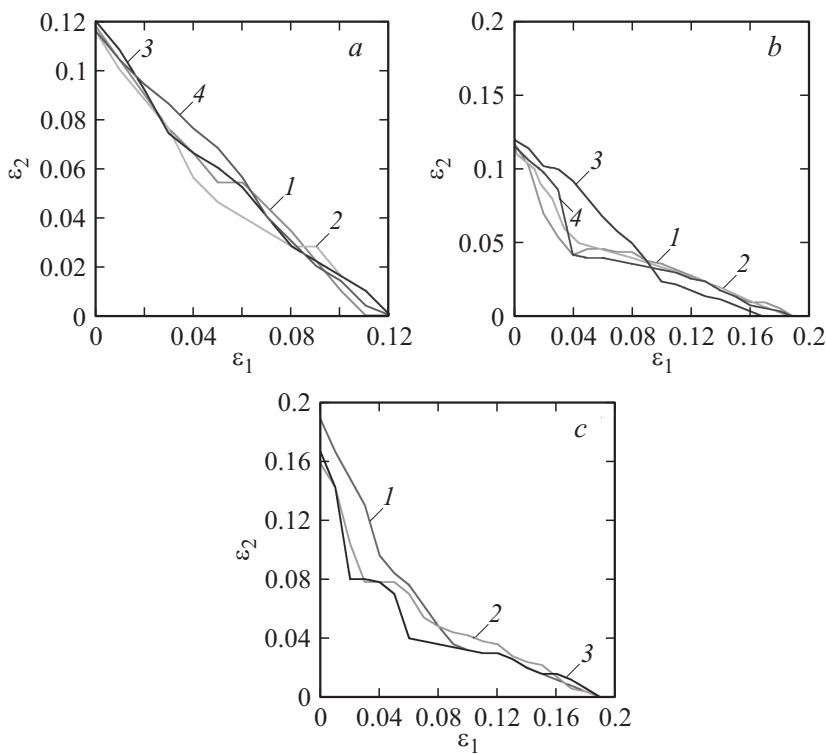
Граница обобщенной синхронизации для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера приведена на рис. 1 (см. также [14,15]). Расчет проводился с помощью метода вспомогательной системы [16], с дополнительным уточнением с помощью расчета показателей Ляпунова



**Рис. 1.** Граница обобщенной синхронизации в случае двух однонаправленных осцилляторов Ресслера [14]. Обозначены области с характерными величинами параметра связи, необходимыми для установления режима обобщенной синхронизации.

исследуемых систем. Как видно из рис. 1, на плоскости управляющих параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$  есть несколько областей: область  $B$ , где для достижения режима обобщенной синхронизации требуется относительно большое значение параметра связи между осцилляторами, и области справа ( $C$ ) и слева ( $A$ ) от нее, где обобщенная синхронизация наступает при значительно меньших значениях параметра связи. Существенное различие значений параметра связи  $\varepsilon_c$ , соответствующих границе возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в области  $B$ , обуславливается возбуждением собственных хаотических колебаний в ведомой системе [14].

При исследовании влияния двух ведущих осцилляторов Ресслера на третий (ведомый) будем рассматривать различные случаи частотной



**Рис. 2.** Границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров связи при разных значениях частот ведущих систем. *a*: 1 —  $\omega_1 = 1.00$ ,  $\omega_2 = 0.82$ ; 2 —  $\omega_1 = 1.05$ ,  $\omega_2 = 1.02$ ; 3 —  $\omega_1 = 0.82$ ,  $\omega_2 = 1.05$ ; 4 —  $\omega_1 = 1.00$ ,  $\omega_2 = 1.02$ . *b*: 1 —  $\omega_1 = 0.92$ ,  $\omega_2 = 0.82$ ; 2 —  $\omega_1 = 0.93$ ,  $\omega_2 = 1.05$ ; 3 —  $\omega_1 = 0.96$ ,  $\omega_2 = 1.00$ ; 4 —  $\omega_1 = 0.92$ ,  $\omega_2 = 1.02$ . *c*: 1 —  $\omega_1 = 0.92$ ,  $\omega_2 = 0.93$ , 2 —  $\omega_1 = 0.93$ ;  $\omega_2 = 0.91$ ; 3 —  $\omega_1 = 0.92$ ,  $\omega_2 = 0.96$ .

расстройке ведущих осцилляторов относительно ведомого, а именно: (1) оба значения параметра  $\omega_i$  ведущих осцилляторов лежат в областях *A* или *C*; (2) значение параметра  $\omega_i$  одного из ведущих осцилляторов лежит в области *B*, а второго — в области *A* или *C*; (3) оба значения  $\omega_i$  принадлежат области *B*.

Границы режима обобщенной хаотической синхронизации для первого рассматриваемого случая представлены на рис. 2, *a*. Видно, что

в данном случае границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров связи  $(\varepsilon_1; \varepsilon_2)$  близки к диагонали. Особенно это заметно для кривой 4, когда значения параметров  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и соответственно основные частоты ведущих осцилляторов, а следовательно, и соответствующие значения параметров связи, необходимые для установления обобщенной синхронизации в случае двух осцилляторов, близки. Однако, следует особо отметить, что границы близки к диагонали и в случае, когда параметры  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ведущих осцилляторов принадлежат разным областям,  $A$  и  $C$ . Данный случай по своей сути близок к ситуации двух идентичных ведущих осцилляторов: поскольку для каждого из ведущих осцилляторов по отдельности критическое значение параметра связи, соответствующее установлению режима обобщенной синхронизации, оказывается примерно одинаковым, то оба этих осциллятора оказываются равноправными с точки зрения внесения как дополнительной диссипации в ведомую систему, так и возбуждения собственной хаотической динамики в ней.

Ситуация меняется, когда  $\omega$ -параметр одного из ведущих осцилляторов принадлежит области  $B$ , а параметр второго ведущего осциллятора — областям  $A$  или  $C$ . В этом случае (рис. 2,  $b$ ) видно, что граница далека от диагонали. В целом для данных наборов частот наблюдается характерный „излом“ границы обобщенной синхронизации: границу на плоскости  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  можно разделить на два участка, близких к линейным, каждый со своим углом наклона. Сравнивая рис. 2,  $a$  и  $b$ , можно сделать вывод о том, что в рассматриваемом случае вид границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров связи зависит не только от разницы частот ведущих осцилляторов, но и от соответствующих им значений параметра связи на рис. 1. Излом границы объясняется различием свойств ведущих осцилляторов, приводящих к возбуждению собственных хаотических колебаний ведомой системы: при одинаковых значениях параметра связи  $\varepsilon_i$  оба осциллятора вносят примерно равный вклад в величину дополнительной диссипации ведомой системы, но в то же самое время осциллятор,  $\omega$ -параметр которого находится в области  $B$ , в большей степени возбуждает собственную хаотическую динамику ведомого осциллятора.

Важно рассмотреть случай, когда значения параметра  $\omega$  обоих ведущих осцилляторов принадлежат области  $B$  (рис. 2,  $c$ ). Исходя из идеологии метода модифицированной системы и всего вышеизложенного, можно было бы предположить, что в данном случае границы обоб-

щенной хаотической синхронизации также будут близки к диагонали (как это имеет место на рис. 2, *a*), однако это не так. Интересно, что в этом случае наблюдаются даже не два сегмента границы, как на рис. 2, *b*, а три, что опять-таки объясняется разными значениями параметра  $\varepsilon$ , при которых возбуждается собственная хаотическая динамика в ведомой системе (см. более детально [14]), для разных значений параметра  $\omega_i$ , несмотря на то что значения этих параметров достаточно близки и принадлежат одной области (*B*).

В целом стоит заключить, что в случае влияния двух идентичных осцилляторов Ресслера с разными частотами на третий граница обобщенной синхронизации на плоскости параметров связи может быть далека от диагонали, наблюдаемой в случае, если частоты ведущих систем будут совпадать. В случае, когда управляющие параметры обеих систем лежат в областях *A* или *C*, граница обобщенной синхронизации действительно близка к диагонали. В случае же, когда параметры обеих систем лежат в области *B*, ситуация иная: граница имеет достаточно сложный вид, несмотря на близость частот. В случае, когда параметр одной ведущей системы лежит в области *B*, а второй — в области *A* или *C*, на границе обобщенной синхронизации на плоскости параметров связи можно выделить два линейных участка, каждый со своим наклоном, характерным для данной частоты. Стоит отметить, что при этом нет больших отличий между осцилляторами с параметрами из областей *A* и *C*.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-12-00224). Научная деятельность А.О. Сельского поддержана также стипендией фонда некоммерческих программ „Династия“, А.Е. Храмова — грантом Министерства образования и науки РФ (№ 931).

## Список литературы

- [1] *Rulkov N.F., Sushchik M.M.* et al. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. N 2. P. 980–994.
- [2] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. N 6. P. 067 201.
- [3] *Balanov A.G., Janson N.B., Postnov D.E., Sosnovtseva O.V.* Synchronization: from simple to complex. Springer, 2009.
- [4] *Rulkov N.F.* // Chaos. 1996. V. 6. P. 262.
- [5] *Dmitriev B.S., Hramov A.E.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. P. 074 101.

- [6] *Filatov R.A., Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 358. P. 301–308.
- [7] *Kyrychko Y.N., Blyuss K.B., Schoell E.* // Chaos. 2014. V. 24. N 4. P. 043 117.
- [8] *Skardal P.S., Taylor D., Sun J.* // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 113. N 14. P. 144 101.
- [9] *Kohar V., Ji P., Choudhary A.* et al. // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. N 2. P. 022 812.
- [10] *Maslennikov O.V., Nekorkin V.I.* // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. N 1. P. 012 901.
- [11] *Sun W., Li Sh.* // Nonlinear Dynamics. 2014. V. 77. N 3. P. 481–489.
- [12] *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. P. 036 216.
- [13] *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 4(10). С. 748–764. [JETP. 2006. V. 103. N 4. P. 654-665.]
- [14] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // EPL. 2005. V. 72. N 6. P. 901–907.
- [15] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 3. С. 40–48.
- [16] *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F.* et al. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. N 5. P. 4528–4535.