

03

## Неустойчивость заряженной капли в кулоновском и дипольном полях

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.А. Ширяев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 20 ноября 2014 г.)

В нелинейных асимптотических расчетах путем разложения по двум малым параметрам (по величине безразмерной равновесной деформации капли и отношению амплитуды осцилляций к ее радиусу) исследуется устойчивость  $n$ -й моды осцилляций заряженной капли в неоднородном электростатическом поле, созданном точечным зарядом или точечным диполем. Показано, что при зарядах, меньших критического по Рэлею, механизм реализации неустойчивости капли в неоднородном электростатическом поле остается таким же, как и для незаряженной капли или как у заряженной капли в однородном электростатическом поле. Критическое значение полевого параметра с ростом номера моды выходит на насыщение, но асимптотика, параллельная оси абсцисс, к которой стремится полевой параметр с увеличением номера моды, снижается при увеличении собственного заряда капли. В неоднородных полях повышается связанность мод осцилляций, вызывающая возбуждение целого спектра мод, при изначальном возбуждении даже единичной моды. С увеличением степени неоднородности поля связанность отдельных мод осцилляций увеличивается.

### Введение

Проблема расчета критических условий неустойчивости заряженной электропроводной капли во внешнем неоднородном электростатическом поле представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в академическом знании, технике и технологии. В частности, она имеет отношение к проблемам формирования ионно-кластерно-капельных пучков в жидкометаллических источниках ионов [1], жидкостных масс-спектрометрах для анализа труднолетучих веществ, термически нестабильных молекул органического происхождения [2], микро- и макроразделения зарядов в грозовых облаках [3], создания управляемых внешними электрическими полями потоков заряженных монодисперсных капель для подпитки жидким водородом установок для термоядерного синтеза и ускорителей макрочастиц [4], электрораспыления различных жидкостей [5,6] и т.п. Эта задача интересна и в связи с экспериментальной проверкой [7,8] критерия Рэлея [9] реализации неустойчивости заряженной капли и исследования закономерностей ее электростатического распада, так как во всех видах подвесов заряженной капли используются неоднородные электрические поля. Решению указанной задачи и посвящено настоящее исследование.

### Постановка задачи

Рассмотрим каплю радиуса  $R$  идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости, несущую заряд  $Q$ , расположенную на расстоянии  $L$  от точечного заряда  $q$  или точечного диполя с моментом  $p$ . Зададимся целью

исследовать такую каплю на устойчивость по отношению к суперпозиции электрического поля собственного заряда и заряда, индуцированного в капле внешними точечными зарядом или диполем. Ограничимся рассмотрением осесимметричных осцилляций капли, чтобы избежать излишней громоздкости выкладок. Задачу будем решать в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре масс капли. Ось  $OZ$ , от положительного направления которой отсчитывается угол  $\theta$ , будем считать проходящей через заряд (диполь) и центр масс капли и направленной от точечного заряда (диполя) к капле.

Равновесную форму капли в первом приближении по отношению абсолютной величины деформации к радиусу равновеликой сферы можно считать сферoidalной [10].

Будем анализировать одновременно две ситуации: когда электростатическое поле создано точечным зарядом и точечным диполем, а для идентификации электростатических полей будем использовать индексы („с“ — „charge“ для случая поля точечного заряда и „d“ — „dipole“ для случая поля точечного диполя). Выражения, одинаково записывающиеся для обоих случаев, получат двойной индекс „(c, d)“.

Математическая формулировка задачи аналогична ранее использованной при решении задачи об устойчивости незаряженной капли в однородном и неоднородном электростатических полях и заряженной капли в однородном поле [11–13] и состоит из основных уравнений гидродинамики и уравнений электродинамики, определяющих напряженность электрического поля в окрестности капли в предположении малости гидродинамических

скоростей по сравнению с релятивистскими:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_{(c,d)}}{\partial t} + (\mathbf{V}_{(c,d)}, \nabla) \mathbf{V}_{(c,d)} = -\frac{1}{\rho} \nabla P_{(c,d)} + \frac{\mathbf{F}_{in(c,d)}}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{V}_{(c,d)} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{(c,d)} = 0, \quad \mathbf{E}_{(c,d)} = -\nabla \Phi_{(c,d)}. \quad (2)$$

В (1), (2) и далее  $\mathbf{V}_{(c,d)}$  — скорость волнового течения жидкости,  $P_{(c,d)}, \rho$  — давление в жидкости и ее плотность соответственно,  $\mathbf{F}_{in(c,d)}$  — сила инерции, действующая на единицу объема, которую необходимо ввести при переходе к неинерциальной системе отсчета, связанной с центром масс капли, из-за ускоренного движения центра масс — „втягивания“ поляризованной капли в область большей неоднородности электрического поля,  $\mathbf{E}_{(c,d)}, \Phi_{(c,d)}$  — напряженность электрического поля и электрический потенциал.

Уравнения (1), (2) дополним условием ограниченности скорости в центре масс капли и условием для электрического потенциала точечного заряда (диполя) на большом расстоянии

$$r = 0: \quad |\mathbf{V}_{(c,d)}| < \infty,$$

$$r \gg R: \quad \Phi_{(c)} \rightarrow \frac{q}{\sqrt{L^2 + r^2 + 2Lr\mu}},$$

$$\Phi_{(d)} \rightarrow \frac{pr\mu + pL}{(\sqrt{L^2 + r^2 + 2Lr\mu})^3},$$

а также системой гидродинамических и электрических граничных условий на поверхности капли: динамическим, кинематическим и условием эквипотенциальности поверхности капли

$$r = r_{(c,d)}(\theta) + \xi_{(c,d)}(\theta, t): \quad \Phi_{(c,d)} = \operatorname{const},$$

$$P_{(c,d)} - P_{atm} + P_{E(c,d)} = P_{\sigma(c,d)},$$

$$\frac{\partial F_{(c,d)}}{\partial t} + (\mathbf{V}_{(c,d)}, \nabla) F_{(c,d)} = 0,$$

$$F_{(c,d)}(r, \theta, t) \equiv r - r_{(c,d)}(\theta) - \xi_{(c,d)}(\theta, t) = r - f_{(c,d)}(\theta, t) = 0,$$

где функции  $r_{(c,d)}(\theta)$  задают равновесную форму поверхности,  $\xi_{(c,d)}(\theta, t)$  — возмущение поверхности, а  $f_{(c,d)}(\theta, t)$  — общую форму капли в поле точечного заряда и диполя соответственно. Давления электрическое  $P_{E(c,d)}$  и лапласовское  $P_{\sigma(c,d)}$  выражаются формулами

$$P_{E(c,d)} = \frac{\mathbf{E}_{(c,d)}^2}{8\pi}, \quad P_{\sigma(c,d)} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}_{(c,d)},$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, а орт нормали к поверхности капли  $\mathbf{n}_{(c,d)}$  определяется через  $F_{(c,d)}$ :

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\nabla F_{(c,d)}}{|\nabla F_{(c,d)}|} \Big|_{F_{(c,d)}=0}.$$

Дополним задачу условием сохранения объема капли (следствие несжимаемости жидкости), условием неподвижности центра масс капли при осцилляциях ее поверхности (следствием того, что мы ищем решение в системе координат, связанной с центром масс) и условием сохранения заряда капли:

$$\iiint_{V_{(c,d)}} dV = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \iiint_{V_{(c,d)}} \mathbf{r} dV = 0, \quad \iint_{S_{(c,d)}} \kappa_{(c,d)} dS = Q,$$

$$\{V_{(c,d)}: 0 \leq r \leq f_{(c,d)}(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\{S_{(c,d)}: r = f_{(c,d)}(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

где  $\kappa_{(c,d)}$  — поверхностная плотность заряда на капле:

$$\kappa_{(c,d)} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}_{(c,d)}, \mathbf{n}_{(c,d)}).$$

Для удобства расчетов перейдем к безразмерным переменным, выбирая в качестве основных масштабов обезразмеривания:  $R = 1, \rho = 1, \sigma = 1$ . При этом все остальные величины будут выражены в долях своих характерных значений. Условимся за безразмерными величинами сохранять прежние обозначения.

Поскольку в поставленной задаче исследуются движения жидкости, связанные с малыми колебаниями свободной поверхности, воспользуемся моделью потенциального течения жидкости, в рамках которой поле скоростей  $\mathbf{V}_{(c,d)}$  определяется гидродинамическим потенциалом  $\psi_{(c,d)}(r, \theta, t)$ :  $\mathbf{V}_{(c,d)} = \nabla \psi_{(c,d)}$ . Переходя в сформулированной задаче к электрическому  $\Phi_{(c,d)}(r, \theta, t)$  и гидродинамическому  $\psi_{(c,d)}(r, \theta, t)$  потенциалам, получим систему скалярных уравнений, в безразмерных переменных имеющую вид

$$P_{(c,d)} = P_{0(c,d)} + P_{in(c,d)} - \frac{\partial \psi_{(c,d)}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi_{(c,d)})^2,$$

$$\Delta \psi_{(c,d)} = 0, \quad |\nabla \psi_{(c,d)}| \Big|_{r=0} < \infty, \quad \Delta \Phi_{(c,d)} = 0,$$

$$r \gg 1: \quad \Phi_{(c)} \rightarrow \frac{q}{\sqrt{L^2 + r^2 + 2Lr\mu}},$$

$$\Phi_{(d)} \rightarrow \frac{pr\mu + pL}{(\sqrt{L^2 + r^2 + 2Lr\mu})^3}$$

$$r = f_{(c,d)}(\theta, t):$$

$$P_{0(c,d)} + P_{in(c,d)} - \frac{\partial \psi_{(c,d)}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi_{(c,d)})^2 - P_{atm} + P_{E(c,d)} = P_{\sigma(c,d)},$$

$$-\frac{\partial \xi_{(c,d)}}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi_{(c,d)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_{(c,d)}}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f_{(c,d)}(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) = 0,$$

$$\Phi_{(c,d)} = \operatorname{const}, \quad P_{E(c,d)} = \frac{(\nabla \Phi_{(c,d)})^2}{8\pi}, \quad P_{\sigma(c,d)} = \operatorname{div} \mathbf{n}_{(c,d)},$$

$$\mathbf{n}_{(c,d)} = \left( \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [f_{(c,d)}(\theta, t)] \right) \times \left( 1 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial f_{(c,d)}(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2},$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{f_{(c,d)}(\theta,t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi,$$

$$\int_0^\pi \int_0^{f_{(c,d)}(\theta,t)} \mathbf{r} r^2 \sin \theta dr d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{n}_{(c,d)}, \nabla \Phi_{(c,d)} r^2) \Big|_{r=f_{(c,d)}(\theta,t)} d\theta d\varphi = -4\pi Q. \quad (3)$$

Выписанную задачу будем решать, предполагая, что волновое искажение равновесной поверхности капли  $\xi_{(c,d)}(\theta, t)$  мало:  $|\xi_{(c,d)}(\theta, t)| \ll \min |r_{(c,d)}(\theta, t)|$  и, как следствие, мала скорость течения жидкости, вызванного колебаниями поверхности, поэтому будем полагать, что  $|\psi_{(c,d)}(r, \theta, t)| \sim |\xi_{(c,d)}(\theta, t)|$ . Рассмотрим ограничим нулевым и первым порядками малости по амплитуде  $\xi_{(c,d)}(\theta, t)$ , представляя искомые величины в виде суммы компонент указанных порядков:

$$\Phi_{(c,d)} = \Phi_{(c,d)}^{(0)} + \Phi_{(c,d)}^{(1)}, \quad P_{E(c,d)} = P_{E(c,d)}^{(0)} + P_{E(c,d)}^{(1)},$$

$$P_{\sigma(c,d)} = P_{\sigma(c,d)}^{(0)} + P_{\sigma(c,d)}^{(1)}, \quad P_{(c,d)} = P_{(c,d)}^{(0)} + P_{(c,d)}^{(1)}.$$

Проводя процедуру линеаризации стандартными методами, получим задачу нулевого порядка для определения равновесной формы поверхности капли и задачу первого порядка для анализа ее устойчивости.

### Решение задачи нулевого порядка

Будем полагать, что электрическое поле в окрестности капли слабонеоднородно, что правомерно, если расстояние от центра масс капли до точечного заряда или диполя много больше ее радиуса. В безразмерных переменных это соотношение имеет вид  $L^{-1} \ll 1$ . Величина  $(1/L)$  будет являться малым параметром.

В сферических координатах форму поверхности капли будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра

$$r_{(c,d)}(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n(c,d)} P_n(\mu). \quad (4)$$

Подставляя (4) в условия неизменности объема и неподвижности центра масс, получим приближенные выражения для коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$  соответственно:

$$a_{0(c,d)} = 1 + O\left(\frac{a_{n(c,d)}^2}{a_{0(c,d)}^2}\right) \approx 1,$$

$$a_{1(c,d)} = 0 + O\left(\frac{a_{n(c,d)}^2}{a_{0(c,d)}^2}\right) \approx 0. \quad (5)$$

С учетом выражений для коэффициентов (5) форма равновесной поверхности  $r_{(c,d)}(\theta)$  и выражение для нормали  $\mathbf{n}_{0(c,d)}$  к ней в линейном по  $a_{n(c,d)}$  приближении будут иметь вид

$$r_{(c,d)}(\theta) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n(c,d)} P_n(\mu),$$

$$\mathbf{n}_{0(c,d)} = \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=2}^{\infty} a_{n(c,d)} P_n(\mu). \quad (6)$$

Решение уравнения Лапласа для электрического потенциала в сферических координатах для осесимметричного случая записывается в виде

$$\Phi_{(c,d)}^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n(c,d)} r^n + B_{n(c,d)} r^{-(n+1)}) P_n(\mu).$$

Пользуясь предположением о слабой неоднородности поля и полагая, что даже на больших расстояниях от поверхности капли ( $r \gg 1$ ) значение параметра  $r/L$  остается малым  $r/L \ll 1$ , разложим условие асимптотического ( $r \gg 1$ ) поведения электрического потенциала точечного заряда до слагаемых порядка  $(r/L)^2$ , а для точечного диполя до  $(r/L)^4$  включительно:

$$r \gg 1: \quad \Phi_{(c)}^{(0)} \simeq \frac{q}{L} \left( 1 - \frac{r}{L} P_1(\mu) + \frac{r^2}{L^2} P_2(\mu) \right),$$

$$\Phi_{(d)}^{(0)} \simeq \frac{p}{L^2} \left( 1 - 2 \frac{r}{L} P_1(\mu) + 3 \frac{r^2}{L^2} P_2(\mu) - 4 \frac{r^3}{L^3} P_3(\mu) + 5 \frac{r^4}{L^4} P_4(\mu) \right). \quad (7)$$

Это связано с тем, что для того, чтобы приближенное выражение для потенциала соответствовало точному с погрешностью в 5% на одинаковом расстоянии от центра масс капли, в разложении для потенциала диполя приходится учитывать больше слагаемых, нежели в разложении для потенциала точечного заряда.

Подставляя решения для  $\Phi_{(c,d)}^{(0)}$  в левые части условий (7), а также в условия эквипотенциальности поверхности капли, определим константы  $A_{n(c,d)}$  и  $B_{n(c,d)}$ ; из условия незаряженности капли (3) получим значения потенциалов на поверхности капли. В результате выражения для электрических потенциалов  $\Phi_{(c,d)}^{(0)}$  в окрестности равновесной капли примут вид

$$\Phi_{(c)}^{(0)} = \frac{Q}{r} + \frac{q}{L} + \frac{q}{L^2} \left( \frac{1}{r^2} - r \right) P_1(\mu) + \frac{q}{L^3} \left( r^2 - \frac{1}{r^3} \right) P_2(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} Q a_{n(c)} r^{-(n+1)} P_n(\mu),$$

$$\begin{aligned}\Phi_{(d)}^{(0)} &= \frac{Q}{r} + \frac{p}{L^2} + \frac{2p}{L^3} \left( \frac{1}{r^2} - r \right) P_1(\mu) \\ &+ \frac{3p}{L^4} \left( r^2 - \frac{1}{r^3} \right) P_2(\mu) + \frac{4p}{L^5} \left( \frac{1}{r^4} - r^3 \right) P_3(\mu) \\ &+ \frac{5p}{L^6} \left( r^4 - \frac{1}{r^5} \right) P_4(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} Q a_{n(d)} r^{-(n+1)} P_n(\mu).\end{aligned}\quad (8)$$

Используя явный вид потенциалов  $\Phi_{(c,d)}^{(0)}$ , рассчитаем давление электрического поля на поверхность капли  $P_{E(c,d)}^{(0)}$ , ограничивая рассмотрение слагаемыми до  $\left(\frac{q}{L^2}\right)^2 \frac{1}{L}$  для поля точечного заряда и слагаемыми до  $\left(\frac{p}{L^3}\right)^2 \frac{1}{L^3}$  для поля точечного диполя включительно. Здесь  $\frac{q}{L^2}$  и  $\frac{p}{L^3}$  являются характерными величинами напряженности внешнего поля в окрестности капли. Данные ограничения обусловлены переходом от точных выражений потенциалов к приближенным и учетом конечного числа слагаемых в разложениях (7), т.е. для того, чтобы учесть большее число слагаемых в давлениях, необходимо учесть дополнительные слагаемые в потенциалах. В результате получим

$$\begin{aligned}P_{E(c)}^{(0)} &= \frac{Q^2}{8\pi} + \frac{Q}{4\pi} \frac{q}{L^2} \left( 3P_1(\mu) - \frac{5}{L} P_2(\mu) \right) \\ &+ \frac{q^2}{4\pi L^4} \left( \frac{3}{2} - \frac{6}{L} P_1(\mu) + 3P_2(\mu) - \frac{9}{L} P_3(\mu) \right) \\ &+ \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n(c)} P_n(\mu),\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}P_{E(d)}^{(0)} &= \frac{Q^2}{8\pi} + \frac{Q}{4\pi} \frac{p}{L^3} \left( 6P_1(\mu) - \frac{15}{L} P_2(\mu) + \frac{28}{L^2} P_3(\mu) \right. \\ &- \left. \frac{45}{L^3} P_4(\mu) \right) + \frac{p^2}{4L^6\pi} \left( 6 + \frac{45}{2L^2} - 36 \left( \frac{1}{L} + \frac{3}{L^3} \right) P_1(\mu) \right. \\ &+ \left. \frac{3}{7} \left( 28 + \frac{243}{L^2} \right) P_2(\mu) - \frac{1}{2} \left( \frac{27}{L} + \frac{116}{L^3} \right) P_3(\mu) \right. \\ &+ \left. \frac{1077}{7L^2} P_4(\mu) - \frac{350}{L^3} P_5(\mu) \right) + \frac{Q^2}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n(d)} P_n(\mu).\end{aligned}$$

Лапласовское давление  $P_{\sigma(c,d)}^{(0)}$  с учетом формы равновесной поверхности (6) примет вид

$$P_{\sigma(c,d)}^{(0)} = \left[ 2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n(c,d)} (n-1)(n+2) P_n(\mu) \right]. \quad (10)$$

Выпишем баланс давлений на равновесной поверхности капли

$$\begin{aligned}P_0^{(0)} + P_{in(c,d)}^{(0)} - P_{atm}^{(0)} \\ - \left[ 2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n(c,d)} (n-1)(n+2) P_n(\mu) \right] = -P_{E(c,d)}^{(0)}.\end{aligned}$$

При рассмотрении заряженной капли во внешнем электрическом поле необходимо учитывать силу инерции, не влияющую на форму поверхности капли и возникающую за счет ускоренного движения центра масс капли. Так как реальное распределение давления силы инерции по поверхности капли рассчитать сложно, для его определения будем исходить из следующих соображений. Введем параметр  $e \equiv \left( \frac{a_{n(c,d)}(\theta)}{a_{0(c,d)}(\theta)} \right)^{1/2}$ , где  $n \geq 2$ , который будем считать малым, ограничиваясь рассмотрением небольших отклонений равновесной формы капли от сферической. Так как собственный заряд капли, распределенный по ее поверхности, в отсутствие внешнего электрического поля не меняет ее сферическую форму, то примем, что  $Q \sim e^0$ . Внешнее электрическое поле искажает равновесную форму капли, вследствие действия на ее поверхность электростатического давления, поэтому характерная величина напряженности внешнего поля  $\sim e^1$ , т.е. для точечных заряда и диполя получаем оценку  $\frac{q}{L^2} \sim \frac{p}{L^3} \sim e^1$ . Таким образом, в балансе давлений возникают слагаемые порядков  $e^0, e^1$  и  $e^2$ . Слагаемые порядка  $e^1$  содержатся только в давлении силы инерции и электрическом давлении и должны взаимно компенсировать друг друга. При рассмотрении в балансе давлений слагаемых порядка  $e^2$  давление силы инерции гасит компоненту электрического давления, пропорциональную  $P_1(\mu)$  и отвечающую за смещение центра масс капли. Исходя из этого, получаем выражение для давления силы инерции  $P_{in(c,d)}^{(0)}$ :

$$\begin{aligned}P_{in(c)}^{(0)} &= \frac{Q}{4\pi} \frac{q}{L^2} \left( -3P_1(\mu) + \frac{1}{L} 5P_2(\mu) \right) \\ &+ \frac{3}{2\pi} \left( \frac{q}{L^2} \right)^2 \frac{1}{L} P_1(\mu),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{in(d)}^{(0)} &= \frac{Q}{4\pi} \frac{p}{L^3} \left( -6P_1(\mu) + \frac{1}{L} 15P_2(\mu) + \frac{1}{L^2} 28P_3(\mu) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{L^3} 45P_4(\mu) \right) + \frac{9}{\pi} \left( \frac{p}{L^3} \right)^2 \frac{1}{L} \left( 1 + \frac{3}{L^2} \right) P_1(\mu).\end{aligned}$$

Пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра  $P_n(\mu)$ , в оставшихся составляющих баланса давлений приравняем коэффициенты при полиномах одинакового порядка и получим выражения для гидростатического давления и коэффициентов  $a_{n(c,d)}$ :

$$P_{0(c)}^{(0)} = 2\sigma + P_{atm} - 6w_{(c)}, \quad (11)$$

$$P_{0(d)}^{(0)} = 2\sigma + P_{atm} - \frac{3(15 + 4L^2)w_{(c)}}{2L^2},$$

$$a_{2(c)} = \frac{3w_{(c)}}{1-W}, \quad a_{3(c)} = -\frac{18}{5} \frac{w_{(c)}}{(1-4W/5)L},$$

$$a_{n(c)} = 0, \quad n \geq 4,$$

$$a_{2(d)} = \frac{3w_{(d)}}{(1-W)} \left( 1 + \frac{243}{28L^2} \right),$$

$$a_{3(d)} = -\frac{1}{5} \frac{w_{(d)}}{(1-4W/5)} \left( \frac{27}{L} + \frac{116}{L^3} \right),$$

$$a_{4(d)} = \frac{359}{42} \frac{w_{(d)}}{(1-2W/3)} \frac{1}{L^2},$$

$$a_{5(d)} = -\frac{25}{2} \frac{w_{(d)}}{(1-4W/7)} \frac{1}{L^3},$$

$$a_{n(d)} = 0, \quad n \geq 6,$$

$$W = \frac{Q^2}{16\pi}, \quad w_{(c)} = \frac{q^2}{16\pi L^4}, \quad w_{(d)} = \frac{p^2}{4\pi L^6},$$

где параметр  $w_{(c,d)}$  характеризует величину внешнего электрического поля (точечного заряда или диполя) в окрестности капли, а  $W$  — величину собственного заряда на капле.

С учетом выражений для коэффициентов запишем форму равновесной поверхности капли в поле точечного заряда и диполя

$$r_{(c)}(\theta) = 1 + \frac{3w_{(c)}}{1-W} P_2(\mu) - \left( \frac{18}{5L} \right) \frac{w_{(c)}}{1-4W/5} P_3(\mu),$$

$$r_{(d)}(\theta) = 1 + \frac{3w_{(d)}}{(1-W)} \left( 1 + \frac{243}{28L^2} \right) P_2(\mu) - \frac{1}{5} \frac{w_{(d)}}{(1-4W/5)} \left( \frac{27}{L} + \frac{116}{L^3} \right) P_3(\mu) + \frac{359}{42} \frac{w_{(d)}}{(1-2W/3)} \frac{1}{L^2} P_4(\mu) - \frac{25}{2} \frac{w_{(d)}}{(1-4W/7)} \frac{1}{L^3} P_5(\mu). \quad (12)$$

Как показывают расчеты, амплитуда сфероидального ( $\sim P_2(\mu)$ ) и грушевидного  $\sim P_3(\mu)$  искажений поверхности капли в поле точечного заряда мала (см. [10]). С увеличением заряда на капле искажение и асимметрия формы увеличиваются. Для случая поля точечного диполя с ростом его величины асимметрия и искажение изменяются аналогично, но принимают несколько большие значения в сравнении с полем точечного заряда. С ростом степени неоднородности электрического поля форма становится менее симметричной [10].

### Устойчивость равновесной формы

Задача первого порядка малости имеет вид

$$\Delta\Phi_{(c,d)}^{(1)} = 0, \quad \Delta\psi_{(c,d)} = 0,$$

$$P_{(c,d)}^{(1)} = F_{in(c,d)} \xi_{(c,d)}(\theta, t) \mu - \frac{\partial\psi_{(c,d)}(r, \theta, t)}{\partial t}, \quad (13)$$

$$|\nabla\psi_{(c,d)}| \Big|_{r=0} < \infty, \quad \Phi_{(c,d)}^{(1)} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0,$$

с граничными условиями на поверхности: динамическим, кинематическим и условием эквипотенциальности

$$r = r_{(c,d)}(\theta) : \quad P_{(c,d)}^{(1)} + P_{E(c,d)}^{(1)} = P_{\sigma(c,d)}^{(1)},$$

$$-\frac{\partial\xi_{(c,d)}(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi_{(c,d)}(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\partial\psi_{(c,d)}(r, \theta, t)}{\partial\theta} \frac{\partial r_{(c,d)}(\theta)}{\partial\theta} = 0,$$

$$\Phi_{(c,d)}^{(1)} + \frac{\partial\Phi_{(c,d)}^{(0)}}{\partial r} \xi_{(c,d)}(\theta, t) = \text{const.}$$

Поправки первого порядка малости к давлениям электрического поля и капиллярных сил имеют вид

$$P_{E(c,d)}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{(\nabla\Phi_{(c,d)}^{(0)})^2}{8\pi} \right) \xi_{(c,d)}(\theta, t) + \frac{(\nabla\Phi_{(c,d)}^{(0)} \nabla\Phi_{(c,d)}^{(1)})}{4\pi},$$

$$P_{\sigma(c,d)}^{(1)} = [-2\xi_{(c,d)}(\theta, t) - \Delta\theta\xi_{(c,d)}(\theta, t)] - 2 \frac{\partial r_{(c,d)}(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\xi_{(c,d)}(\theta, t)}{\partial\theta} + 2(r_{(c,d)}(\theta) - 1) [\Delta\theta\xi_{(c,d)}(\theta, t)] + 2\xi_{(c,d)}(\theta, t) [\Delta\theta r_{(c,d)}(\theta)],$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right).$$

Интегральные условия: несжимаемости жидкости, неподвижности центра масс и сохранения заряда капли имеют вид

$$\int_0^\pi r_{(c,d)}^2(\theta) \xi_{(c,d)}(\theta, t) \sin\theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^\pi r_{(c,d)}^3(\theta) \xi_{(c,d)}(\theta, t) \cos\theta \sin\theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^\pi \left[ \frac{\partial\Phi_{(c,d)}^{(0)}}{\partial r} 2\xi_{(c,d)}(\theta, t) + (2r_{(c,d)}(\theta) - 1) \times \left( \frac{\partial^2\Phi_{(c,d)}^{(0)}}{\partial r^2} \xi_{(c,d)}(\theta, t) + \frac{\partial\Phi_{(c,d)}^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_{(c,d)}^{(0)}}{\partial\theta} \frac{\partial\xi_{(c,d)}(\theta, t)}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Phi_{(c,d)}^{(0)}}{\partial r \partial\theta} \frac{\partial r_{(c,d)}(\theta)}{\partial\theta} \xi_{(c,d)}(\theta, t) - \frac{\partial\Phi_{(c,d)}^{(1)}}{\partial\theta} \frac{\partial r_{(c,d)}(\theta)}{\partial\theta} \right) \right] \times \sin\theta d\theta = -4\pi Q.$$

Уравнение Лапласа для гидродинамического потенциала с учетом условия ограниченности скоростей в центре масс капли определяет его зависимость от пространственных координат

$$\psi_{(c,d)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{n(c,d)}(t) r^n P_n(\mu). \quad (14)$$

Возмущение  $\xi$  будем искать в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\xi_{(c,d)}(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n(c,d)}(t) P_n(\mu). \quad (15)$$

Используя кинематическое граничное условие, выразим коэффициенты разложения  $V_{n(c,d)}$  методом последовательных приближений через амплитуды  $\alpha_{n(c,d)}(t)$ . В первом приближении получим

$$V_{n(c,d)}(t) = \frac{1}{n} \left\{ \dot{\alpha}_{n(c,d)}(t) - \left[ \sum_{m=-5}^5 \dot{\alpha}_{n+m(c,d)}(t) N_{m(c,d)}(n) \right] \right\},$$

где коэффициенты  $N_{m(c,d)}(n)$  не приводятся в силу их громоздкости.

Решение уравнения Лапласа для электрического потенциала первого порядка с учетом условия убывания потенциала при  $r \gg 1$  запишем в виде

$$\Phi_{(c,d)}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n(c,d)}(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в условие эквипотенциальности, получим выражения для  $D_{n(c,d)}(t)$  через амплитуды возмущений  $\alpha_{n(c,d)}(t)$ :

$$D_{n(c)}(t) = -\frac{Qw_{(c)}}{L^2(1-W)} \left( -\frac{1}{L} 5K_S(2, n-2, n) \alpha_{n-2(c)}(t) \right.$$

$$+ 3K_S(1, n-1, n) \alpha_{n-1(c)}(t) - \frac{1}{L} 5K_S(2, n, n) \alpha_{n(c)}(t)$$

$$+ 3K_S(1, n+1, n) \alpha_{n+1(c)}(t)$$

$$\left. - \frac{1}{L} 5K_S(2, n+2, n) \alpha_{n+2(c)}(t) \right),$$

$$D_{n(d)}(t) = -\frac{Qw_{(d)}}{(1-W)} \frac{1}{L} \sum_{m=-4}^4 G_m(n) \alpha_{m+n(d)}(t),$$

$$G_{\pm 4}(n) = \frac{1}{L^2} 45K_S(4, n \pm 4, n);$$

$$G_{\pm 3}(n) = -\frac{1}{L} 28K_S(3, n \pm 3, n),$$

$$G_{\pm 2}(n) = \frac{1}{L^2} 45K_S(4, n \pm 2, n) + 15K_S(2, n \pm 2, n),$$

$$G_{\pm 1}(n) = -\frac{28}{L^2} K_S(3, n \pm 1, n) - \frac{6}{L} K_S(1, n \pm 1, n),$$

$$G_0(n) = \frac{1}{L^2} 45K_S(4, n, n) + 15K_S(2, n, n);$$

$$K_S(a, b, c) = (C_{a,0,b,0}^c)^2,$$

где  $C_{l_1, m_1 l_2, m_2}^{l, m}$  — коэффициенты Клебша–Гордана [14].

Используя (14)–(16), выражения для добавок первого порядка малости по амплитуде возмущения к давлениям

электрическим  $P_{E(c,d)}^{(1)}$ , гидродинамическим  $P_{(c,d)}^{(1)}$  и давлениям капиллярных сил  $P_{\sigma(c,d)}^{(1)}$  можно представить в виде разложений по полиномам Лежандра

$$P_{E(c)}^{(1)} = 4W \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-3}^3 (\alpha_{n+m(c)}(t) Z_{m(c)}(n)) P_n(\mu),$$

$$P_{E(d)}^{(1)} = 4W \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-5}^5 (\alpha_{n+m(d)}(t) Z_{m(d)}(n)) P_n(\mu),$$

$$P_{(c)}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-3}^3 (\ddot{\alpha}_{n+m(c)}(t) J_{m(c)}(n)) P_n(\mu),$$

$$P_{(d)}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-5}^5 (\ddot{\alpha}_{n+m(d)}(t) J_{m(d)}(n)) P_n(\mu),$$

$$P_{\sigma(c)}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=-3}^3 \alpha_{m+n(c)}(t) C_{m(c)}(n) \right) P_n(\mu),$$

$$P_{\sigma(d)}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=-5}^5 \alpha_{m+n(d)}(t) C_{m(d)}(n) \right) P_n(\mu),$$

выражения для коэффициентов  $Z_{m(c,d)}(n)$ ,  $J_{m(c,d)}(n)$ ,  $C_{m(c,d)}(n)$  не приведены в силу их громоздкости.

## Эволюционное уравнение

Используя полученные выражения для давлений  $P_{E(c,d)}^{(1)}$ ,  $P_{(c,d)}^{(1)}$  и  $P_{\sigma(c,d)}^{(1)}$ , из баланса давлений, воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра, получим систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка для нахождения амплитуд  $\alpha_{n(c,d)}(t)$ :

$$\ddot{\alpha}_{n(c,d)}(t) + \omega_{n(c,d)}^2 \alpha_{n(c,d)}(t) - \sum_{m \in M_{(c,d)}} (H_{m(c,d)}(n) \alpha_{n+m(c,d)}(t) + L_{m(c,d)}(n) \ddot{\alpha}_{n+m(c,d)}(t)) = 0, \quad (17)$$

где  $\omega_{n(c,d)}$  — собственная частота колебаний моды с номером  $n$ ,  $M_{(c,d)}$  — диапазоны связанных мод ( $M_{(c)} = [-3, -2, -1, 1, 2, 3]$ ,  $M_{(d)} = [-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5]$ ), а  $H_{m(c,d)}(n)$ ,  $L_{m(c,d)}(n)$  — численные коэффициенты, выражения для которых не приводятся из-за их громоздкости. Заметим, что индексы  $n$  амплитуд  $\alpha_{n(c,d)}(t)$  не могут быть отрицательными, поэтому будем считать  $\alpha_{n(c,d)}(t) = 0$  при  $n < 0$ .

Систему уравнений (17) будем решать для  $n \geq 2$  методом последовательных приближений. В нулевом приближении пренебрежем слагаемыми, отвечающими за взаимодействие мод:

$$\ddot{\alpha}_{n(c,d)}^0(t) + \omega_{n(c,d)}^2 \alpha_{n(c,d)}^0(t) = 0, \quad n \geq 2. \quad (18)$$

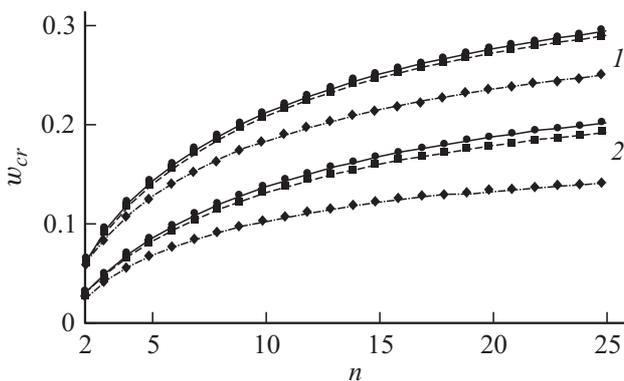
Решение гармонического уравнения (18) запишется в виде

$$\alpha_{n(c,d)}^0(t) = A_{n(c,d)}^+ \exp(i\omega_{n(c,d)}t) + A_{n(c,d)}^- \exp(-i\omega_{n(c,d)}t), \quad (19)$$

$$A_{n(c,d)}^\pm = \text{const.}$$

Из критического условия устойчивости осцилляций  $\omega_{n(c,d)cr}^2 = 0$  найдем критические значения параметров  $W$  и  $w_{(c,d)}$  для различных мод осцилляций. Соответствующие кривые в зависимости от порядкового номера моды для однородного и неоднородных полей приведены на рис. 1. Из рис. 1 видно, что критические для реализации неустойчивости значения напряженности внешнего поля (параметра  $w_{(c,d)}$ ) снижаются при увеличении заряда капли (параметра  $W$ ) и с ростом степени неоднородности поля. При больших номерах мод приведенные кривые выходят на горизонтальные асимптотики, следовательно, можно задать поле, достаточно сильное, чтобы колебания всех мод стали неустойчивыми. В этом случае временная эволюция формы поверхности капли будет определяться наложением амплитуд большого числа неустойчивых мод. С ростом заряда на капле уровень горизонтальных асимптотик снижается, и, как следствие, облегчаются условия реализации неустойчивости поверхности.

В следующем (первом) приближении преобразуем систему (17) с учетом решения нулевого приближения, для чего в слагаемые, отвечающие за взаимодействие мод, которыми пренебрегли в нулевом порядке, подставим решение (19). Ограничиваясь в расчетах первым приближением, для вычисления амплитуд  $\alpha_{n(c,d)}(t)$  по-



**Рис. 1.** Критические значения полевых параметров для однородного и неоднородных полей при  $L = 10$ ;  $W = 0.1$  — верхние три кривые, обозначенные цифрой 1 и при  $L = 10$ ;  $W = 0.4$  — нижние три кривые, обозначенные цифрой 2. Графики расположены сверху вниз, по мере увеличения неоднородности поля: сплошная линия — однородное поле, штриховая — поле точечного заряда, штрихпунктирная — поле точечного диполя.

лучим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \ddot{\alpha}_{n(c,d)}(t) + \omega_{n(c,d)}^2 \alpha_{n(c,d)}(t) \\ &= \sum_{m \in M_{(c,d)}} \left[ \left( H_{m(c,d)}(n) - \omega_{n+m(c,d)}^2 L_{m(c,d)}(n) \right) \right. \\ & \left. \times \left( A_{n+m}^+ \exp(i\omega_{n+m}t) + A_{n+m}^- \exp(-i\omega_{n+m}t) \right) \right], \quad (20) \end{aligned}$$

где  $H_{m(c,d)}(n)$ ,  $L_{m(c,d)}(n)$  — громоздкие коэффициенты, выражающиеся через коэффициенты Клебша–Гордана.

Уравнение (20) является неоднородным уравнением второго порядка. Его общее решение ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения:

$$\alpha_{n(c,d)}^{(how)}(t) = A_{n(c,d)}^+ \exp(i\omega_{n(c,d)}t) + A_{n(c,d)}^- \exp(-i\omega_{n(c,d)}t) \quad (21)$$

и частного решения неоднородного, которое представим в виде суперпозиции экспонент, аналогичных экспонентам, входящим в функцию неоднородности:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+m(c,d)}^{(inhow)}(t) &= B_{n+m(c,d)}^+ \exp(i\omega_{n+m(c,d)}t) \\ &+ B_{n+m(c,d)}^- \exp(-i\omega_{n+m(c,d)}t), \quad m \in M_{(c,d)}. \quad (22) \end{aligned}$$

Подставляя (22) в уравнение (20), определим выражения для коэффициентов  $B_{n+m}^\pm$ :

$$\begin{aligned} (m \in M_{(c,d)}) : \quad B_{n+m(c,d)}^\pm &= U_{m(c,d)}(n) A_{n+m(c,d)}^\pm, \\ U_{m(c,d)}(n) &= \frac{H_{m(c,d)}(n) - \omega_{n+m(c,d)}^2 L_{m(c,d)}(n)}{\omega_{n(c,d)}^2 - \omega_{n+m(c,d)}^2}. \quad (23) \end{aligned}$$

Отметим, что исходя из физических соображений, амплитуды колебаний должны описываться вещественными функциями, поэтому можно записать:

$$B_{n+m(c,d)}^+ = (B_{n+m(c,d)}^-)^*, \quad A_{n(c,d)}^+ = (A_{n(c,d)}^-)^*,$$

где \* обозначает комплексное сопряжение. Используя (21), (22) с учетом соотношений (23) для  $B_{n+m(c,d)}^\pm$  и представляя коэффициенты  $A_{n(c,d)}^\pm$  в виде  $A_{n(c,d)}^\pm = a_{n(c,d)} \exp(\pm i b_{n(c,d)})$ , где  $a_{n(c,d)}$  и  $b_{n(c,d)}$  — вещественные константы, запишем выражение для  $\alpha_{n(c,d)}(t)$  как суперпозицию  $\alpha_{n(c,d)}^{(how)}$  и  $\alpha_{n(c,d)}^{(inhow)}$  (t):

$$\begin{aligned} \alpha_{n(c,d)}(t) &= a_{n(c,d)} \exp(i(\omega_{n(c,d)}t + b_{n(c,d)})) \\ &+ \sum_{m \in M_{(c)}} a_{n+m(c,d)} \exp(i(\omega_{n+m(c,d)}t \\ &+ b_{n+m(c,d)})) U_{n(c,d)}(n) + c.c. \quad (24) \end{aligned}$$

Аббревиатура с.с. обозначает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. В решении (24) константы  $a_n$  и  $b_n$  определяются из начальных условий.

## Начальные условия

Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени возбуждена мода с номером  $k$ , амплитуду которой положим равной константе  $\xi$ , а скорость движения поверхности в начальный момент примем равной нулю:

$$t = 0: \quad \alpha_{n(c,d)}(t) = \xi \delta_{n,k}; \quad \dot{\alpha}_{n(c,d)}(t) = 0 \quad (n \geq 2). \quad (25)$$

Подставляя решение (24) в систему начальных условий (25), получим:

$$\begin{aligned} a_n \cos(b_n) + \sum_{m \in M(c,d)} a_{n+m(c,d)} \cos(b_{n+m(c,d)}) U_{m(c,d)}(n) \\ = \xi \delta_{n,k}, \\ a_{n(c,d)} \omega_{n(c,d)} \sin(b_{n(c,d)}) + \sum_{m \in M(c,d)} a_{n+m(c,d)} \omega_{n+m(c,d)} \\ \times \sin(b_{n+m(c,d)}) U_{m(c,d)}(n) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Систему связанных уравнений (26) будем решать методом последовательных приближений.

В нулевом приближении пренебрежем взаимодействием мод, после чего система примет вид

$$\begin{cases} a_{n(c,d)}^0 \cos(b_{n(c,d)}^0) = \xi \delta_{n,k}, \\ a_{n(c,d)}^0 \omega_{n(c,d)} \sin(b_{n(c,d)}^0) = 0, \end{cases}$$

а ее решения при  $\omega_{n(c,d)} \neq 0$  достаточно очевидны

$$\begin{cases} a_{n(c,d)}^0 = \xi \delta_{n,k}, \\ b_{n(c,d)}^0 = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (27)$$

В первом приближении запишем систему, учитывая решение (27) в слагаемых, которыми пренебрегли в нулевом приближении. При этом (26) приводится к виду

$$\begin{cases} a_{n(c,d)} \cos(b_{n(c,d)}) \\ + \sum_{m \in M(c,d)} a_{n+m(c,d)}^0 \cos(b_{n+m(c,d)}^0) U_{m(c,d)}(n) = \xi \delta_{n,k}, \\ a_{n(c,d)} \omega_{n(c,d)} \sin(b_{n(c,d)}) \\ + \sum_{m \in M(c,d)} a_{n+m(c,d)}^0 \omega_{n+m(c,d)} \sin(b_{n+m(c,d)}^0) U_{m(c,d)}(n) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Решая систему (28) для различных  $n$ , получим, что она дает нетривиальные решения для номеров мод в интервале  $k - 3 \leq n \leq k + 3$  для точечного заряда и при  $k - 5 \leq n \leq k + 5$  для случая диполя:

$$\begin{cases} a_{k(c,d)} = \xi, \\ \sin(b_{k(c,d)}) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{k+m(c,d)} = -\xi U_{m(c,d)}(k+m), \\ \sin(b_{k+m(c,d)}) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

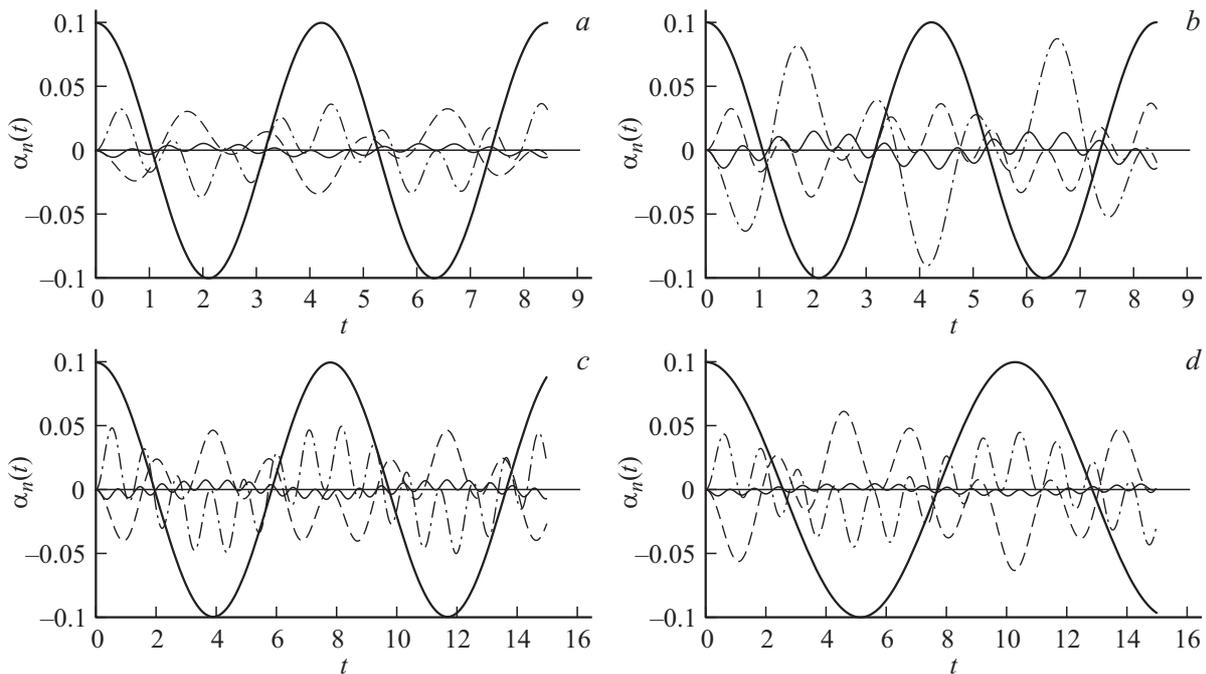
Выражение для функции, описывающей возмущение поверхности капли  $\xi_{(c,d)}(\theta, t)$  с учетом решений (29), запишется в виде

$$\begin{aligned} \xi_{(c,d)}(\theta, t) = \xi_{(c,d)} \left\{ \cos(\omega_{k(c,d)} t) P_k(\mu) \right. \\ \left. + \sum_{m \in M(c,d)} U_{m(c,d)}(k+m) (\cos(\omega_{k(c,d)} t) \right. \\ \left. - \cos(\omega_{k+m(c,d)} t)) P_{k+m}(\mu) \right\}. \end{aligned}$$

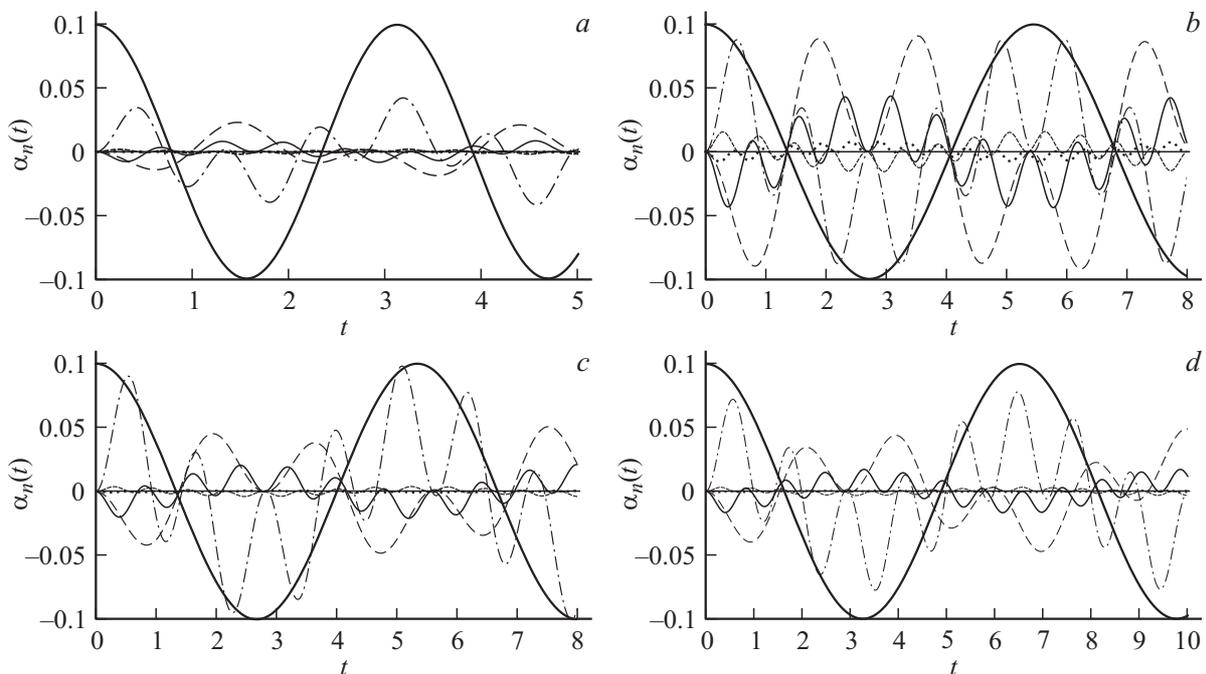
Согласно полученным выражениям амплитуд, за счет наличия в выражениях  $\cos(\omega_{k(c,d)} t)$  все присоединенные моды теряют устойчивость одновременно с потерей устойчивости изначально возбужденной модой. Наложение нарастающих амплитуд большего числа неустойчивых мод приводит к формированию более острого эмиссионного выступа на поверхности капли и уменьшению дисперсности эмитируемых с его вершины капелек.

Амплитуды мод, построенные согласно полученным решениям в случае поля точечного заряда, приведены на рис. 2. Графики построены для случая возбуждения в начальный момент времени основной второй моды ( $k = 2$ ) с амплитудой  $\xi = 0.1$  при различных зарядах капли и расстояниях до точечного заряда. На рис. 2, *a* изображены амплитуды при параметрах  $w_{(c)} = 0.03$ ,  $W = 0.2$ ,  $L = 8$ . На рис. 2, *b-d* показаны амплитуды мод при изменении одного из параметров. Так, на рис. 2, *b* изображены зависимости при меньшем расстоянии до внешнего заряда  $L = 3$ , а значит, при большей неоднородности поля. Из сравнения графиков видно, что изменение степени неоднородности поля особенно сильно влияет на ближайшие к изначально возбужденной присоединенные моды. На рис. 2, *c* амплитуды мод построены при  $w_{(c)} = 0.055$ , а на рис. 2, *d* — при  $W = 0.4$ . Несложно заметить, что увеличение как напряженности внешнего поля, так и заряда капли приводит к росту амплитуд колебаний присоединенных мод.

На рис. 3 представлены аналогичные зависимости для случая точечного диполя. Рис. 3, *a* построен при  $k = 2$ ,  $\xi = 0.1$ ,  $w_{(d)} = 0.03$ ,  $W = 0.1$ ,  $L = 10$ . Видно, что в случае поля точечного диполя возбуждается большее число присоединенных мод, амплитуды которых меньше амплитуды изначально возбужденной моды, причем амплитуды крайних присоединенных мод настолько малы, что практически сливаются с осью абсцисс. Аналогично случаю поля точечного заряда амплитуды присоединенных мод возрастают с уменьшением расстояния до источника неоднородности  $L = 3.7$  (рис. 3, *b*), с ростом напряженности внешнего поля  $w = 0.05$  (рис. 3, *c*) и заряда на поверхности капли  $W = 0.4$  (рис. 3, *d*). При этом из рис. 3, *b* видно, что рост степени неоднородности поля также заметнее сказывается на ближайших присоединенных модах.



**Рис. 2.** Зависимость от времени амплитуд мод осцилляций капли в электростатическом поле точечного заряда при изначально возбужденной второй моде ( $k = 2$ ) с начальной амплитудой  $\xi = 0.1$ . Сплошной толстой линией показана амплитуда изначально возбужденной второй моды. Амплитуды присоединенных мод показаны: штриховой — третья мода, штрихпунктирной — четвертая мода, сплошной тонкой — пятая мода;  $a - w = 0.03, W = 0.2, L = 8$ ;  $b - w = 0.04, W = 0.2, L = 3$ ;  $c - w = 0.055, W = 0.2, L = 8$ ;  $d - w = 0.04, W = 0.4, L = 8$ .



**Рис. 3.** Зависимость от времени амплитуд мод осцилляций капли в электростатическом поле точечного диполя при изначально возбужденной второй моде ( $k = 2$ ) и начальной амплитуде  $\xi = 0.1$ . Сплошной толстой линией показана амплитуда изначально возбужденной второй моды. Амплитуды присоединенных мод показаны: штриховой — третья мода, штрихпунктирной — четвертая мода, сплошной тонкой — пятая мода, толстой штриховой — шестая мода, пунктирной — седьмая мода.  $a - w = 0.03, W = 0.1, L = 10$ ;  $b - w = 0.03, W = 0.1, L = 3.7$ ;  $c - w = 0.05, W = 0.1, L = 10$ ;  $d - w = 0.03, W = 0.4, L = 10$ .

## Заключение

В однородных и неоднородных электростатических полях существует критическое значение параметра  $w$ , характеризующего напряженность поля, при величинах выше которого реализуется неустойчивость всего спектра мод осцилляций. Величина этого критического значения снижается с ростом собственного заряда капли. Во всех видах полей имеет место связанность отдельных мод осцилляций, усиливающаяся с увеличением степени неоднородности поля. Возбужденная в начальный момент времени мода  $k$  вызывает осцилляции связанных с ней мод с номерами  $k \pm 1$ ,  $k \pm 2$ ,  $k \pm 3$  (для точечного заряда) и  $k \pm 1$ ,  $k \pm 2$ ,  $k \pm 3$ ,  $k \pm 4$ ,  $k \pm 5$  (для точечного диполя). Одновременное развитие неустойчивости широкого спектра связанных мод приводит к формированию заостренного эмиссионного выступа и увеличению дисперсности эмитируемых при распаде капель.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170 и 14-08-00240.

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. //ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 9–20.
- [2] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.
- [3] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 550 с.
- [4] Zemskov A.A., Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Coll. Int. Sci. 1993. Vol. 158. P. 54–63.
- [5] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // J. Aerosol. Sci. 1994. Vol. 25. N 6. P. 1079–1091.
- [6] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Electrostat. 1995. Vol. 34. N 1. P. 51–59.
- [7] Grimm R.L., Beauchamp J.L. // J. Phys. Chem. B. 2005. Vol. 109. P. 8244–8250.
- [8] Kim O.V., Dunn P.F. // Langmuir. 2010. Vol. 26. P. 15 807–15 813.
- [9] Lord Rayleigh L. (Strutt J.W.) // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [10] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 11. С. 44–51.
- [11] Григорьев А.И., Ширяев А.А., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 5. С. 127–140.
- [12] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 5. С. 50–60.
- [13] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 1. С. 31–38.
- [14] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.