Краткие сообщения

01

Задача о вытекании вязкой жидкости из эластичной сферической емкости

© Б.П. Кондратьев [1,2,3]

[1] Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,
11991 Москва, Россия
[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
11991 Москва, Россия
[3] Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН,
196140 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: work@boris-kondratyev.ru

(Поступило в Редакцию 3 июня 2014 г.)

Поставлена и решена гидродинамическая задача о вытекании жидкости или газа через небольшое отверстие из сферической емкости с упругой оболочкой. Вытекание происходит в медленном режиме и с постоянной скоростью. Основное внимание уделяется изучению движения жидкости внутри резервуара. В системе отсчета, связанной с центром симметрии емкости, проблема сводится к внутренней задаче Неймана для уравнения Пуассона со сложными граничными условиями для давления и потенциала скоростей. Решение задачи получено через элементарные функции и гармоническую функцию, удовлетворяющую стандартному уравнению Неймана для уравнения Лапласа. Доказано существование решения в последней задаче. Установлено, что потенциал нелинейного поля скоростей и давление внутри резервуара описываются гармоническими функциями, но на поверхности вблизи отверстия эти величины имеют сингулярность.

Постановка задачи

Рассмотрим тонкую сферическую эластичную емкость, заполненную газом или однородной жидкостью. В космосе это может быть сферический резервуар, находящийся в целом в состоянии невесомости. Нас интересует процесс вытекания жидкости через небольшое отверстие в оболочке контейнера. В общих чертах механическая картина представляется следующей (рис. 1): жидкость под действием внутреннего давления начинает вытекать через отверстие наружу с постоянной (гипотеза Циолковского) скоростью v_0; вследствие этого емкость постепенно теряет массу и сокращается в объеме, а ее центр масс будет двигаться с ускорением g в обратную от направления струи сторону. Обозначим через $M(T)$ массу жидкости в контейнере на данный момент времени r, а расход вытекающей жидкости в единицу времени через $m\left(\frac{g}{s}\right)$. Тогда ускорение контейнера, согласно уравнению Мещерского [1], будет равно

$$g(t) = -\frac{mv_0}{M(t)}. \tag{1}$$

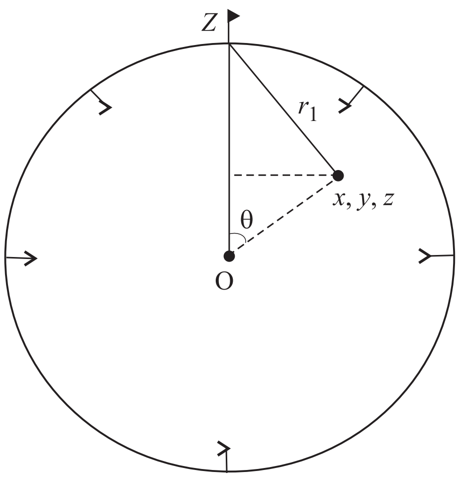

Рис. 1. Схема сферического резервуара в задаче о вытекании жидкости. Стрелками показано направление радиального сжатия сферы.

Из-за постепенного уменьшения массы ускорение $g(t)$ со временем будет понемногу возрастать, однако это не является препятствием для размещения начала системы отсчета в геометрическом центре емкости.

Итак, перейдем к системе координат, движущейся с ускорением (1). Это эквивалентно появлению силы тяжести $mv_0/M(t)$ в каждой точке емкости. При потере массы эластичная оболочка сжимается к своему центру, сохраняя сферическую форму, с радиальной скоростью b^*, определенной через расход массы m:

$$4\pi R^2 v^* \rho = m, \tag{2}$$

так что радиальная скорость изменения объема v^* будет равна

$$v^* = \frac{m}{4\pi R^2 \rho}. \tag{3}$$

При небольших скоростях вытекания жидкости в уравнениях гидродинамики можно пренебречь инерционными членами [2]. Тогда в квазистационарном режиме уравнения гидродинамики имеют вид

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta v_x=0,\\
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v_y=0,\\
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z+\frac{mv_0}{M}=0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь ν — кинематическая вязкость жидкости (размерность m^2/s), а Δ — оператор Лапласа.

Выведем некоторые математические следствия из уравнений (4). Взяв дивергенцию от трех уравнений, получим

$$-\frac{1}{\rho}\Delta p+\nu\,\mathrm{div}(\Delta\boldsymbol{\nu})=0. \tag{5}$$

Но так как

$$\mathrm{div}(\Delta\boldsymbol{\nu})=\Delta(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\nu}), \tag{6}$$

то с учетом условия неразрывности

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\nu}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{7}$$

получим из (5) уравнение Лапласа для давления

$$\Delta\rho=0. \tag{8}$$

Следовательно, внутреннее давление $p(x,y,z)$ в жидкости должно быть представлено гармонической функцией. С математической точки зрения сложенее описать давление на поверхности вблизи отверстия. По ходу решения задачи это давление будет найдено.

Решение задачи

Считая внутреннее движение жидкости безвихревым, введем потенциал скоростей

$$v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{9}$$

Подчеркнем, что поле скоростей (9) в сферической полости будет нелинейным по координатам. О противоположной, но также нетривиальной ситуации, когда возможно существование линейных полей скоростей в эллипсоидных кавернах см. [3,4]. Исходные уравнения (4) примут тогда вид

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi=0,\\
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi=0,\\
&-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\frac{\partial}{\partial z}\Delta\varphi+\frac{mv_0}{M}=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Уравнения (10) имеет первый интеграл

$$-\frac{p}{\rho}+\nu\Delta\varphi+gz=C_1=\mathrm{const}, \tag{11}$$

откуда следует основное уравнение задачи

$$\nu\Delta\varphi=C_1+\frac{p}{\rho}-gz. \tag{12}$$

Граничное условие для вытекающей жидкости в уравнении (11) имеет вид

$$v_r=\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{r=R}=-\frac{m}{4\pi R^2\rho}. \tag{13}$$

Таким образом, с учетом граничного условия (13) задача о вытекании жидкости из сферической емкости сводится к внутренней задаче Неймана для уравнения Пуассона (12) [5,6].

Напомним теперь, что давление ρ в правой части (11) следует задать в таком виде, чтобы: а) внутри сферы давление описывалось гармонической функцией, б) на поверхности сферы (но вне отверстия) давление оставалось постоянным (или равным нулю), в) в окрестности отверстия функция давления должна иметь сингулярность.

Для выполнения поставленной задачи перейдем к сферической системе координат

$$
\begin{aligned}
x&=r\sin\theta\cos\lambda,\\
y&=r\sin\theta\sin\lambda,\\
z&=r\cos\theta,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где θ — полярный угол. Условимся, что вытекание жидкости происходит по оси z. Расстояние r_1 от отверстия в оболочке (от полюса) до пробной внутренней точки (рис. 1) будет равно

$$r_1=\sqrt{x^2+y^2+(R-z)^2}=\sqrt{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}. \tag{15}$$

Легко доказать, что обратное отношение для r_1

$$f_1=\frac{1}{r_1} \tag{16}$$

являетя гармонической функцией. Гармонической является также функция

$$f_2=\frac{R-z}{r_1^3}=\frac{R-r\cos\theta}{r_1^3}. \tag{17}$$

В частности, на граничной сфере $r=R$ имеет

$$
\begin{aligned}
r_1&=R\sqrt{2(1-\cos\theta)},\\
f_1&=\frac{1}{R\sqrt{2(1-\cos\theta)}}=\frac{1}{2R\sin\frac{\theta}{2}},\\
f_2&=\frac{R(1-\cos\theta)}{R^3\sqrt{8(1-\cos\theta)^3}}=\frac{1}{4R^2\sin\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Введенные функции f_1 и f_2 необходимы для нахождения давления. С этой целью скомбинируем их, чтобы на всей граничной сфере вне дыры получился в сумме нуль, а вблизи полюса была сингулярность. Этим условиям удовлетворяет функция

$$\Phi = f_1 - 2Rf_2. \tag{19}$$

Действительно, функция Φ — гармоническая всюду внутри сферы, на границе контейнера эта функция обращается в нуль, а вблизи полюса имеет сингулярность. На полярной оси ($\theta = 0$):

$$\Phi = \frac{1}{R-z} - \frac{2R(R-z)}{(R-z)^3} = -\frac{R+z}{(R-z)^2}. \tag{20}$$

Опираясь на введенную в (19) функцию Φ, давление с указанными выше свойствами можно задать в виде $p = Cp_0\Phi$ (p_0 — давление в центре, $C = -R$). Таким образом,

$$p = Rp_0\left[\frac{2R(R-r\cos\theta)}{r_1^3} - \frac{1}{r_1}\right]. \tag{21}$$

Формулоа (21) представляет давление в любой точке жидкости, кроме самой дыры и ее ближайшей окрестности.

Для интегрирования основного уравнения задачи подставим теперь p из (21) в правую часть уравнения (12). Лапласиан в нашем случае равен [7]

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{\theta}\right), \tag{22}$$

и можно доказать следующие вспомогательные соотношения:

$$\Delta r_1 = \frac{2}{r}, \quad \Delta\frac{R-r\cos\theta}{r_1} = -\frac{2(R-r\cos\theta)}{r_1^3}. \tag{23}$$

Таким образом, давление в жидкости можно представить в виде лапласиана от комбинации известных нам функций

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{Rp_0}{\rho}\Delta\left[\frac{R(R-z)}{r_1} + \frac{r_1}{2}\right]. \tag{24}$$

Подставляя теперь (24) в (12) и интегрируя, находим потенциал скоростей в виде

$$\nu\varphi = -R\frac{p_0}{\rho}\left(\frac{r_1}{2} + \frac{R(R-z)}{r_1}\right) - \frac{gz^3}{6} + \frac{C_1r^2}{6} + \psi(r,\theta), \tag{25}$$

где $\psi(r,\theta)$ — новая искомая функция.

Для нахождения вспомогательной функции ψ используем граничное условие задачи (13), которое с учетом (25) дает уравнение

$$\nu\frac{d\varphi}{dr}\bigg|_{r=R} = -\frac{m\nu}{4\pi R^2\rho} = \frac{Rp_0}{\rho}\frac{\cos\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{g}{2}R^2\cos^3\theta + \frac{C_1R}{3} + \frac{\partial\psi}{\partial r}\bigg|_{r=R}. \tag{26}$$

Из (26) следует, что в функцию ψ должна входить как гармоническая функция $\psi_1(\theta, r)$, так и сингулярная (в окрестности полюса) функция f_3:

$$\psi = \psi_1 - R^2\frac{p_0}{\rho}f_3. \tag{27}$$

В качестве f_3 возьмем сингулярную в полюсе функцию

$$f_3 = \cos\theta\ln(r\cos\theta - R + r_1) = \cos\theta\ln\left(r\cos\theta - R + \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}\right). \tag{28}$$

Для нее

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{\cos\theta\left(\cos\theta + \sin\frac{\theta}{2}\right)}{2R\sin\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)}, \tag{29}$$

и асимптотика при малых θ дает

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial r}\right)_{r=R} \approx \frac{1}{2R\sin\frac{\theta}{2}}. \tag{30}$$

Тогда сингулярная составляющая в (26) исчезает, и мы имеем

$$-\frac{m\nu}{4\pi R^2\rho} = -\frac{g}{2}R^2\cos^3\theta + \frac{C_1R}{3} + \frac{\partial\psi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R}. \tag{31}$$

Выразим отсюда производную неизвестной гармонической функции

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\frac{m\nu}{4\pi R^2\rho} + \frac{g}{2}R^2\cos^3\theta\frac{C_1R}{3}. \tag{32}$$

Если здесь постоянную C_1 взять в виде

$$C_1 = -\frac{3m\nu}{4\pi R^3\rho}, \tag{33}$$

то в (32) исчезнет член, не содержащий θ, и мы имеем

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{g}{2}R^2\cos^2\theta. \tag{34}$$

Таким образом, для нахождения гармонической внутри шара функции $\psi_1(\theta, r)$ мы имеем уже стандартную задачу Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta\psi_1 = 0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{g}{2}R^2\cos^2\theta. \tag{35}$$

Заметим, что, так как

$$\oint\limits_s \frac{\partial\psi_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} dS = 2\pi gR^4\int\limits_0^\pi \cos^3\theta\sin\theta d\theta = 0, \tag{36}$$

выполняется необходимое и достаточное условие существования решения в задаче (35). Решение этой задачи находится известными способами [5].

Следовательно, потенциал скоростей в контейнере с жидкостью мы получим в виде

$$\nu\varphi(r,\theta) = -R\,\frac{p_0}{\rho}\left(\frac{r_1}{2} + \frac{R(R - r\cos\theta)}{r_1}\right)$$
$$-\frac{m\nu}{8\pi R^2\rho}\,r^2 - \frac{g}{6}\,r^3\cos^3\theta + \psi_1(r,\theta)$$
$$-R^2\,\frac{p_0}{\rho}\,\cos\theta\ln\left(r\cos\theta - R + \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}\right). \quad (37)$$

Формула (37) дает решение поставленной задачи.

Мы убедились, что давление и потенциал скоростей внутри сферы описывается гармоническими функциями, но на поверхности имеют сингулярность в окрестности отверстия вытекания.

Расчет линий равного давления

Пользуясь формулой (21), можно найти линии равного давления в резервуаре. На рис. 2 показано десять изобар. Они напоминают окружности, сплюснутые по оси центр–полюс конфигурации. Причиной этой сплюснутости является реактивное ускорение резервуара за счет вытекания струи. Давление возрастает при переходе от внешних изобар к внутренним (причем давление на граничных кривых данного семейства различается в 10^3 раз). Точка с координатами (1,0) есть полюс конфигурации, в ней происходит вытекание жидкости из емкости и давление имеет сингулярность.

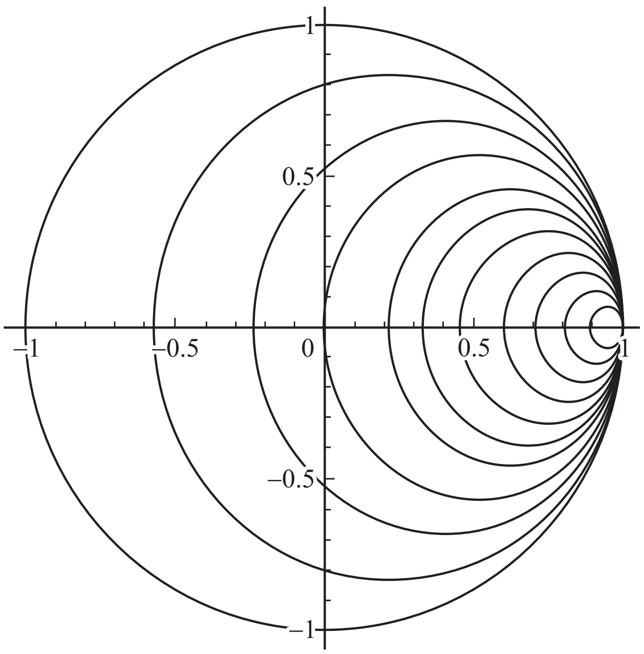

Рис. 2. Меридиональные сечения поверхностей равного давления внутри сферического резервуара. Внешний круг (штриховая линия) показывает границу резервуара, где давление имеет наименьшее значение. Показано десять изобар, напоминающие окружности, сплюснутые в горизонтальном направлении. Давление возрастает при переходе от внешних изобар к внутренним примерно в 10^3 раз.

Заключение

Поставлена и решена задача о поле скоростей при медленном вытекании однородной несжимаемой жидкости из резервуара со сферической упругой оболочкой. Своеобразие этой задачи в том, что давление хотя и является гармонической функцией внутри контейнера, но на его поверхности вблизи отверстия вытекания давление и потенциал поля скоростей должны иметь сингулярность. Подбором таких функций, которые удовлетворяют указанному поведению давления, мы удовлетворили указанному требованию. Решение задачи получено через элементарные функции и гармоническую функцию, удовлетворяющую стандартному уравнению Неймана для уравнения Лапласа. Найдены давление и потенциал нелинейного поля скоростей течений. Внутри резервуара давление и потенциал скоростей описывается гармоническими функциями координат, но вблизи отверстия эти величины имеют сингулярность.

Список литературы

[1] *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. Гостехиздат, 1952. 222 с.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М.: Наука, 1986. 736 с.
[3] *Кондратьев Б.П.* // Астрофизика. 1990. Т. 32. Вып. 1. С. 183–187.
[4] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 624 с.
[5] *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 768 с.
[6] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
[7] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.