01

Сценарий Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого перехода к хаосу в цепи с туннельным диодом

© Х.О. Ибрагимов, К.М. Алиев, Н.С. Абакарова

Институт физики им. Х.И. Амирханова Дагестанского научного центра РАН,
367003 Махачкала, Россия
e-mail: khmurat@mail.ru

(Поступило в Редакцию 16 октября 2014 г.)

Экспериментально исследованы сценарии перехода к хаотическому состоянию в цепи с туннельным диодом. Показано существование областей на плоскости управляющих параметров, в которых наблюдается чередование сценария Фейгенбаума с порядком Шарковского, а также наличие перехода к хаосу через перемежаемость.

Генератор с туннельным диодом стал классическим примером радиофизической системы с хаотической динамикой, как образец включен в учебники по теории колебаний [1] и является одной из первых радиотехнических моделей, в которой были обнаружены хаотические колебания. Использование именно туннельного диода в качестве нелинейного элемента цепи обусловлено наличием на вольт-амперной характеристике (ВАХ) участка с отрицательной дифференциальной проводимостью (ОДП). Генератор на туннельном диоде был сконструирован, исследован и описан М.И. Рабиновичем и др. [2–4]. Было показано, что в данном генераторе имеют место хаотические колебания. Экспериментально получена подробная карта динамических режимов (зон) на плоскости управляющих параметров генератора с туннельным диодом, показывающая пути возникновения хаоса и закономерности переходов между различными типами сложнопериодических колебаний при изменении управляющих параметров [5]. Переход от периодических колебаний к хаотическим внутри зон происходит по сценарию Фейгенбаума через каскад бифуркаций удвоения периода. В качестве управляющих параметров учитывались емкостная составляющая импеданса туннельного диода и фактор, определяющий инкремент нарастания колебаний в отсутствие диода [6]. Теоретические исследования генератора на туннельном диоде связаны с построением N-образной ВАХ с помощью различных функций, имеющих падающий участок. Это либо сведение к аналогии с моделью Фицхью–Нагумо [7], либо построение кусочно-линейной N-образной функции [8]. Существуют также теоретические модели, которые для описания ВАХ используют более сложную функцию вида

$$I(U) = a\,U^b\,e^{-cU} + d\,(e^{kx} - 1),$$

где a, b, c, d, k — постоянные коэффициенты, которые вычисляются из значений $I_{\max}$, $I_{\min}$, $U_{\max}$, $U_{\min}$ — реальных экспериментальных ВАХ туннельных диодов посредством решения сложных алгебраических уравнений [9].

Нами ранее было исследовано влияние внешнего гармонического и шумового сигналов на ВАХ туннельных диодов [10]. Было обнаружено наличие на участке ВАХ области с абсолютным отрицательным сопротивлением при воздействии на него внешним гармоническим сигналом в определенном диапазоне частот и амплитуд. При воздействии шумами наблюдалось качественное изменение формы ВАХ в зависимости от амплитуды и спектрального состава шумов. Увеличение амплитуды шумов приводило к исчезновению самого N-участка ОДС, и ВАХ диода приобретало вид, близкий линейному [11]. В [12] были обнаружены многозначности на ВАХ туннельных диодов под действием внешнего периодического сигнала и новый тип осцилляций.

В настоящей работе изучено поведение цепи (рис. 1), состоящей из туннельного диода (TD) и нагрузочного сопротивления (R_I), на которую подавался прямоугольный импульс (G_1) с амплитудой, превышающей порог переключения (т.е. диод находился в неустойчивом состоянии на участке с ОДП N-типа). Кроме того, в цепь был включен генератор синусоидального напряжения (G_2). В отличие от описанных выше экспериментальных и теоретических работ, в которых управляющими параметра-

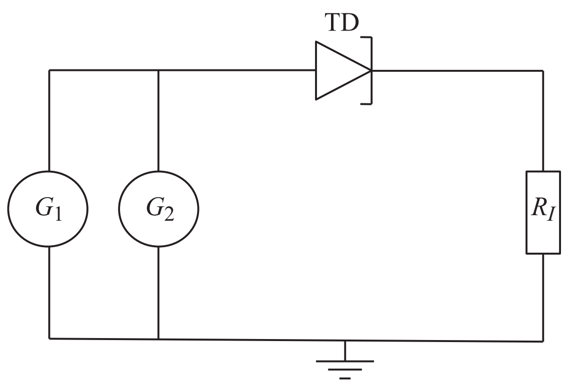

Рис. 1. Схема экспериментальной установки: G_1 — генератор прямоугольных импульсов (Agilent-81150A), G_2 — генератор сигналов специальной формы (Aktakom AWG-4151), TD — туннельный диод, R_I — нагрузочное сопротивление.

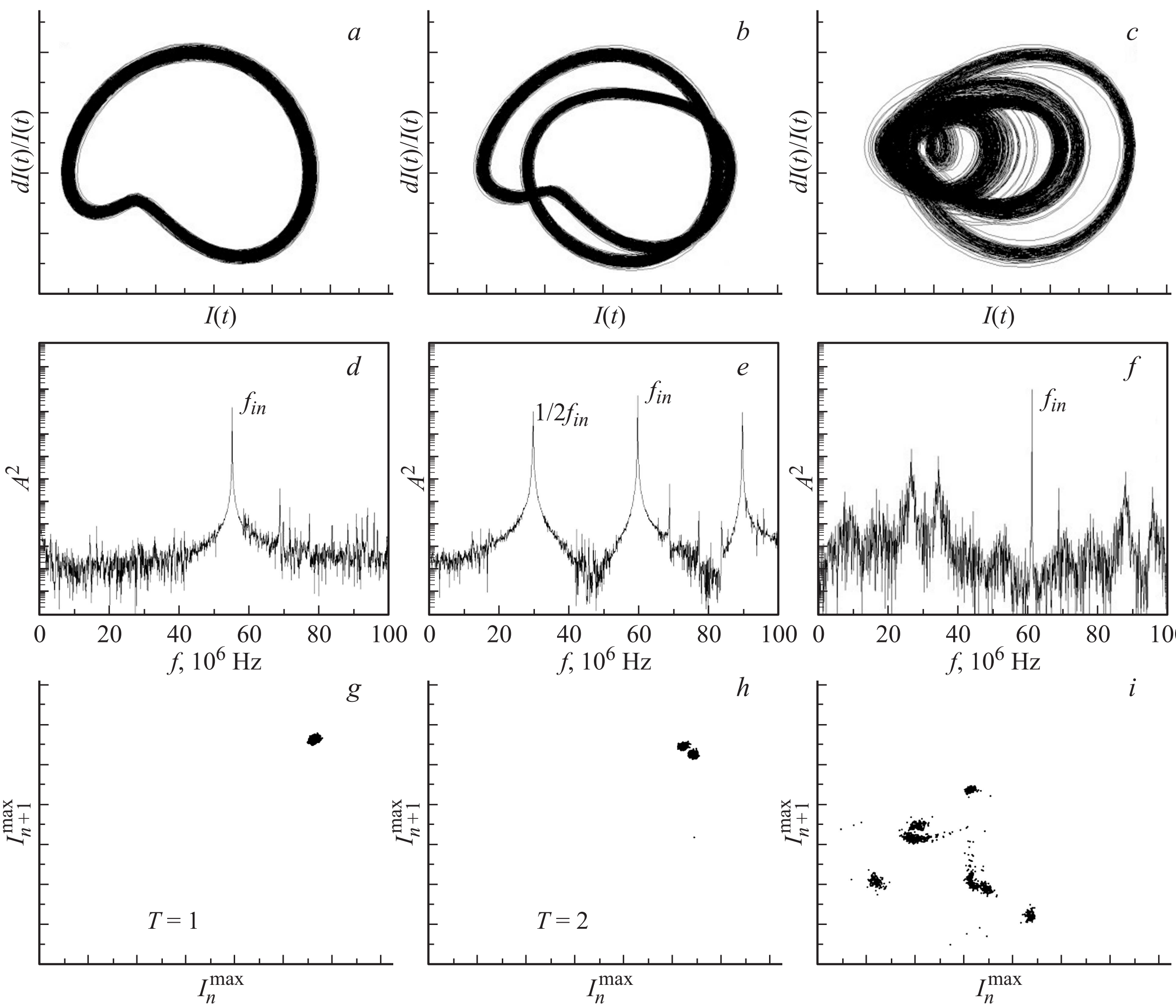

Рис. 2. Фазовые портреты (a, b, c), спектры мощности (d, e, f) и сечения Пуанкаре (g, h, i) при $f_{in} = 55.2$, 59.8 и 61.1 MHz.

ми обычно служили емкостная составляющая импеданса туннельного диода и инкремент нарастания колебаний в цепи, в нашей цепи дополнительная индуктивность и емкость отсутствовали, а в качестве управляющих параметров использованы частота и амплитуда внешнего гармонического сигнала. Во всех описанных ниже результатах амплитуда внешнего синусоидального сигнала оставалась постоянной и составляла 240 mV, изменялась только частота вводимого сигнала f_{in}. Все измерения проводились с помощью функционального генератора сигналов Agilent 81150A, который позволял с большой точностью изменять частоту сигнала и амплитуду. Результаты измерений записывались на цифровой осциллограф Tektronix MSO4034 и с помощью программы NI LabView SignalExpress Tektronix Edition передавались для последующей обработки и анализа в компьютер.

На рис. 2, a, b, c представлены фазовые портреты, построенные по колебаниям тока с нагрузочного сопротивлении при частоте внешнего синусоидального сигнала: рис. 2, a — $f_{in} = 55.2$ MHz, рис. 2, b — $f_{in} = 59.8$ MHz; рис. 2, c — $f_{in} = 61.1$ MHz. Зависимость последующего максимума от предыдущего на колебаниях тока в цепи $I_{n=1}^{\max} = f(I_n^{\max})$ является аналогом сечения Пуанкаре, поэтому мы будем называть эту зависимость сечением Пуанкаре. Под каждым из фазовых портретов на рисунке изображены соответствующие им спектры мощности и сечения Пуанкаре. По спектрам мощности видно, что при увеличении частоты внешнего гармонического сигнала происходит бифуркация удвоения периода, и в спектре мощности появляется дополнительная субгармоника с частотой $1/2f_{in}$ (рис. 2, e). Дальнейшее увеличение частоты приводило к хаотическому состоянию через последовательность бифуркаций удвоения периода. Хаотическое состояние наблюдалось при $f_{in} = 61.1$ MHz (рис. 2, c). В сплошном спектре мощности выделяется только вводимая частота. На сечении Пуанкаре (рис. 2, h) две точки соответствуют колебаниям периода $T = 2$, точки расположены близко друг к другу, так как амплитуды максимумов на этой частоте близки. При дальнейшем увеличении частоты точки разбегают-

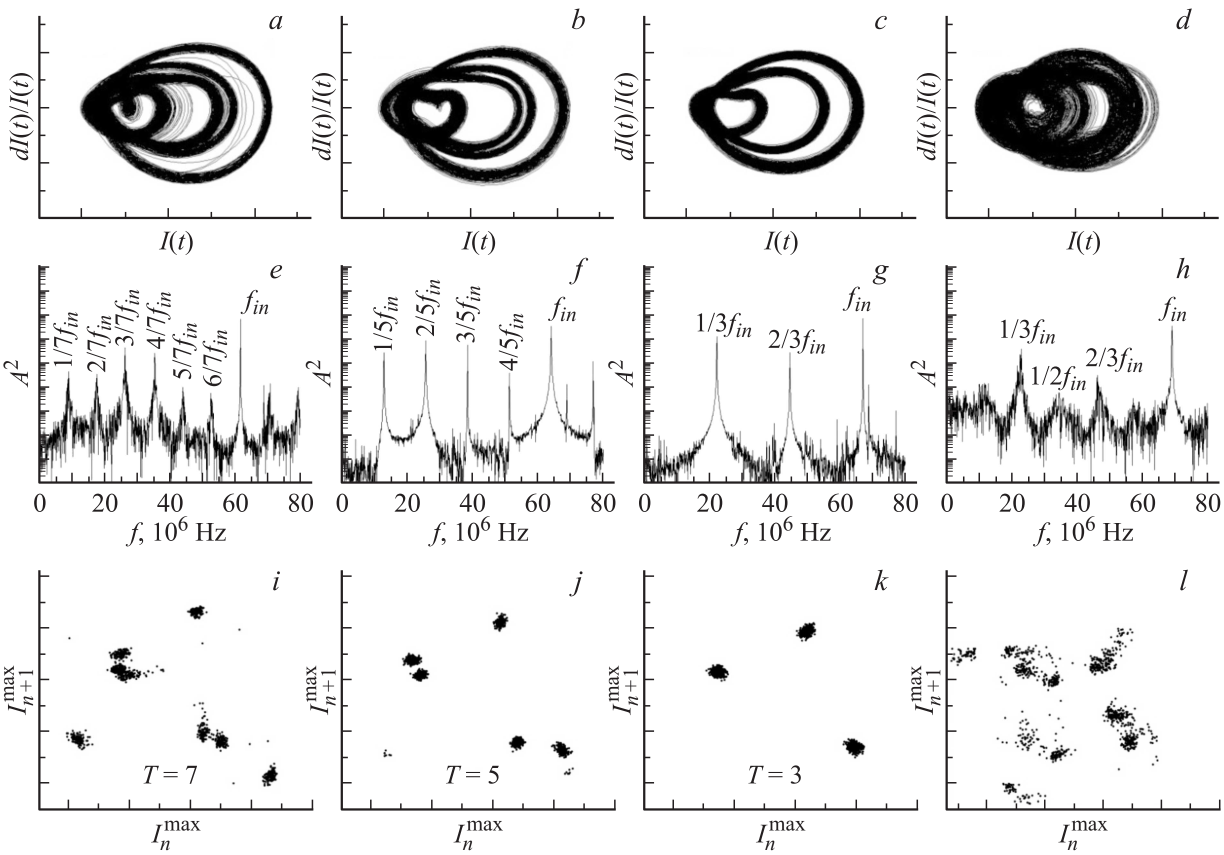

Рис. 3. Фазовые портреты (a, b, c, d), спектры мощности (e, f, g, h) и сечения Пуанкаре (i, j, k, l) при $f_{in} = 62.2$, 64.3, 65.9 и 69.2 MHz.

ся, умножаются на два (т.е. их количество становилось 4–8...), пока аттрактор не приобретает хаотический вид с соответствующим ему сечением Пуанкаре (рис. 2, i).

Увеличение частоты приводит к последующим окнам периодичности на бифуркационной диаграмме, которые сменяются хаотическими режимами. Непосредственно бифуркационную диаграмму мы не строили, но по сечениям Пуанкаре можно однозначно определить в окне с каким периодом находится система.

При частоте внешнего гармонического сигнала $f_{in} = 62.2$ MHz наблюдаются колебания с периодом $T = 7$. Фазовый портрет изображен на рис. 3, a, под ним соответствующий этим колебаниям спектр мощности и сечение Пуанкаре (рис. 3, e, i). Увеличение частоты приводит к тому, что в системе сначала появляются колебания периода $T = 5$ при $f_{in} = 64.3$ MHz (рис. 3, b, f, j), а затем колебания периода $T = 3$ при $f_{in} = 65.9$ MHz (рис. 3, c, g, k). Вся эта последовательность также заканчивается хаотическим режимом и странным аттрактором на фазовом портрете при $f_{in} = 69.2$ MHz (рис. 3, d, h). В отличие от сценария перехода к хаосу Фейгенбаума, где последовательность 1–2–4–8–... приводит к хаотическому режиму, в данном случае проявляется последовательность бифуркаций с периодами 7–5–3-хаос. На возможность такого сценария указывается в работе Н.А. Магницкого и С.В. Сидорова [13], которые на основе численных расчетов и большого иллюстративного материала предложили отличную от традиционной теорию перехода к хаосу. Было показано, что все классические автономные диссипативные нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют один общий сценарий перехода к хаосу. Система переходит к хаосу через каскады бифуркаций удвоения периода, субгармонический и затем гомоклинический каскады мягких бифуркаций устойчивых предельных циклов. Бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода — это и есть сценарий Фейгенбаума, который можно обнаружить во многих нелинейных динамических системах, демонстрирующих хаотическое поведение. Этот каскад приводит к возникновению нерегулярного аттрактора Фейгенбаума. А.Н. Шарковский показал [14], что каскад удвоений периода Фейгенбаума является начальной стадией других, более сложных каскадов бифуркаций, ведущих к возникновению более сложных хаотических аттракторов. При дальнейшем увеличении бифуркационного параметра в системе происходит рождение устойчивых предельных циклов любого периода в соответствии со сценарием, предложенным А.Н. Шарковским [14]. Им было доказано, что существует отношение, которое упорядочивает циклы по величине их

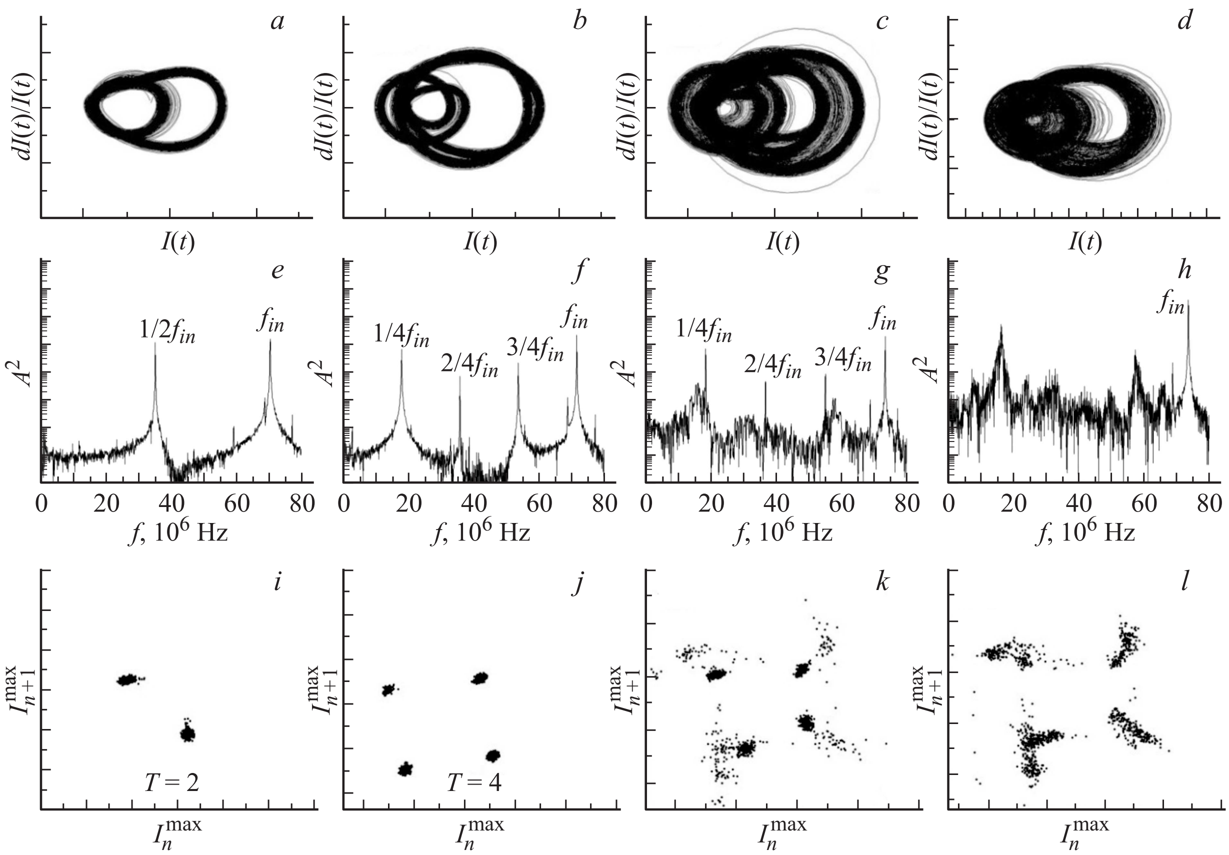

Рис. 4. Фазовые портреты (a, b, c, d), спектры мощности (e, f, g, h) и сечения Пуанкаре (i, j, k, l) при $f_{in} = 71.2$, 74.3, 74.5 и 76.32 MHz.

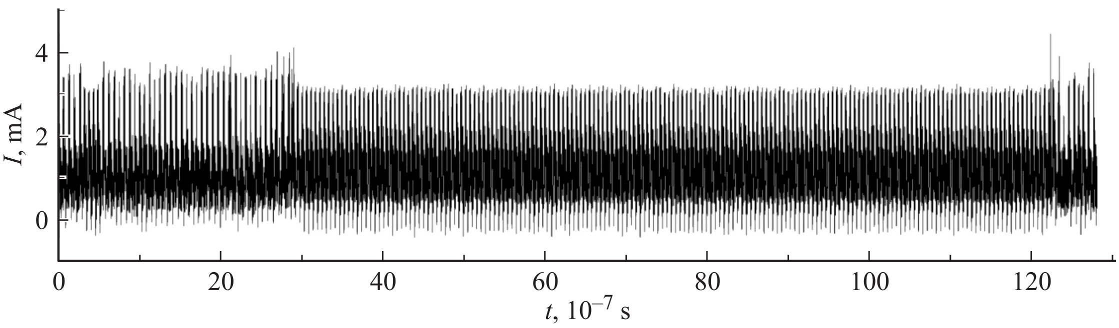

Рис. 5. Временная реализация. Режим с перемежаемостью.

периода следующим образом:

$$1 \to 2 \to 2^2 \to 2^3 \to \ldots \to 2^2 \times 7 \to$$

$$2^2 \times 5 \to 2^2 \times 3 \to \ldots \to 2 \times 7 \to$$

$$2 \times 5 \to 2 \times 3 \to \ldots \to 9 \to 7 \to 5 \to 3.$$

Первое соотношение в этом ряду означает, что если одномерное непрерывное отображение имеет цикл удвоенного периода, то оно имеет и простой цикл. Самым сложным в этом ряду является цикл периода три. Существование такого цикла означает также и существование любого цикла любого периода из этого ряда.

Кроме сценария Фейгенбаума и порядка Шарковского в наших экспериментах наблюдался также переход к хаосу через перемежаемость. На частоте $f_{in} = 71.2$ MHz система переходит в состояние с колебаниями периода $T = 2$ (рис. 4, a). Увеличение частоты до $f_{in} = 74.3$ MHz приводит к бифуркации удвоения периода, т. е. к режиму с колебаниями периода $T = 4$ (рис. 4, b) и появлению на спектре мощности субгармоник, кратных $1/4$, $2/4$, $3/4$ f_{in} (рис. 4, f). Соответственно фазовая траектория пересекает сечение Пуанкаре в четырех точках. Даль-

Количественные характеристики временных реализаций

	D_C	λ_1	λ_2	λ_3
Рис. 1, *c*	2.43	0.14	0	−0.31
Рис. 2, *d*	2.55	0.17	0	−0.31
Рис. 3, *d*	2.49	0.18	0	−0.27

нейшее увеличение частоты не приводило к следующей бифуркации удвоения периода, как это обычно происходит по сценарию Фейгенбаума. После цикла с периодом $T = 4$ на временных реализациях появляются всплески нерегулярных колебаний (рис. 4, *c*, $f_{in} = 74.5\,\mathrm{MHz}$), длительность которых растет с увеличением частоты, и на частоте $f_{in} = 76.32\,\mathrm{MHz}$ система полностью переходит в хаотический режим, о чем свидетельствуют фазовый портрет, спектр мощности и сечение Пуанкаре (рис. 4, *d*, *h*, *l*). На рис. 5 представлена временна́я реализация, соответствующая фазовому портрету на рис. 4, *e* когда начинают появляться малые всплески нерегулярных колебаний, в дальнейшем приводящие к хаосу через перемежаемость.

Для того чтобы удостовериться, является ли состояние системы хаотическим, а аттрактор странным, были рассчитаны его основные количественные характеристики — корреляционная размерность и спектр экспонент Ляпунова. Как известно, странный аттрактор имеет нецелочисленную размерность, а для систем с хаотической динамикой характерным является наличие хотя бы одной орбиты на аттракторе, для которой экспонента Ляпунова положительна, т. е. траектории на аттракторе экспоненциально расходятся. Для случаев, изображенных на рис. 2, *c*, 3, *d*, 4, *d* были произведены такие вычисления. По временным реализациям с помощью алгоритма Грассбергера–Прокаччиа [15] вычислена корреляционная размерность D_C и по алгоритму, предложенному в [16,17] — спектр экспонент Ляпунова λ_i (где $i = 1, \ldots, d$; d — размерность вложения). Все эти алгоритмы реализуются в программном пакете TISEAN 3.0.1, который находится в свободном доступе в сети Интернет [18]. Полученные результаты представлены в таблице.

При вычислении длина временной реализации составляла 64 000 точек, максимальная размерность вложения $d = 10$. Наличие нецелочисленной корреляционной размерности D_C говорит о том, что аттрактор является странным. Из таблицы также видно, что один из показателей Ляпунова для рассматриваемых случаев положительный. Следовательно, траектории в этом направлении экспоненциально расходятся, и имеет место хаотическая динамика. Кроме того, сумма всех экспонент Ляпунова отрицательна, что является основным признаком диссипативности, обозначающим затухание колебаний при отсутствии внешнего источника поступления энергии.

В работе впервые экспериментально на примере цепи с туннельным диодом показано, что переход к хаосу осуществляется в полном соответствии с универсальной бифуркационной теорией Фейгенбаума–Шарковского–Магницкого через субгармонический каскад бифуркаций устойчивых предельных циклов.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант № 12-02-96500-р-юг-а.

Список литературы

[1] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 560 с. (*Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн (2-е издание). НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“. 2000. 560 с.)

[2] *Pikovsky A.S., Rabinovich M.I.* // Physica. 1981. Vol. 2D. P. 8–24.

[3] *Рабинович М.И.* // УФН. 1978. Т. 125. С. 123–168.

[4] *Пиковский А.С.* // Известия вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23. Вып. 7. С. 883–884.

[5] *Скрипаль А.В., Усанов Д.А., Абрамов А.В.* // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. Вып. 4. С. 66–73

[6] *Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А.* // Известия вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33. Вып. 4. С. 431–434.

[7] *Heinrich M., Dahms Th., Flunkert V., Teitsworth S.W., Schöll E.* // New J. Physics. 2010. Vol. 12. P. 113 030.

[8] *Бодров М.Б.* // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9. Вып. 6. С. 147–153.

[9] *Abdomerovic I., Lozowski A.G., Aronhime P.B.* // Proc. 43rd IEEE Midwest Symposium „Circuits and Systems“. 2000. 8−11 Aug. 2000. Vol. 3. P. 1026–1028.

[10] *Алиев К.М., Камилов И.К., Ибрагимов Х.О., Абакарова Н.С.* // ФТП. 2009. Т. 43. Вып. 4. С. 517–521.

[11] *Камилов И.К., Алиев К.М., Ибрагимов Х.О., Абакарова Н.С.* // Прикладная физика. 2011. Т. 1. С. 126–129.

[12] *Aliev K.M., Kamilov I.K., Ibragimov Kh.O., Abakarova N.S.* // Sol. Stat. Commun. 2008. Vol. 148. P. 171–174.

[13] *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. УРСС. 2004. 320 с.

[14] *Шарковский А.Н.* // Укр. мат. журн. 1964. Т. 26. № 1. С. 61–71.

[15] *Grassberger P., Procaccia I.* // Physica. D. 1983. Vol. 9. P. 189.

[16] *Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J.* // Physica. D. 1993. Vol. 65. P. 117.

[17] *Sano M., Sawada Y.* // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 1082.

[18] Программа для обработки временных реализаций. http://www.mpipks-dresden.mpg.de/∼tisean/Tisean_3.0.1.