

01

## Электрическое поле в окрестности тонких проводящих стержней большой длины

© М.М. Резинкина,<sup>1</sup> О.Л. Резинкин,<sup>2</sup> Е.Е. Светличная<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт технических проблем магнетизма НАН Украины, 61106 Харьков, Украина

<sup>2</sup> Национальный технический университет „Харьковский политехнический институт“, 61102 Харьков, Украина  
e-mail: marinar2@mail.ru

(Поступило в Редакцию 10 октября 2014 г.)

Приведены результаты численного и аналитического расчетов распределений потенциалов и напряженностей электрического поля вблизи тонких проводящих стержней, которые моделируют лидерный канал молнии и молниеотводы. Рассмотрены случаи представления стержней в виде равномерно заряженной нити, электропроводного эллипсоида, на котором есть свободный заряд, а также эллипсоида или цилиндра, находящихся в равномерном внешнем электрическом поле. Рассмотрено влияние параметров проводящих стержней, моделирующих лидерный канал молнии и молниеотводы, а также содержащей пространственный заряд области, расположенной вокруг вершины лидерного канала, на распределение потенциалов и напряженностей. Показаны условия распространения встречного лидера от молниеотводов.

### Введение

При решении ряда практически важных задач необходима информация о распределении потенциалов в окрестности длинных тонких проводящих объектов типа проволок или стержней, длина которых на порядок и более превышает их диаметр, находящихся во внешнем электрическом поле (ЭП). К таким объектам относятся, в частности, продвигающийся к земле лидерный канал молнии, а также стержневые молниеотводы. При выборе средств молниезащиты требуются данные об уровнях напряженности ЭП в системах „лидер молнии–молниеотвод“.

Непосредственное измерение электрических параметров таких объектов как лидерный канал молнии представляет существенные трудности. Поэтому широкое распространение получило их математическое моделирование. При моделировании ЭП в системах, содержащих длинные тонкие стержни, возникает ряд проблем, связанных с большим различием их диаметра и длины. Чаще всего длинные разрядные каналы представляют в виде заряженной нити [1]. Возможно также использование в качестве модели таких объектов электропроводного эллипсоида, на котором есть заряд, а также электропроводного эллипсоида, находящегося в равномерном внешнем электрическом поле [2]. Наиболее близкой к реальным объектам представляется модель „цилиндр во внешнем ЭП“. Необходимо оценить, как влияет выбор модели стержня на распределение потенциалов и напряженностей ЭП. При решении практических задач молниезащиты в основном используются аналитические методы [3,4], однако применение численных методов расчета (см., например, [5]) позволяет учесть реальную форму каналов молнии и молниеотводов, характер распределения на них зарядов, наличие вблизи них иони-

зированных зон, а также влияние земли и находящихся на ней объектов на величину и характер распределения напряженности ЭП.

### Аналитическое представление ЭП лидерного канала молнии

Для оценки электрических параметров тонкого проводящего канала при решении практических задач молниезащиты, как правило, используется его замена нитью с зарядом, равномерно распределенным по его длине (см., например, [3,4]).

Распределение потенциалов в окрестности расположенной параллельно оси  $OZ$  бесконечно тонкой заряженной нити длиной  $2a$  с координатами центра  $x_0, y_0, z_0$  может быть найдено с помощью известного выражения (см., например, [1])

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0\epsilon a} \times \ln \frac{\sqrt{[(z-z_0)+a]^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)+a}}{\sqrt{[(z-z_0)+a]^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)-a}}, \quad (1)$$

где  $Q$  — заряд нити,  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится заряженная нить,  $\epsilon_0 = 0.885 \cdot 10^{-11}$  F/m.

Однако в реальных системах по длине проводящего стержня, как правило, заданным является не заряд, а потенциал. Известно, что проводимость лидерного канала молнии достаточно велика: так, в [4] отмечается, что уровень напряженности ЭП в канале лидера стремится к  $E_L = 10^4$  V/m. Таким образом, в некотором приближении лидерный канал молнии можно полагать проводящим и

использовать при описании его ЭП аналитическое решение для потенциала свободных зарядов на проводящем эллипсоиде [2].

Проведенные расчеты показали, что значения потенциалов и напряженностей ЭП в окрестности весьма длинных и тонких проводящих стержней, полученных при их представлении в виде тонкой заряженной нити (1) или проводящего эллипсоида, практически совпадают, за исключением того, что во 2-м случае наблюдается увеличение плотности заряда и напряженности ЭП на вершинах стержней.

При расчете параметров лидерного канала молнии следует учитывать, что реальному ЭП в условиях грозовой обстановки соответствует система, представляющая собой лидерный канал молнии, находящийся в близком к однородному внешнем ЭП напряженностью  $E_0$  [3] (рис. 1, а). В этом случае может быть использовано известное аналитическое решение для проводящего вытянутого эллипсоида во внешнем ЭП. Пусть эллипсоид находится в однородном ЭП напряженностью  $E_0$ ,

направленном вдоль его большей полуоси  $a$ , параллельной оси  $OZ$ , а его малые полуоси равны между собой:  $b = c$ . Преобразовав выражение для потенциала вне эллипсоида [2] для случая, когда его центр имеет координаты  $x_0, y_0, z_0$ , взяв соответствующие интегралы (см., например, [6]), окончательно получим:

$$\varphi(x, y, z) = E_0[z(1 - a_1/a_2) + z_0 a_1/a_2], \quad (2)$$

где

$$a_1 = -\frac{1}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{\xi + a^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\xi + a^2} - \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{2}{(a^2 - b^2)\sqrt{\xi + a^2}},$$

$$a_2 = -\frac{1}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{2}{(a^2 - b^2)a},$$

$$\xi = -f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - f_2},$$

$\xi > -b^2$  [2],

$$f_1 = -\frac{(a^2 - b^2) - [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]}{2},$$

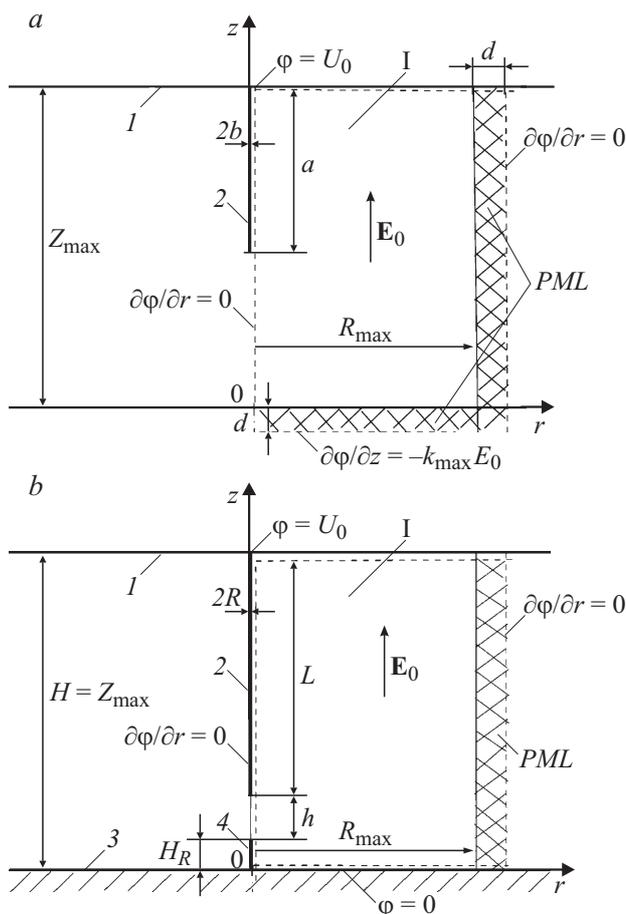
$$f_2 = a^2 b^2 - a^2[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - b^2(z - z_0)^2.$$

Расчет распределения параметров ЭП, выполненный с помощью (2), показан на рис. 2 штриховыми линиями ( $a/b = 50, E_0 = 1 \text{ V/m}$ ).

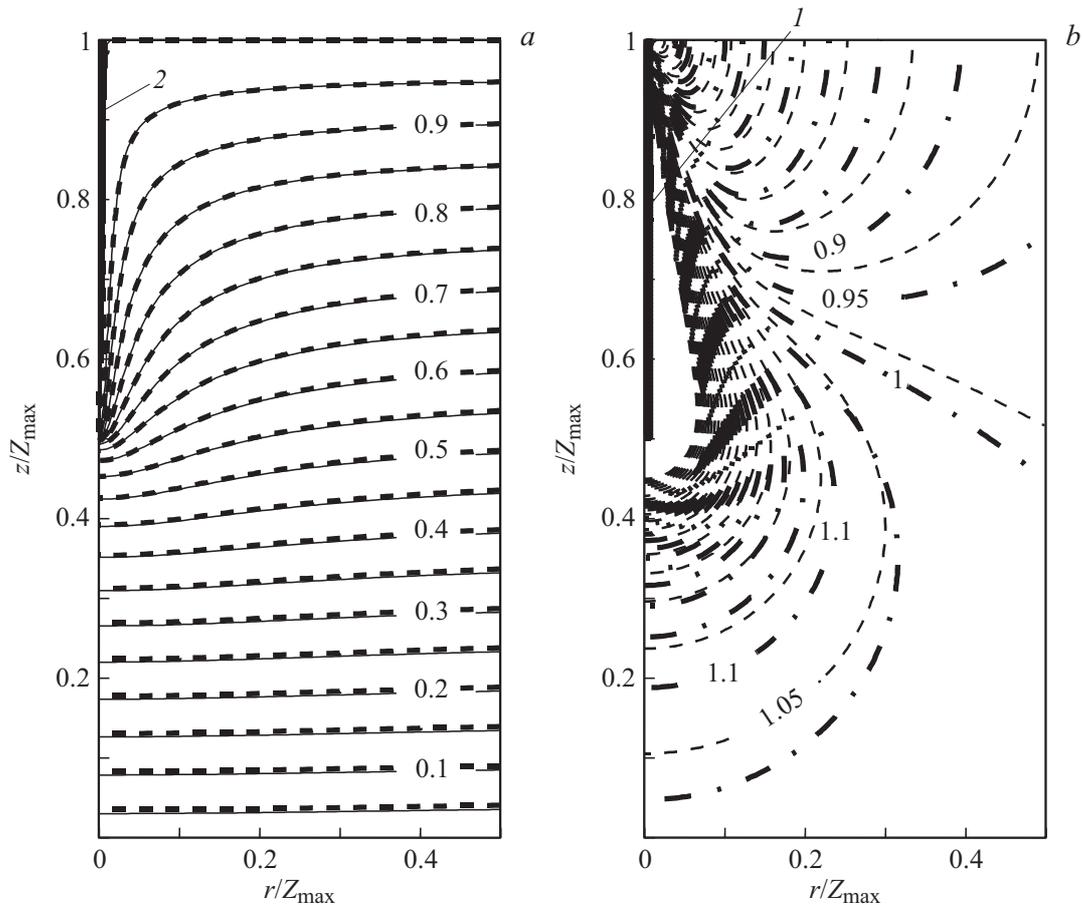
### Численный расчет ЭП тонких протяженных стержней

Как отмечалось выше, в ряде случаев для расчета ЭП в окрестности проводящих стержней необходимо использовать численные методы. Рассмотрим применение для таких расчетов метода конечных объемов (МКО) [7]. При этом расчетная область разбивается сеткой, в узлах которой определяются неизвестные величины, характеризующие параметры ЭП. Отличие МКО от обычных конечно-разностных методов заключается в том, что для получения решаемой системы используется интегрирование исходных уравнений по объемам элементарных ячеек, на которые разбита расчетная область. Одним из преимуществ такого подхода является то, что условия на границах раздела сред выполняются автоматически, что существенно упрощает вычисление электромагнитных полей в неоднородных средах.

Расчитаем распределение ЭП в окрестности лидерного канала молнии и стержневых молниеотводов в условиях предгрозовой обстановки. Поскольку лидерный канал распространяется к земле сравнительно медленно (за время порядка 0.01 с [3]), такой расчет может быть выполнен в квазистационарном приближении.



**Рис. 1.** Расчетная система: 1 — верхняя граница рассматриваемой области, 2 — лидерный канал молнии, 3 — земля, 4 — молниеотвод. I — расчетная область (отмечена штриховыми линиями). а — лидерный канал расположен далеко от земли в равномерном ЭП напряженностью  $E_0$ , б — лидерный канал приближается к земле и молниеотводу.



**Рис. 2.** Рассчитанные распределения линий равного потенциала (а) и равной напряженности ЭП (b) при  $L/R = 50$ : 1 — стержень в форме цилиндра, 2 — стержень в форме эллипсоида. — — численное решение для эллипсоида; - - - — аналитическое решение для эллипсоида, рассчитанное с помощью (2); - · - · - — численное решение для цилиндра.

Решаемое уравнение получим путем применения к уравнению Максвелла (см., например, [8])

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

где  $\mathbf{D}$  — электрическая индукция, которая выражается через напряженность ЭП  $\mathbf{E}$  и электрический потенциал  $\varphi$ :  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon_0 \epsilon \operatorname{grad} \varphi$  операции интегрирования по  $V$  — объемам элементарных ячеек, на которые разбита расчетная область, и использования теоремы Остроградского–Гаусса. Окончательно запишем

$$\int_S -\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{q_s}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

где  $S$  — поверхность, охватывающая объем  $V$ ,  $n$  — нормаль к поверхности  $S$ ,  $q_s$  — элементарный заряд, заключенный внутри поверхности  $S$ .

Система уравнений, полученная в результате записи в разностном виде уравнений вида (3) для всех узлов расчетной сетки, решалась итерационным методом переменных направлений с помощью прогонки (подробнее см. [9,10]).

Для оценки точности численного расчета была использована следующая тестовая система (рис. 1,а): проводящий эллипсоид с соотношением большой и малой полуосей  $a/b = 50$  полагался расположенным в однородном ЭП напряженностью  $E_0 = 1 \text{ V/m}$  так, что его потенциал —  $U_0 = 1 \text{ V}$ . ЭП в такой системе может быть описано аналитически с помощью (2).

Поскольку стержень обладает осевой симметрией, для численного расчета была использована цилиндрическая система координат (подробнее см. [9]). Рассматривалась половина исходной системы, такая, что ее левая граница совпадает с осью симметрии стержня, правая отстоит от оси на расстояние  $R_{\max} = a$ , верхняя граница делит большую ось эллипсоида пополам и совпадает с его горизонтальной осью симметрии, нижняя граница удалена от верхней на расстояние  $Z_{\max} = 2a$  (см. рис. 1,а). Для того чтобы учесть эллипсоидальную форму стержня, число разбиений в радиальном направлении в зоне расчетной области  $0 \leq r \leq b$  выбиралось равным 10. При этом полагалось, что проводящему эллипсоиду принадлежат те ячейки расчетной сетки, которые полностью лежат внутри его поверхности.

Для уменьшения габаритов расчетной области при нахождении распределения ЭП, на ее правой и нижней границах использованы так называемые одноосно хорошо согласованные поглощающие слои (*PML*) [11]. В таких слоях толщиной  $d$  диэлектрическая проницаемость полагается тензором, изменяющимся по глубине слоев в соответствии с полиномиальным законом, причем ее компоненты в направлениях координатных осей  $Oz$  и  $Or$  различны. Так, для *PML*-слоя, перпендикулярного оси  $Oz$ , в области  $z < 0$  (см. рис. 1, *a*) зависимости  $z$ -й —  $\varepsilon_z^{PLM}(z)$  и  $r$ -й —  $\varepsilon_r^{PLM}(z)$  компонент тензора  $\varepsilon$  от  $z$  записываются в виде [11]

$$\varepsilon_z^{PLM}(z) = \varepsilon|_{z=0} \cdot k(z), \quad \varepsilon_r^{PLM}(z) = \varepsilon|_{z=0}/k(z),$$

где  $k(z) = 1 + (k_{\max} - 1)[|z|/d]^m$ ,  $k_{\max}$  — максимальная величина  $k$  на внешней границе *PML*-слоя,  $m$  — показатель степени,  $\varepsilon|_{z=0}$  — значение  $\varepsilon$  среды, примыкающей к внутренней границе *PML*-слоя.

Выражения для компонент тензора  $\varepsilon$  в *PML*-слое, перпендикулярном оси  $Or$ , записываются аналогично. Значения компонент тензора  $\varepsilon$  в зонах пересечения *PML*-слоев перемножаются. В соответствии с рекомендациями [11] при расчетах использовались десять *PML*-слоев, имеющих параметры  $m = 3$ ,  $k_{\max} = 300 \varepsilon|_{z=0}$ .

Граничные условия в радиальном направлении были следующими: при  $r = R_{\min} = 0$  и  $r = (R_{\max} + d)$ :  $\partial\varphi/\partial r = 0$ . Для того чтобы учесть, что на нижней границе расчетной области за *PML*-слоем напряженность приложенного ЭП равна  $E_0$ , при  $z = -d$  (см. рис. 1, *a*) использовалось условие  $\partial\varphi/\partial z = -k_{\max}E_0$  (подробнее см. [10]); при  $z = Z_{\max}$  граничное условие:  $\varphi = U_0$ .

Расчитанные распределения линий равного потенциала при представлении стержня в виде вытянутого эллипсоида приведены на рис. 2, *a*: сплошные кривые соответствуют численному расчету, штриховые — аналитическому, выполненному с помощью (2). Сравнение результатов численного и аналитического расчетов значений потенциалов и модулей напряженности ЭП показало, что относительные отличия уровней  $\varphi$  и  $|\mathbf{E}|$  зависят от величины шага расчетной сетки  $\Delta$  и при  $\Delta = b$  (за исключением шага в области  $0 \leq r \leq b$ , где  $\Delta_1 = b/10$ ) не превышают 4.6%. Различие численных и аналитических результатов связано со ступенчатой аппроксимацией эллипсоида при численном решении.

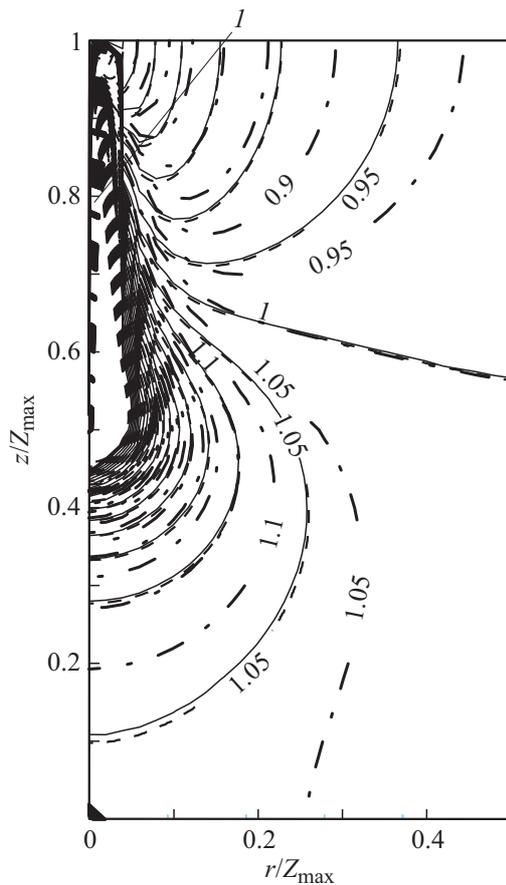
Однако каналы разрядов и стержневые молниеотводы по форме ближе не к эллипсоидам, а к цилиндрам. Можно убедиться, что даже при больших соотношениях  $a/b$  уменьшение в несколько раз поперечного сечения эллипса по мере приближения к его вершинам существенно влияет на распределение ЭП. Было проведено сравнение распределений напряженностей ЭП в описанной выше расчетной системе при использовании этих двух представлений для того чтобы оценить, насколько они отличаются друг от друга. На рис. 2, *b*

показано численное решение для линий равной напряженности ЭП  $|\mathbf{E}| = \text{const}$  в той же системе, что и для рис. 2, *a*, но при цилиндрической, а не эллипсоидальной форме стержня. Линии „штрих с точкой“ соответствуют численному решению для цилиндрического стержня, а штриховые линии — аналитическому решению для эллипсоида. Полагалось, что радиус цилиндра  $R = b$ , а его высота  $L = a$ . Расчеты показали, что при представлении стержня в виде цилиндра достаточно одного шага по пространству в зоне  $0 \leq r \leq R$ , равного радиусу цилиндра:  $\Delta_1 = R$ . Для рассматриваемых параметров стержней, когда  $L/R \geq 50$ , дополнительное разбиение области  $0 \leq r \leq R$  оказывает влияние только на распределения  $\varphi$  и  $|\mathbf{E}|$  в небольшой зоне вблизи кромки цилиндра.

Как видно из рис. 2, *b*, распределения, соответствующие представлению стержня в виде эллипсоида и в виде цилиндра, при  $L/R \sim 50$  существенно отличаются.

Для весьма длинных тонких проводящих стержней, когда соотношение  $L/R$  превышает  $10^2 - 10^3$ , использование обычного для конечно-разностных методов представления производных в виде разностей значений искомого функции в узлах расчетной сетки (кусочно-линейная аппроксимация) приводит к усложнению задачи. Это связано с тем, что для обеспечения адекватного описания ЭП требуется применение расчетной сетки, шаг которой соизмерим с радиусом стержня, что при больших значениях  $L/R$  связано с существенным увеличением количества неизвестных, а также числа итераций при их нахождении. Для решения этой проблемы может быть использован подход, аналогичный описанному в [11], когда полагается, что для тонкого бесконечно длинного стержня изменение напряженности ЭП между узлом расчетной сетки, расположенным на его поверхности, и узлом, соседним с ним в радиальном направлении, происходит не по линейному закону, а обратно пропорционально расстоянию узлов до оси стержня. В [5] данный подход был расширен применительно к стержням конечной длины. При этом полагалось, что характер спада потенциала в радиальном направлении вблизи оси стержня может быть учтен с помощью (1). Использование такого подхода позволяет производить расчет ЭП при существенно большем шаге разбиения расчетной области, определяемом не радиусом стержня, а его длиной. В качестве иллюстрации на рис. 3 представлены рассчитанные распределения линий равной напряженности  $|\mathbf{E}| = \text{const}$  в системе, аналогичной описанной выше, но для случая, когда на нижней границе расчетной области (при  $z = 0$ ) отсутствует *PML*-слой, а потенциалы расположенных на ней узлов полагаются равными нулю (см. рис. 1, *b*) — система „стержень над заземленной плоскостью“. Остальные параметры системы и граничные условия такие же, как описанные выше.

Рассмотрим цилиндрический стержень с соотношением длины к радиусу  $L/R = 1000$ . Такая система моделирует наличие проводящего разрядного канала, распространяющегося к земле. Сплошные кривые на рис. 3



**Рис. 3.** Рассчитанные распределения линий равной напряженности ЭП при представлении стержня (1) в виде цилиндра ( $L/R = 1000$ ). — — численное решение по методике [5,10] при шаге по пространству  $\Delta = L/25$ ; - - - - численное решение по обычной конечно-разностной методике при  $\Delta = L/250$ ; - · - · - численное решение по обычной конечно-разностной методике при  $\Delta = L/25$ .

соответствуют расчету, выполненному при учете логарифмического спада потенциалов вблизи оси стержня в зависимости от расстояния [5,10], шаг расчетной сетки —  $\Delta = L/25$ . На том же рисунке показаны распределения  $|E| = \text{const}$ , рассчитанные при использовании обычного для конечно-разностных методов представления производных в виде разности искомым функций в узлах расчетной сетки: кривые „штрих с точкой“ получены при том же шаге расчетной сетки; штриховые кривые — при шаге расчетной сетки  $\Delta = L/250$ . Как показали проведенные численные эксперименты, дальнейшее уменьшение  $\Delta$  не приводит к изменению значений потенциалов в зоне вокруг стержня. Во всех расчетах шаг по координате в направлении оси  $Or$  в области  $0 \leq r \leq R$  равнялся:  $\Delta_1 = R$ .

Численное решение при шаге расчетной сетки, соизмеримом с радиусом стержня, можно полагать базовым при оценке точности расчета при использовании информации о логарифмическом законе спада потенциала по радиусу в окрестности стержня с шагом  $\Delta$ , соизмери-

мым с длиной стержня. Как видно из сравнения сплошных и штриховых кривых, распределение, рассчитанное с помощью обычного конечно-разностного представления производных при весьма мелком шаге расчетной сетки, практически совпадает с распределением, полученным при использовании сетки, шаг которой в 10 раз крупнее, в том случае, когда при конечно-разностной записи уравнений учитывается информация о логарифмическом характере спада потенциалов ЭП в зоне, отстоящей от оси стержня на один шаг расчетной сетки. Как видно из рис. 3, расчет при том же шаге расчетной сетки ( $\Delta = L/25$ ) с помощью обычного конечно-разностного метода существенно отличается от базового решения данной задачи (см. сплошные кривые и кривые „штрих с точкой“ на рис. 3).

Как показывают численные эксперименты [5], при  $L/R \leq 2 \cdot 10^4$  и  $\Delta/R \leq 800$  результаты расчетов при представлении стержня в виде цилиндра и использовании информации о нелинейном спаде потенциала в направлении, перпендикулярном его оси, совпадают в пределах 3% с результатами аналитических расчетов потенциалов в окрестности проводящих стержней-эллипсоидов. При таких параметрах зависящий от длины стержня шаг пространственной сетки настолько больше его радиуса, что имеющие место различия уровней потенциалов и напряженностей вблизи оси стержня выпадают из области рассмотрения. В то же время, как показывают численные эксперименты, в зоне, более удаленной от оси, распределения ЭП, рассчитанные при представлении стержня в виде эллипса и цилиндра с указанными  $L/R$ , практически совпадают. Значит, если зона, непосредственно примыкающая к поверхности стержня, не представляет интерес для проводимого исследования, при указанных соотношениях параметров проводящих стержней их можно моделировать как с помощью цилиндра, так и с помощью эллипсоида.

### Распределение ЭП при наличии ионизированной стримерной зоны вблизи вершины лидерного канала молнии

Согласно литературным источникам [3,4], продвижение лидерного канала молнии с отрицательной полярностью происходит скачкообразно, причем в окрестности края лидера имеет место ионизированная — так называемая стримерная — зона, в которой сосредоточен объемный заряд [3]. Численные методы расчета позволяют учесть наличие такой зоны, а также оценить ее влияние на усиление напряженности ЭП в окрестности заземленных объектов при приближении лидера молнии к земле.

Известно, что усиление напряженности ЭП вблизи вершины лидерного канала молнии может вызвать развитие встречного лидера от наземных объектов [3]. Для

того чтобы определить, при каких условиях это возможно, рассчитаем распределение ЭП в системах, моделирующих продвижение лидерного канала молнии к земле. Для развития лидерных каналов необходима минимальная, назовем ее  $E_{cr}$ , напряженность ЭП. Согласно имеющимся данным, лидеры отрицательной полярности распространяются при напряженности ЭП  $E_{cr-} = 10^6$  V/m, а положительной полярности —  $E_{cr+} = 5 \cdot 10^5$  V/m [3].

Как отмечается в [3], развитие многочисленных стримеров от вершины лидерного канала молнии при его продвижении к земле приводит к тому, что стримерная зона оказывается заполненной объемным зарядом. Там же высказано предположение, что напряженность ЭП в этой зоне близка к однородной, поскольку, как следует из результатов измерений, скорость стримеров составляет порядка  $10^5$  m/s и практически не меняется по длине стримерной зоны, а такое возможно в однородном ЭП, напряженность которого близка к минимальной напряженности, при которой происходит развитие стримерных каналов ( $E_{cr}$ ). Представляя стримерную зону в виде неоднородно заряженной сферы с однородным ЭП, с помощью теоремы Гаусса можно записать выражение для плотности заряда в ней в виде [3]

$$\rho(r) = 2\varepsilon_0 E_{cr}/r, \quad (4)$$

где  $r$  — расстояние до вершины лидерного канала.

Радиус стримерной зоны  $R_{str}$  определяется из условия [3]

$$U_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_0^{R_{str}} \frac{4\pi r^2 \rho(r)}{r} dr = 2E_{cr}R_{str},$$

где  $U_L$  — потенциал вершины лидерного канала,  $\rho(r)$  — см. (4).

Тогда для отрицательно заряженного лидерного канала  $R_{str}$  имеет вид

$$R_{str} = 0.5U_L/E_{cr-}. \quad (5)$$

Известно, что при грозовой обстановке напряженность ЭП вблизи земли составляет порядка  $E_0 = 2 \cdot 10^4$  V/m [3]. Будем рассматривать молнии отрицательной полярности, наиболее характерные для всех широт, кроме экваториальных. Условием, при котором возможно развитие восходящего лидера положительной полярности от молниеотводов, является достижение в зоне продвижения лидерного канала молнии критической напряженности  $E_{cr+}$ .

Известно, что в локальных зонах, примыкающих к вершинам длинных тонких проводящих стержней, напряженность ЭП существенно (на 1–2 порядка) превышает приложенную напряженность  $E_0$ . Поэтому условие достижения на вершине молниеотвода напряженности, необходимой для начала разряда ( $E_{br} = 3 \cdot 10^6$  V/m [3]), для молниеотводов с  $L/R \geq 300$ –500 в условиях грозовой обстановки заведомо выполняется. Тогда можно

полагать, что развитие восходящего лидера от молниеотвода с такими параметрами возможно, если в зоне между его вершиной и головкой нисходящего лидерного канала существует непрерывная область (путь для стримера), в которой уровни напряженности ЭП превышают  $E_{cr+}$ :

$$|E_z|/E_{cr+} \geq 1, \quad (6)$$

где  $|E_z|$  — модули напряженности ЭП в зоне, соединяющей вершины молниеотвода и лидерного канала молнии.

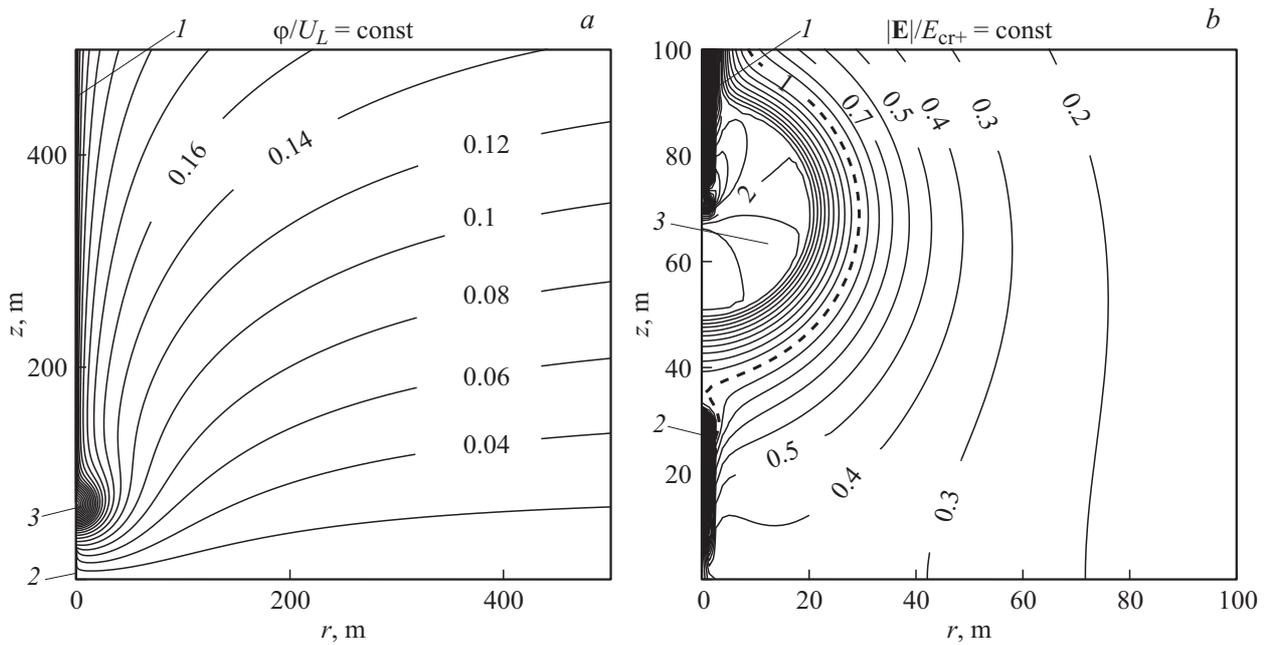
Рассмотрим пример использования описанных расчетов ЭП для оценки возможности развития встречного лидера от молниеотводов. Согласно литературным данным, радиус лидерного канала молнии  $R$  составляет порядка нескольких миллиметров [3,4], а его длина  $L$  имеет порядок  $H$  — средней высоты облаков в условиях грозовой обстановки ( $H \sim 3$ –5 km [3,12]). Поскольку  $L/R$  превышает  $10^6$ , будем использовать для расчета методику для длинных проводящих стержней, изложенную в [5,10].

Рассмотрим систему со средними параметрами молний и молниеотводов:  $E_0 = 2 \cdot 10^4$  V/m,  $H = 4000$  m, потенциал лидерного канала в области облаков  $U_0 = 80$  MV, потенциал вершины лидерного канала с учетом снижения напряжения в нем из-за наличия градиента  $E_L$  в канале:  $U_L = U_0 - E_L H = 40$  MV, расстояние от вершины лидерного канала до вершины молниеотвода  $h = 40$  m, высота молниеотвода  $H_R = 30$  m, радиус заряженной стримерной зоны  $R_{str} = 20$  m (см. (5)). Для простоты будем полагать, что лидерный канал прямой. Граничные условия, использованные при расчете, показаны на рис. 1, *b*, габариты расчетной области:  $R_{max} = 0.5H$ ,  $Z_{max} = H$ , шаг расчетной сетки  $\Delta = 1.25$  m. Результаты расчета линий равного потенциала и равной напряженности ЭП в окрестности вершины лидерного канала и молниеотвода показаны на рис. 4. Для упрощения расчетов полагалось, что радиусы лидерного канала и молниеотвода одинаковы:  $R = 0.01$  m. Как показали проведенные численные эксперименты, для описываемой расчетной системы при наличии заряженной стримерной зоны варьирование  $R$  в пределах 0.01–0.1 m не приводит к существенному изменению значений  $\phi$  и  $E$  в окрестности вершины молниеотвода.

Проведенные расчеты показали, что при описанных выше параметрах системы „лидер–молниеотвод“ условие (6) достигается, когда расстояние между вершиной лидерного канала молнии и вершиной молниеотвода меньше, чем

$$h \leq U_L/E_{cr-}. \quad (7)$$

На рис. 4, *b* жирной штриховой линией показан уровень  $|E|/E_{cr+} = 1$ . Как видно из данного рисунка, уровни  $|E|$  на всем промежутке между вершинами молниеотвода и лидерного канала молнии больше или равны  $E_{cr+}$ . Для того чтобы определить, всегда ли выполняется условие (6), были проведены численные эксперименты при других значениях параметров лидерного канала молнии. Так, рассматривался случай сравнительно



**Рис. 4.** Рассчитанные распределения линий равного потенциала (а) и равной напряженности ЭП (б) в системе, моделирующей приближение лидерного канала молнии (1) к молниеотводу (2) при наличии заряженной стримерной зоны (3).  $L/R = 4 \cdot 10^5$ ,  $R_{str} = 0.5U_L/E_{cr-} = 20$  м,  $h = 2R_{str+} = 40$  м,  $E_0 = 2 \cdot 10^4$  В/м.

большой напряженности ЭП в условиях предгрозовых обстановки:  $U_0 = 200$  МВ,  $U_L = 150$  МВ,  $R_{str} = 75$  м. Расчеты ЭП проводились также при сравнительно малых значениях напряженности ЭП:  $U_0 = 60$  МВ,  $U_L = 30$  МВ,  $R_{str} = 15$  м. Данные расчеты показали, что выполнение условия (7) достаточно для наличия области между вершинами лидерного канала и молниеотвода с  $|\mathbf{E}|/E_{cr+} \geq 1$ . Причем в данной области уровни ЭП существенно не меняются при варьировании высоты молниеотвода  $H_R$  в пределах 20–50 м.

### Заключение

1. С помощью численных и аналитических расчетов показано, что использование для описания ЭП в окрестности длинных вытянутых проводящих стержней модели „заряженная нить“ приводит к неучету усиления напряженности ЭП на вершинах стержня; использование модели „эллипсоид“ вместо „цилиндр“ не вызывает существенной погрешности только для достаточно длинных и тонких стержней (соотношения длины к радиусу  $L/R \geq 2 \cdot 10^4$ ) на расстояниях от их оси, превышающих  $0.04L$ .

2. Использование в численных расчетах информации о логарифмическом спадении потенциала в направлении, перпендикулярном оси стержня, позволяет рассчитывать распределения ЭП в окрестности весьма длинных и тонких разрядных каналов типа лидера молнии, у которых соотношения длины к радиусу превышают  $10^6$ . При этом шаг расчетной сетки может быть выбран пропорциональным длине стержня, а не его радиусу. Расчет ЭП

в окрестности таких стержней обычными разностными методами представляет существенные трудности или невозможен вообще.

3. Проведенные расчеты ЭП в окрестности молниеотвода и лидерного канала молнии с учетом наличия вокруг его вершины ионизированной неоднородно заряженной зоны показали, что условия развития восходящего положительного лидера от молниеотводов с  $L/R \geq 300-500$  выполняются при приближении лидерного канала молнии к молниеотводу на расстояние  $h \leq U_L/E_{cr-}$  (где  $U_L$  — потенциал вершины лидерного канала,  $E_{cr-} = 10^6$  В/м — напряженность ЭП, при которой распространяются лидеры отрицательной полярности).

### Список литературы

- [1] Круг К.А. Физические основы электротехники. М.-Л.: Государственное энергетическое изд-во, 1946. 472 с.
- [2] Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 539 с.
- [3] Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молнии и молниезащиты. М.: Физматлит, 2001. 319 с.
- [4] Базелян Э.М., Ражанский И.М. Искровой разряд в воздухе. Новосибирск: Наука, 1988. 165 с.
- [5] Резинкина М.М. // Электричество. 2005. № 1. С. 44–49.
- [6] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1956. 608 с.
- [7] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.

- [8] Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. 504 с.
- [9] Резинкина М.М., Недзельский О.С., Хребтов С.М. и др. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 1. С. 106–109.
- [10] Резинкина М.М. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 6. С. 85–92.
- [11] Taflov A., Hagness S. Computational electromagnetics: the finite difference time domain method. Boston—London: Artech House, 2000. 852 p.
- [12] Cooray V. Lightning Protection. London: The Institution of Engineering and Technology, 2010. 1036 p.