

01

Излучение электрона на центре рекомбинации после ионизации лазерным полем

© П.А. Головинский,^{1,2} А.А. Дробышев¹

¹ Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, 394006 Воронеж, Россия

² Московский физико-технический институт (государственный университет), 141700 Долгопрудный, Московская область, Россия
e-mail: golovinski@bk.ru

(Поступило в Редакцию 25 декабря 2014 г.)

Рассмотрена нелинейная ионизация, сопровождающаяся фоторекомбинацией электрона на близко расположенном центре. В рамках модели активного электрона и приближения Ливенштейна-Коркума получено выражение для спектра излучения. Исследована зависимость излучения от расстояния между центром ионизации и центром рекомбинации, а также от напряженности и частоты лазерного поля.

Введение

Динамике электронов и генерации гармоник, возникающих под действием фемто- и аттосекундных лазерных импульсов, посвящено значительное количество исследований [1–5]. При этом речь, в первую очередь, идет о процессах, протекающих при нелинейной ионизации единичного атома. Качественную картину фоторекомбинации на собственном атоме дает модель [6,7], в которой излучение вызывается активным электроном, вырванным из атома и движущимся в поле лазерной волны. Акт излучения связан с возвращением электрона к родительскому атому с большой энергией, где и происходит рекомбинация. Характерная частота излучаемого фотона при таком процессе пропорциональна величине пондеромоторного потенциала, который квадратичен по напряженности электрического поля лазерного излучения. Для малоцикловых импульсов [8] спектр гармоник существенно меняется, и они испытывают уширение [9–11].

В сверхатомных лазерных полях динамика электрона упрощается, и излучение электрона может быть рассчитано как результат взаимодействия расплывающегося волнового пакета с атомом [12]. Получаемый в таком приближении спектр гармоник при квазигармоническом лазерном излучении хорошо воспроизводит общий ход зависимости, характерной и для меньших полей, но меняет положение верхней границы спектра [13–15]. Это связано с отсутствием достаточно длинной по времени начальной фазы формирования волнового пакета, характерной для оптических полей умеренной интенсивности. Происходит сглаживание спектра, он становится непрерывным [16,17], что хорошо подходит для формирования импульсов аттосекундной длительности.

Одним из важных подходов к описанию генерации высоких гармоник, получившим значительное развитие, является модель, основанная на использовании короткодействующего потенциала [18], в том числе в приближении квазиэнергетических состояний [19]. Существенным достижением данного подхода является полностью

аналитическое описание генерации высоких гармоник и последовательное обоснование трехступенчатой модели этого процесса [20,21], которая ранее была сформулирована менее строго [22,23].

При генерации гармоник на более сложных многоатомных системах были выявлены существенные отличия от картины, характерной для атомарных газов. Отмечено общее повышение интенсивности [24–27] и изменение частотной зависимости [28], в том числе увеличение частоты обрезания спектра гармоник [29]. Специфической особенностью генерации гармоник, возникающих при взаимодействии ионизованного электрона с родительским атомом, является наличие в спектре только нечетных гармоник, что связано с наличием у атомов зеркальной симметрии [30], в то время как для более сложных систем, не обладающих такой симметрией, в спектре излучения присутствуют все номера гармоник.

При фоторекомбинации электронов на других близко расположенных центрах захвата излучение фотонов большой частоты приобретает новые черты. В этом случае для осуществления процесса не требуется возврат электрона к родительскому центру с большой энергией, что возможно лишь с малой вероятностью. Выявлена также, в частности, не квадратичная зависимость характерной частоты излучения от напряженности поля. В то же время этот процесс во многом близок к генерации высоких гармоник на единичном атоме. Он обусловлен формированием и распространением электронного волнового пакета, из которого происходят переходы в связанное состояние системы с излучением фотона. Основные характеристики такой динамики могут быть также выявлены в рамках модели активного электрона. Ранее в работе [31] было рассмотрено излучение электрона при ионизации квантовой системы постоянным электрическим полем или лазерным полем в низкочастотном туннельном пределе с последующей рекомбинацией на дополнительном центре. В настоящей работе решается задача о фоторекомбинации на соседнем центре, сопровождающей нелинейный отрыв элек-

трона гармоническим лазерным полем. Приведенный далее квантово-механический анализ дает количественную картину явления.

Возмущение нестационарной задачи

Для учета нестационарного возмущения стационарных гамильтонианов обычно используется представление взаимодействия [32]. Для нестационарных состояний квантовых систем в поле лазерного излучения традиционную теорию возмущений необходимо модифицировать с учетом сильного возмущения состояний внешним полем. Такой аппарат развит в общем виде для неравновесных задач статистической физики [33,34]. Полный гамильтониан системы представляет собой сумму гамильтониана $H(t)$ электрона с учетом действия сильного лазерного поля, описываемого классически, и возмущения $H_1(t)$, отвечающего за спонтанное излучение фотона. Используя формальную теорию возмущений [32,35], оператор эволюции состояний электрона во внешнем лазерном поле можно записать в виде T -экспоненты:

$$S(t, t_0) = T \exp\left(-i \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau\right), \quad (1)$$

а волновая функция электрона

$$\Phi(t) = S(t, t_0)\Phi(t_0), \quad (2)$$

где $\Phi(t_0)$ — состояние электрона в момент времени t_0 . В работе мы придерживаемся атомной системы единиц, в которой $e = m = \hbar = 1$. Уравнение Шредингера с гамильтонианом $H(t) + H_1(t)$ после перехода в представление взаимодействия принимает вид

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (S(t, t_0)^{-1} H_1(t) S(t, t_0)) \Phi, \quad (3)$$

где $H_1(t)$ — взаимодействие с оператором спонтанного излучения на частоте Ω . В первом порядке теории возмущений по взаимодействию $H_1(t)$ решение уравнения (3) можно записать в виде

$$\Phi(t) = -i \int_{t_0}^t (S(\tau, t_0)^{-1} H_1(\tau) S(\tau, t_0)) \Phi(t_0) d\tau + \Phi(t_0). \quad (4)$$

На больших временах $t \rightarrow \pm\infty$ внешнее лазерное поле отсутствует, и система находится в одном из стационарных состояний ψ_j ($j = i, f$) — начальном или конечном. Амплитуда вероятности перехода в конечное состояние

$$M_{fi}(t) = -i \int_{-\infty}^t \langle \Phi_f^*(\tau) H_1(\tau) \Phi_i(\tau) \rangle d\tau \quad (5)$$

где

$$\Phi_{i,f}(\tau) = S(\tau, t_0) \psi_{i,f}(\mp\infty). \quad (6)$$

Взаимодействие электрона с лазерным полем будем рассматривать в рамках дипольного приближения, исключая пространственные эффекты запаздывания. Гамильтониан $H(t)$ можно записать в виде

$$H(t) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{k}(t))^2 + V(\mathbf{r}), \quad (7)$$

где $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ — оператор импульса, $V(\mathbf{r})$ — суммарный потенциал центров ионизации и рекомбинации. Вектор-потенциал поля лазерного излучения $\mathbf{A}(t) = c\mathbf{k}(t)$ (c — скорость света в пустоте) связан с напряженностью электрического поля волны $\mathbf{F}(t)$ соотношением [36] $c\mathbf{F}(t) = -\partial\mathbf{A}/\partial t$. Оператор испускания фотона с частотой Ω и поляризацией \mathbf{e}_α в объеме квантования V , записанный в дипольном приближении, имеет вид [37]

$$H_1(t) = w \exp(i\Omega t), \quad w = \left(\frac{2\pi}{V\Omega}\right)^{1/2} (\mathbf{e}_\alpha \hat{\mathbf{p}}). \quad (8)$$

Воспользуемся приближением Ливенштейна–Коркума [38], которое состоит в трех допущениях, существенно упрощающих решаемую задачу. Принимается, что в исходной системе имеется только одно связанное состояние электрона. Движение электрона в континууме описывается как происходящее свободно под действием лазерного поля, но без влияния постоянного потенциального поля центров [39]. Исходное связанное состояние слабо возмущается лазерным полем, которое считается намного меньше атомного. Эти предположения являются основой успешного описания генерации высоких гармоник в атомах, и мы ими также воспользуемся. В отличие от [38] мы применяем в операторах взаимодействия электрона с электромагнитным полем калибровку скорости, а не калибровку длины. При формальной эквивалентности калибровок в исходной точной задаче это дает ряд вычислительных преимуществ в рамках модели Ливенштейна–Коркума и способствует повышению ее точности [40].

Волновую функцию электрона Φ_l в начальном и конечном состояниях ($l = i, f$) с учетом действия лазерного поля будем искать в виде суперпозиции состояний дискретного и непрерывного спектров

$$\Phi_l = \exp(-iE_l t) \left(a_l(t) |k\rangle + \int d\mathbf{p} b_{\mathbf{p}l}(t) |\mathbf{p}\rangle \right), \quad (9)$$

а $a_l(t) \approx 1$ в соответствии с выбором поля умеренной интенсивности. Подставляя (9) в уравнение Шредингера

$$i \frac{d\Phi}{dt} = H(t)\Phi \quad (10)$$

и проектируя его на состояния непрерывного спектра, получим для коэффициентов $b_{\mathbf{p}l}(t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение (в отличие от уравнения в частных производных, возникающего в [38])

$$i \dot{b}_{\mathbf{p}l}(t) = \left(\frac{(\mathbf{p} + \mathbf{k}(t))^2}{2} - E_l \right) b_{\mathbf{p}l}(t) + \mathbf{k}(t) \mathbf{d}_{\mathbf{p}l}, \quad (11)$$

где $\mathbf{d}_{\mathbf{p}l} = \langle \mathbf{p} | \hat{\mathbf{p}} | l \rangle$. Решение уравнения (11) имеет вид

$$b_{\mathbf{p}l}(t) = -i \int_{-\infty}^t \mathbf{k}(\tau) \mathbf{d}_{\mathbf{p}l} \exp\left(-i \int_{\tau}^t g_l(\tau_1) d\tau_1\right) d\tau, \quad (12)$$

где $g_l(\tau) = (\mathbf{p} + \mathbf{k}(\tau))^2/2 - E_l$. Выполнение начального условия $b_{\mathbf{p}l}(0) = 0$ обеспечивается автоматически за счет отсутствия поля до начала действия лазерного импульса: $\mathbf{k}(t) = 0$ при $t < 0$.

С учетом полученного решения, амплитуда вероятности излучения фотона (5) может быть записана в форме

$$M_{fi}(t) = -i \int_{-\infty}^t \exp(i(E_f - E_i + \Omega)\tau) B_{fi}(\tau) d\tau, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$B_{fi}(\tau) = \int d\mathbf{p} \langle f | w | \mathbf{p} \rangle b_{\mathbf{p}i}(\tau) = \left(\frac{2\pi}{V\Omega}\right)^{1/2} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{P}_{fi}(\tau) \quad (14)$$

и

$$\mathbf{P}_{fi}(\tau) = \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' b_{\mathbf{p}i}(\tau). \quad (15)$$

Считая зависимость $B_{fi}(\tau)$ известной, можно перейти к расчету наблюдаемых величин. Если поле состоит из периодических компонент, то $B_{fi}(\tau)$ можно представить в виде ряда Фурье [41]

$$B_{fi}(\tau) = \sum_n \tilde{B}_{fi}(\Omega_n) \exp(-\Omega_n \tau),$$

$$\tilde{B}_{fi}(\Omega_n) = \left(\frac{2\pi}{V\Omega}\right)^{1/2} \mathbf{e}_\alpha \tilde{\mathbf{P}}_{fi}(\Omega_n). \quad (16)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{P}}_{fi}(\Omega_n)$ — компоненты разложения в ряд Фурье вектора поляризации (15). Вероятность перехода в единицу времени

$$|M_{fi}|^2/t = 2\pi |\tilde{B}_{fi}(\Omega_n)|^2 \delta(E_f - E_i + \Omega - \Omega_n). \quad (17)$$

В формуле (17) дельта-функция задает связь между частотой излучения Ω и энергией состояния непрерывного спектра $E = E_i + \Omega_n$ при переходе в конечное связанное состояние с энергией E_f . Далее мы полагаем $E_f = E_i = -I_p$, так что $\Omega = \Omega_n$.

Фоторекомбинация

Вероятность спонтанного излучения фотона в единицу времени находится умножением (17) на число возможных конечных состояний испущенного фотона в малом интервале dN_f . В данном случае это число состояний в объеме V при определенной поляризации фотона и импульсом в телесном угле do , с абсолютной величиной, лежащей в интервале $p, p + dp$, дается выражением

$$dN_f = \frac{V p^2 dp do}{c^2 (2\pi)^3}, \quad (18)$$

а плотность числа состояний [37] на единичный интервал частоты Ω равна

$$d\rho(\Omega) = \frac{dN_f}{d\Omega} = \frac{V\Omega^2 do}{(2\pi c)^3}. \quad (19)$$

С учетом этого выражения плотность вероятности испускания фотона с частотой Ω_n и произвольной поляризацией \mathbf{e}_α в единицу времени в телесном угле do составляет

$$dP_n = \frac{\Omega_n}{2\pi c^3} |\tilde{\mathbf{P}}_{fi}(\Omega_n)|^2 \sin^2 \theta do. \quad (20)$$

Величина θ представляет собой угол между вектором $\tilde{\mathbf{P}}_{fi}(\Omega_n)$ и направлением распространения света. Полная интенсивность спонтанного излучения получается интегрированием (20) по углам [42,43] и умножением на энергию фотона:

$$I_n = \frac{4\Omega_n^2}{3c^3} |\tilde{\mathbf{P}}_{fi}(\Omega_n)|^2. \quad (21)$$

Для проведения конкретных расчетов требуется уточнить вид основного состояния. Мы выберем его в форме гауссовой волновой функции [31]

$$\langle \mathbf{r} | l \rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/4} \exp\left(\frac{-\alpha r^2}{2}\right), \quad (22)$$

где $\alpha \sim I_p$, что позволит провести интегрирование по импульсу в уравнении (14) аналитически. Если связать начало координат с центром ионизации, то

$$\mathbf{d}_{\mathbf{p}i} = i\mathbf{p} \left(\frac{1}{\pi\alpha}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{p^2}{2\alpha}\right),$$

$$\mathbf{d}_{f\mathbf{p}} = \mathbf{d}_{\mathbf{p}i} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{R}), \quad (23)$$

где \mathbf{R} — вектор, соединяющий центр ионизации и центр рекомбинации, а $\mathbf{p}\mathbf{R}$ — набег фазы при распространении электронной волны между центрами. Тогда вектор поляризации можно записать в виде

$$\mathbf{P}_{fi}(t) = -i \int_{-\infty}^t \exp(-i(\varphi + I_p \Delta t))$$

$$\times \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' (\mathbf{k}(\tau), \mathbf{d}_{\mathbf{p}i}) \exp\left(-i\left(\frac{p^2}{2} \Delta t + \mathbf{p}\mathbf{a}\right)\right) d\tau. \quad (24)$$

Вычисляя интеграл по импульсу с помощью известных формул для гауссовых интегралов [44], будем иметь

$$\mathbf{P}_{fi}(t) = -i \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^t \exp(-i(\varphi + I_p \Delta t - \mathbf{a}_1^2 \alpha \Delta t / 8\beta))$$

$$\times \left(\frac{1 - i\alpha \Delta t / 2}{\beta}\right)^{7/2} \mathbf{a}_1(\mathbf{k}\mathbf{a}_1) \exp\left(-\frac{\mathbf{a}_1^2}{4\beta}\right) d\tau. \quad (25)$$

Здесь введены обозначения:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{R}, \quad \beta = 1/\alpha + \alpha\Delta t^2/4, \quad \Delta t = t - \tau,$$

$$\mathbf{a}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \mathbf{k}(\tau) d\tau, \quad \varphi(t, \tau) = \int_{\tau}^t k^2(\tau)/2d\tau.$$

Функция $\mathbf{a}_1(t)$ имеет смысл классического смещения электрона относительно центра рекомбинации под действием поля волны. Выражение (25) является основой для дальнейшего нахождения спектра излучения.

Для проведения практических вычислений нужно задать конкретный вид зависимости поля лазерного излучения от времени и энергии начального и конечного состояний. При рассмотрении в качестве центров ионизации открытых квантовых точек как „искусственных атомов“ [45–47] массу электрона следует заменить эффективной массой.

Спектр рекомбинационного излучения

Для прояснения качественной картины процесса рассмотрим низкочастотный предел, в котором движение электрона после ионизации гармоническим полем под действием силы $F(t) = -F_0 \cos(\omega t)$ описывается как классическое. Обозначим $\tau = \omega t$, $u = x\omega^2/F_0$. Тогда закон движения примет вид

$$u(\tau) = -\cos(\tau + \varphi_0) - \tau \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0. \quad (26)$$

Корни уравнения (26) соответствуют моментам времени, в которые электрон достигает координаты со значением u .

Из уравнения (26) следует, что движение электрона после ионизации складывается из двух составляющих: периодического колебания под действием гармонического поля и движения с постоянной скоростью сноса $-\sin \varphi_0$. Характерный вид движения электрона при разных значениях фазы под действием лазерного поля интенсивности $I = 3 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ показан на рис. 1. Длина

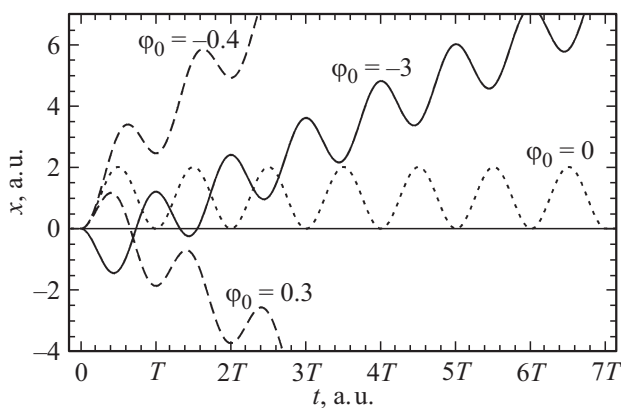


Рис. 1. Закон движения электрона под действием гармонического поля при разных значениях начальной фазы φ_0 .

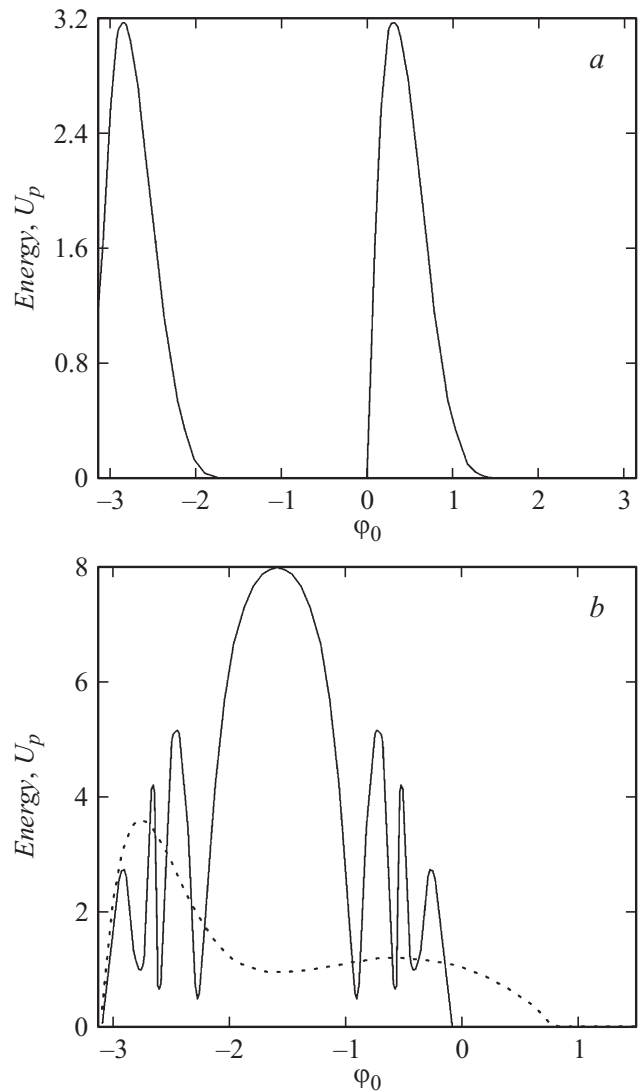


Рис. 2. Зависимость кинетической энергии электронов от начальной фазы в момент возврата к исходному иону (а) и в момент достижения центра рекомбинации (б).

волны лазерного излучения во всех расчетах взята для титан-сапфирового лазера: $\lambda = 800 \text{ nm}$.

В случае генерации гармоник на исходном ионе время возврата электрона к иону находится из численного решения трансцендентного уравнения (26) для $u = 0$. Область значений $\varphi_0 \in (-\pi/2, 0) \cup (\pi/2, \pi)$ соответствует траекториям улетающих электронов без возврата в точку вылета. Гармоники генерируют электроны возвратных траекторий из области фаз $\varphi_0 \in (-\pi, -\pi/2) \cup (0, \pi/2)$. Время достижения электроном центра рекомбинации, удаленного на расстояние R , находится из решения уравнения (26) при $u = R\omega^2/F_0$. В отличие от генерации гармоник на собственном ионе, в которой участвуют только возвращающиеся электроны, на вторичном центре могут рекомбинировать все вылетающие электроны с фазами $\varphi_0 \in (-\pi, \pi/2)$.

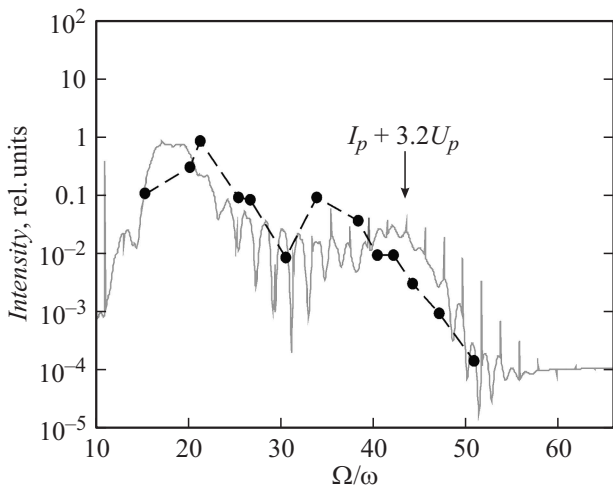


Рис. 3. Спектральное распределение интенсивности излучения: точки — экспериментальные данные [48], сплошная линия — теоретический расчет.

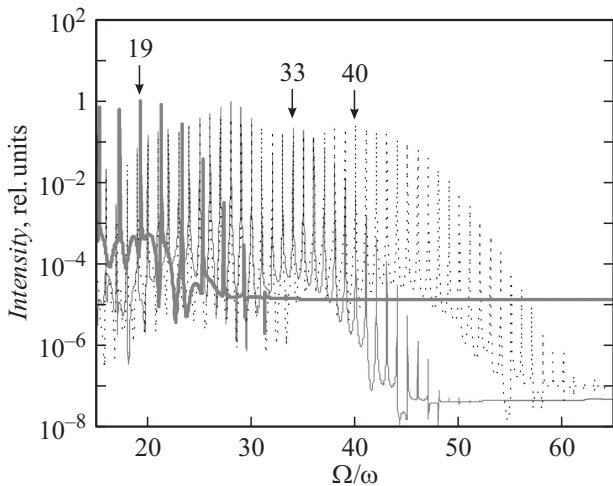


Рис. 4. Спектральное распределение интенсивности рекомбинационного излучения при разных расстояниях между центрами: толстая линия — рекомбинация на центре ионизации, тонкая линия — 30 а.е., точки — 55 а.е.

Кинетическая энергия электронов определяется выражением

$$E(\tau) = \frac{F_0^2}{2\omega^2} (\sin(\tau + \varphi_0) - \sin \varphi_0)^2. \quad (27)$$

На рис. 2 показана зависимость энергии электронов от начальной фазы в момент возвращения к центру ионизации (рис. 2, *a*) и в момент достижения центра рекомбинации (рис. 2, *b*) при расстоянии между центрами $R = 95$ а.е. (сплошная линия), $R = 5$ а.е. (точки). Расчеты проведены для времени первого достижения электроном центра рекомбинации. Энергия измеряется в единицах пондеромоторного потенциала $U_p = F_0^2/4\omega^2$. В случае генерации гармоник на исходном центре максимальная кинетическая энергия равна

$E_{\max} \approx 3.2U_p$, соответственно максимальная частота гармоники $\Omega_{\max} \approx I_p + 3.2U_p$ [6,7].

При рекомбинации на вторичном центре ($R \neq 0$) максимальная частота излучения зависит от расстояния до центра рекомбинации. Из уравнения (27) следует, что максимальное значение $8U_p$ кинетическая энергия электрона принимает при $\varphi_0 = -\pi/2$ в моменты времени $\tau_n = \pi(1 + 2n)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, которым соответствуют расстояния между центрами $R = \tau_n F_0/\omega^2$.

На рис. 3 представлены результаты расчета генерации гармоник для атома неона по формулам (20) и (25) и экспериментальные данные из [48]: $I = 2.2 \cdot 10^{14}$ W/cm², $I_p = 21$ eV.

Сравнение теоретических расчетов и экспериментальных данных показывает, что использованные нами приближения позволяют полностью воспроизвести известные ранее результаты по генерации высоких гармоник на отдельном атоме [38].

На рис. 4 показан результат расчета спектра излучения при разных расстояниях между центрами и одинаковом значении потенциала ионизации $I_p = 10$ eV и интенсивности лазерного поля $I = 10^{14}$ W/cm². Из приведенных на рисунке зависимостей видно, что спектр излучения сместился в коротковолновую область с увеличением расстояния между центрами. В отличие от случая постоянного поля [31] на расстояниях, превышающих амплитуду колебания электрона в поле волны, энергия электрона уже не увеличивается пропорционально R , а является функцией координаты. Соответственно частота обрезания спектра также является функцией координаты, а ее максимальное значение $\Omega_{\max} = I_p + E_{\max}$. Номер гармоники, после которой происходит резкое снижение интенсивности спектра, полученный из классического численного расчета по формулам (26) и (27), для рекомбинации на центре ионизации составляет $\Omega/\omega = 19$, для расстояния между центрами $R = 30$ а.е.—33, а для расстояния между центрами $R = 55$ а.е.—40.

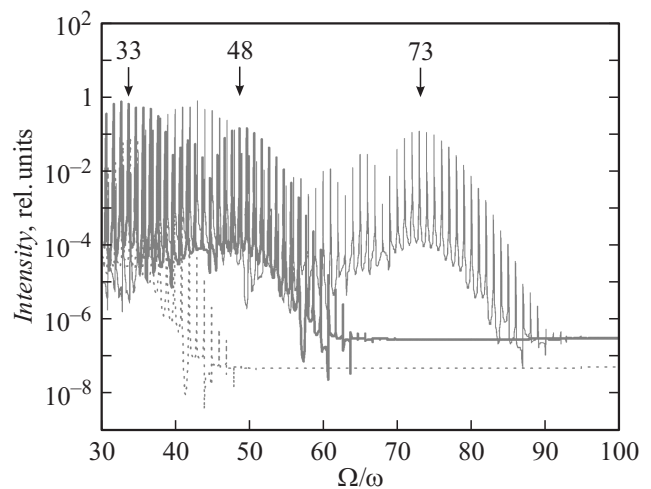


Рис. 5. Спектральное распределение интенсивности рекомбинационного излучения при разных значениях частоты лазерного поля: точки — $\lambda = 800$ nm, плотная линия — $\lambda = 1000$ nm, тонкая линия — $\lambda = 1200$ nm.

На рис. 5 представлены результаты расчета спектра рекомбинационного излучения на соседнем центре для разных значений частоты гармонического лазерного излучения при расстоянии между центрами $R = 30$ а.е., $I_p = 10$ eV, $I = 10^{14}$ W/cm² с указанием граничных частот. Классическая оценка номера гармоники, соответствующего началу снижения интенсивности спектра, для лазерного поля с длиной волны $\lambda = 800$ nm составляет $\Omega/\omega = 33$, для $\lambda = 1000$ nm — $\Omega/\omega = 48$, а для $\lambda = 1200$ nm — $\Omega/\omega = 73$.

Проведенные расчеты спектра рекомбинационного излучения на соседнем центре для разных интенсивностей поля гармонического лазерного излучения при фиксированном расстоянии между центрами также показали ожидаемое смещение спектра в сторону больших частот с ростом интенсивности поля.

Заключение

В работе рассмотрено явление фоторекомбинации электрона, образующегося в результате нелинейной ионизации под действием гармонического лазерного поля. В рамках модели Ливенштейна–Коркума получено аналитическое выражение для матричного элемента, описывающего спонтанное излучение фотона активным электроном, образующимся в процессе нелинейной ионизации. Рассчитан спектр излучения при рекомбинации на вторичном центре, который характеризуется наличием всех гармоник, в то время как в спектре генерации гармоник на родительском атоме присутствуют только нечетные составляющие. Спектр смещен в коротковолновую область по сравнению с аналогичным спектром излучения на самом центре ионизации. Максимальная частота в спектре при рекомбинации электрона на соседнем центре под действием гармонического поля определяется максимальной кинетической энергией электронов и может достигать восьми пондеромоторных потенциалов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-07-00270) и ГЗ Минобрнауки РФ №2014/19-2881.

Список литературы

- [1] *Delone N.B., Krainov V.P.* Multiphoton Processes in atoms. Berlin: Springer, 2003. 314 p.
- [2] *Corcum P.B., Krausz F.* // Nature Phys. 2007. Vol. 3. N 6. P. 381–387.
- [3] *Krausz F., Ivanov M.* // Rev. Mod. Phys. 2009. Vol. 81. P. 163–234.
- [4] *Tzallas P., Takiris G.D., Wite K. et al.* // J. Electr. Spectr. Rel. Phenom. 2005. Vol. 144–147. P. 1129–1135.
- [5] *Agostini P., DiMauro L.F.* // Rep. Prog. Phys. 2004. Vol. 67. P. 813–855.
- [6] *Corkum P.B.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. N 13. 1994–1997.
- [7] *Kulander K.C., Cooper J., Schafer K.J.* // Phys. Rev. A. 1995. Vol. 51. № 1. P. 561–568.
- [8] *Brabec Th., Krausz F.* // Rev. Mod. Phys. 2000. Vol. 72. N 2. P. 545–591.
- [9] *Sansone G., Vozzi C., Stagira S., Nisoli M.* // Phys. Rev. A. 2004. Vol. 70. P. 013411(10).
- [10] *Christov I.P., Murnane M.M., Kapteyn H.C.* // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. N 7. P. 1251–1254.
- [11] *Gouliemakis E., Schultze M., Hofstetter M. et al.* // Science. 2008. Vol. 320. N 5883. P. 1614–1617.
- [12] *Golovinski P.A.* // Laser Phys. 1993. Vol. 3. N 2. P. 280.
- [13] *Sand G., Rost J.M.* // Phys. Rev. A. 2000. Vol. 62. P. 053 403(10).
- [14] *Zagoia C., Goletz Ch-M., Grossmann F., Rost J.-M.* // Phys. Rev. A. 2012. Vol. 85. P. 041 401(4).
- [15] *Grossmann F.* Theoretical Femtosecond Physics. Berlin: Springer, 2008. 214 p.
- [16] *Головинский П.А., Михайлов Е.М., Преображенский М.А.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 6. С. 48–55.
- [17] *Головинский П.А., Михайлов Е.М.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 4. С. 1–6.
- [18] *Becker W., Long S., McIver J.K.* // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 50. N 2. P. 1540–1560.
- [19] *Frolov M.V., Manakov N.L., Starace A.F.* // Phys. Rev. A. 2008. Vol. 78. P. 063 418(27).
- [20] *Frolov M.V., Manakov N.L., Sarantseva T.S., Starace A.F.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2009. Vol. 42. P. 035 601(6).
- [21] *Желтухин А.Н., Манаков Н.Л., Флегель А.В., Фролов М.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 94. Вып. 8. С. 641–646.
- [22] *Chin S.L., Liang Y., Augst S., Golovinski P.A., Beaudoin Y., Chaker M.* // J. Nonlinear Opt. Phys. & Mater. 1995. Vol. 4. P. 667.
- [23] *Kuchiev M.Yu., Ostrovsky V.N.* // Phys. Rev. A. 1999. Vol. 60. N 4. P. 3111–3124.
- [24] *Golovinski P.A., Chin S.L.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1995. Vol. 28. P. 55–65.
- [25] *Donnelly T.D., Ditmire T., Neuman K., Perry M.D., Falcone R.W.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. N 14. P. 2472–2475.
- [26] *Slepyan G.Ya., Maksimenko S.A., Kalosha V.P., Gusakov A.V., Herrmann J.* // Phys. Rev. A. 2001. Vol. 63. P. 053 808(10).
- [27] *Ghimire S., DiChiara A.D., Sistrunk E., Agostini P., DiMauro L.F., Reis D.A.* // Natur. Phys. 2011. Vol. 7. P. 138–141.
- [28] *Kamta G.L., Bandrauk A.D.* // Phys. Rev. A. 2004. Vol. 70. P. 011 404(4).
- [29] *Etches A., Madsen L.B.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2010. Vol. 43. P. 155 602.
- [30] *Eden J.G.* // Progr. Quantum Electronics. 2004. Vol. 28. P. 197–246.
- [31] *Головинский П.А., Дробышев А.А.* // ЖЭТФ. 2014. Т. 145. Вып. 6. С. 984–990.
- [32] *Weinberg S.* Lectures on Quantum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 358 p.
- [33] *Keldysh L.V.* // JETP. 1964. Vol. 47. P. 1515–1527.
- [34] *Rammer J.* Quantum Field Theory of Non-Equilibrium States. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 536 p.
- [35] *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Физматгиз, 1962. 444 с.
- [36] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 536 с.
- [37] *Давыдов А.С.* Квантовая механика. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 704 с.

- [38] *Lewenstein M., Balcou Ph., Ivanov M.Y., LHuillier A., Corkum P.B.* // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. N 3. P. 2117–2132.
- [39] *Saieres P., Carre B., Deroff L.Le, Grasbon F., Paulus G.G., Walther H., Kopold R., Becker W., Milosevic D.B., Sanpera A., Lewenstein M.* // Science. 2001. Vol. 292. P. 902–905.
- [40] *Baggesen J.C., Madsen L.B.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2011. Vol. 44. P. 115 601(5).
- [41] *Харкевич А.А.* Спектры и анализ. М.: Издательство ЛКИ, 2007. 240 с.
- [42] *Шифф Л.* Квантовая механика. М.: ИИЛ, 1959. 473 с.
- [43] *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения М.: ИИЛ, 1956. С. 210.
- [44] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, рядов и произведений. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. С. 492.
- [45] *Ткач Н.В., Сети Ю.А., Зегря Г.Г.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 1. С. 70–80.
- [46] *Tkach M.V., Seti Ju.O.* // Condensed Matter Phys. 2007. Vol. 10. N 1(49). P. 23–31.
- [47] *Бурдов В.А.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. Вып. 2. С. 480–488.
- [48] *Wahlstrom C.-G., Larson J., Persson A., Starczewski T., Svanberg S., Saieres P., Balcou Ph., LHuillier A.* // Phys. Rev. A. 1993. Vol. 48. N 6. P. 4709–4720.