05

$O(n)$-модели с дефектами типа „случайное локальное поле“ и „случайная локальная анизотропия“: дальний порядок возможен

© А.А. Берзин[1], А.И. Морозов[2]

[1] Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники, Москва, Россия
[2] Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

E-mail: mor-alexandr@yandex.ru

(Поступила в Редакцию 19 мая 2015 г.)

Сформулированы условия разрушения дальнего порядка в рамках $O(n)$-моделей (n-компонентных векторных моделей) с дефектами типа „случайное локальное поле“. Высказано предположение, что при определенных условиях, несмотря на возникновение неоднородного состояния, предсказанного в классической работе Имри и Ма, возможно сохранение в основном состоянии системы дальнего порядка. Дефекты типа „случайная локальная анизотропия“ не в состоянии разрушить дальний порядок в основном состоянии системы.

1. Введение

Теоретическому описанию фазовых переходов в системах с дефектами посвящено огромное число работ (см., например, обзоры и монографии [1–4]). Для систем с дефектами типа „случайная локальная температура перехода“ усилиями Доценко с соавторами был достигнут существенный прогресс в описании происходящих в них фазовых переходов [3,5]. Что касается систем типа „случайное локальное поле“ и „случайная локальная анизотропия“, то тут успехи не столь впечатляющи.

В настоящей работе мы рассмотрим выводы известной работы Имри и Ма [6], в которой утверждается, что в системах с непрерывной симметрией параметра порядка в пространстве с размерностью $d < 4$ наличие примесей типа „случайное локальное поле“ (сопряженное параметру порядка) сколь угодно малой концентрации приводит к разрушению дальнего порядка даже в основном состоянии. Позже аргументация Имри и Ма была распространена на примеси типа „случайная локальная анизотропия“ (см., например, [7,8]).

Сразу отметим, что вывод работы [6] о неизбежности возникновения неоднородного состояния в системе с размерностью $d < 4$ вследствие влияния указанных дефектов не вызывает никаких сомнений. Представляется, что более тщательного рассмотрения требует вопрос о возможности или невозможности сосуществования указанного неоднородного состояния и дальнего порядка.

2. Примеси типа „случайное локальное поле“

Энергия взаимодействия случайного поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ с параметром порядка $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ имеет вид

$$W_{\text{int}} = -\int d^d\mathbf{r}\mathbf{h}(\mathbf{r})\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор.

Рассмотрим систему со случайным распределением точечных примесей. Направление и величина случайного локального поля каждой конкретной примеси задаются соответствующей четной относительно своего аргумента функцией распределения $\varphi(\mathbf{h})$.

Воспроизведем кратко аргументы в пользу возникновения неоднородного состояния, сформулированные Имри и Ма [6].

Пусть в каждой области нашей системы с линейным размером L параметр порядка выстроится по суммарному полю, создаваемому примесями в этой области за счет преобладания одного направления поля, вызванного концентрационными флуктуациями. При этом выигрыш в объемной плотности энергии составит величину $W_{\text{int}} \propto L^{-d/2}$.

В разных областях направления суммарного поля различаются. Это вызывает неоднородность параметра порядка на масштабе L. Проигрыш в объемной плотности энергии за счет возникновения неоднородности параметра порядка составит величину $W_{\text{ex}} \propto L^{-2}$.

Легко видеть, что при больших значениях L выигрыш в энергии превосходит проигрыш. Таким образом, в пространстве размерности $d < 4$ неизбежно возникновение неоднородного состояния.

Проанализируем теперь аргументы работы [6], доказывающие невозможность существования дальнего порядка в неоднородном состоянии. Доказательство ведется от обратного. Авторы рассмотрели коррелятор

$$\langle\boldsymbol{\eta}^{\perp}(\mathbf{r})\boldsymbol{\eta}^{\perp}(\mathbf{r}')\rangle = (2\pi)^{-d} \times \int d^d\mathbf{k}G_{\perp}^2(\mathbf{k})\langle|\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\perp}|^2\rangle \exp\big(i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\big), \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\eta}^{\perp}(\mathbf{r})$ — составляющая параметра порядка, перпендикулярная его среднему значению $\boldsymbol{\eta}_0$ в объеме образца, $G_{\perp}(\mathbf{k})$ — поперечная восприимчивость чистой системы,

$$G_{\perp}(\mathbf{k}) \propto (c\mathbf{k}^2 + H/|\boldsymbol{\eta}_0|)^{-1}, \qquad (3)$$

H — напряженность внешнего поля, $c = \mathrm{const}$,

$$\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\perp} = V^{-1/2} \int d^d\mathbf{r}\mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{kr}). \tag{4}$$

Утверждение авторов состоит в том, что выражение (2) расходится в области малых волновых векторов в пределе $H \to 0$ при $\boldsymbol{\eta}_0 \neq 0$, $\langle |\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\perp}|^2 \rangle \neq 0$ и размерности пространства $d \leq 4$. Поскольку это невозможно, должно выполняться соотношение $\boldsymbol{\eta}_0 = 0$.

Более строго условие расходимости можно сформулировать не „при $\langle |\mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\perp}|^2 \rangle \neq 0$“, а „в случае, когда $\lim\limits_{\mathbf{k}\to 0} \mathbf{h}_{\mathbf{k}}^{\perp} \neq 0$“. Однако именно это условие не выполнено. Действительно, в системе с непрерывной симметрией направление $\boldsymbol{\eta}_0$ задается направлением среднего случайного поля в образце $\mathbf{h}_0 = V^{-1/2}\mathbf{h}_{\mathbf{k}=0}$. Даже если вследствие флуктуаций в образце конечных размеров $\mathbf{h}_0 \neq 0$, то по определению перпендикулярной компоненты $\mathbf{h}_{\mathbf{k}=0}^{\perp} = 0$. При малых $\mathbf{k}$ $h_{\mathbf{k}}^{\perp} \propto k$. Расходимость выражения (2) при $H \to 0$ имеет место при $d \leq 2$, т.е. тогда, когда дальний порядок отсутствует и в чистой системе.

Следовательно, вопрос о существовании дальнего порядка в неоднородном состоянии при $2 < d < 4$ требует дальнейших исследований.

Сформулируем в качестве гипотезы необходимые и достаточные условия сосуществования неоднородного состояния и дальнего порядка.

1. Каждое направление случайного поля в пространстве параметра порядка размерности n можно задать точкой на поверхности единичной сферы. В силу четности $\varphi(\mathbf{h})$ множество таких точек симметрично относительно центра сферы (точка, диаметрально противоположная существующей, обязательно присутствует на сфере). Для возникновения дальнего порядка необходимо, чтобы существовал хотя бы один диаметр указанной сферы, ортогональная проекция множества указанных точек на который совпадала бы с центром данной сферы. Другими словами, если считать концы данного диаметра полюсами сферы, то все точки, изображающие направления случайного поля, должны располагаться на ее экваторе (будем в дальнейшем полагать, что каждому диаметру соответствует свой „экватор“ — множество точек сферы, лежащих на плоскости, которая проходит через центр сферы перпендикулярно данному диаметру). В противном случае не существует направления параметра порядка, проекция случайного поля на которое не принимала бы противоположных значений в ряде областей системы вследствие флуктуаций этого поля. Следуя за этими флуктуациями, параметр порядка с равной вероятностью принимает противоположные значения, и его среднее значение в пределе бесконечной системы равно нулю.

Если такой диаметр существует, то возможно, что во всей системе проекция параметра порядка на него не изменяет знак. В этом случае энергия, связанная с неоднородностью параметра порядка, ниже, чем когда указанная проекция изменяет и знак, и величину. Усреднение по такому состоянию дает ненулевое среднее значение параметра порядка. Число таких диаметров может превосходить единицу, выбор направления среднего параметра порядка обусловлен случайными причинами.

Данное условие не является достаточным, так как даже при наличии указанного диаметра(ов) может оказаться, что во всех точках системы значение проекции параметра порядка на любой из диаметров равно нулю.

2. Обозначим через D множество всех точек на поверхности единичной сферы в пространстве параметра порядка, ортогональная проекция которых на любой из диаметров, удовлетворяющих условию 1, совпадает с центром данной сферы. Множество D является пересечением „экваторов“, соответствующих полному набору линейно независимых диаметров, удовлетворяющих условию 1.

Если множество D обладает свойством линейной связности, т.е. любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат данному множеству, то направление параметра порядка будет меняться в пределах этого множества, и среднее значение параметра порядка будет равно нулю (этот случай имеет место при числе p линейно независимых диаметров, удовлетворяющих условию 1, которое определяется неравенством $1 \leq p \leq n-2$). Действительно, проекция случайного поля на любое направление, задаваемое точкой из множества D, отлична от нуля и принимает противоположные значения в ряде областей системы вследствие флуктуаций этого поля.

При изменении направления параметра порядка в пределах множества D энергия неоднородности будет ниже, чем в случае выхода за пределы этого множества.

В том случае, когда число линейно независимых диаметров, удовлетворяющих условию 1, равно $n-1$, множество D не обладает свойством линейной связности и представлено двумя диаметрально противоположными точками на единичной сфере. Тогда в процессе плавного изменения направления параметра порядка оно неизбежно выйдет за пределы множества D и примет положение, в котором параметр порядка будет иметь ненулевую ортогональную проекцию на один из указанных диаметров. Тогда, как уже указывалось в пункте 1, этой проекции выгодно иметь один и тот же знак во всех точках системы, где она отлична от нуля. В этом случае в системе возникает дальний порядок.

Таким образом, для возникновения дальнего порядка необходимо и достаточно выполнения условия 1 и линейной несвязности множества D. Рассмотрим для иллюстрации этого положения конкретные модели. Поскольку $2 < d < 4$, ограничимся двумя традиционными схемами: трехмерной $X-Y$-моделью ($n = 2$) и трехмерной моделью Гейзенберга ($n = 3$).

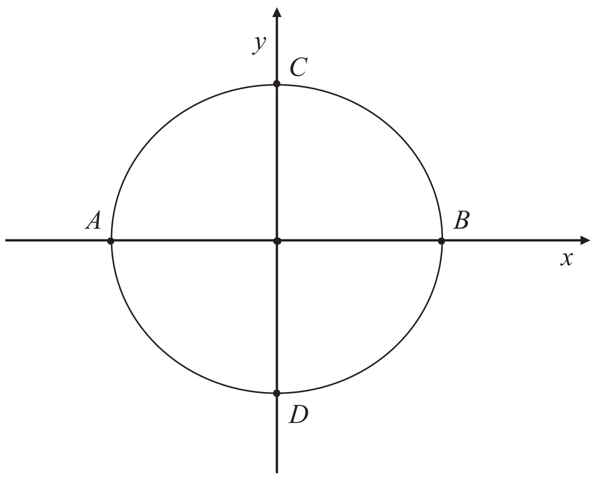

Рис. 1. Пространство направлений параметра порядка $X-Y$-модели.

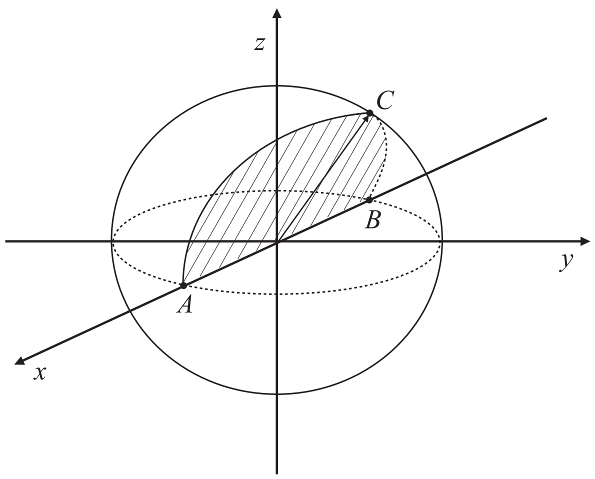

Рис. 2. Пространство направлений параметра порядка модели Гейзенберга.

a) Трехмерная $X-Y$-модель. Если случайные поля в двумерном пространстве параметра порядка неколлинеарны друг другу, то дальний порядок в системе отсутствует (не выполнено условие 1). Если же они коллинеарны друг другу (обозначим ось, которой они параллельны, x), то условию 1 удовлетворяет диаметр единичной окружности, параллельный оси y, а множество D представлено точками A и B (рис. 1) и является линейно несвязным. В процессе эволюции параметра порядка по мере перемещения от точки к точке в координатном пространстве направление параметра порядка изменяется от параллельного оси x в одной области системы к антипараллельному в другой области. При этом изменение направления может происходить либо по дуге ACB, либо по дуге ADB (рис. 1). Энергия взаимодействия со случайным полем от выбора этого направления не зависит. Энергия неоднородности будет заведомо меньше, если во всей системе эта эволюция будет проходить по одной дуге. При этом в системе возникнет среднее значение параметра порядка, коллинеарное оси y.

b) Трехмерная модель Гейзенберга. Если случайные поля в трехмерном пространстве параметра порядка некомпланарны, то дальний порядок в системе отсутствует (не выполнено условие 1). Если они компланарны, но неколлинеарны (обозначим плоскость, которой они параллельны, xy), то условию 1 удовлетворяет диаметр единичной сферы, параллельный оси z ортогональной системы координат. Множество D представлено точками сферы, лежащими в плоскости xy, и является линейно связным (рис. 2). В неоднородном состоянии направление параметра порядка будет изменяться от точки к точке, оставаясь в плоскости xy. При этом энергия неоднородности минимальна, и дальний порядок не возникает.

Если же случайные поля коллинеарны друг другу (обозначим ось, которой они параллельны, x), то условию 1 удовлетворяют диаметры единичной окружности, лежащей в плоскости yz (рис. 2). Множество D представлено точками A и B (рис. 2) и является линейно несвязным. Энергия неоднородности будет заведомо меньше, если множеству направлений параметра порядка во всей системе на сфере будет соответствовать одна и та же дуга наименьшей длины, соединяющая точки A и B. При этом в системе возникнет среднее значение параметра порядка, параллельного радиусу, соединяющему центр сферы с центром этой дуги точкой C (рис. 2). Выбор дуги из бесчисленного множества вариантов обусловлен случайными причинами.

3. Примеси типа „случайная локальная анизотропия“

Энергия взаимодействия параметра порядка с примесями этого типа имеет вид

$$W_{\text{int}} = -\int d^d\mathbf{r}\, A_0(\mathbf{r})\big(\mathbf{n}(\mathbf{r}), \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})\big)^2, \qquad (5)$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ — единичный вектор, задающий направление легкой оси, а $A_0(\mathbf{r})$ — константа случайной анизотропии.

Условия возникновения неоднородного состояния в системе с примесями типа „случайная локальная анизотропия“ полностью аналогичны таковым в системе с примесями типа „случайное локальное поле“. Неоднородное состояние возникает при сколь угодно малой концентрации примесей в пространстве $2 < d < 4$.

Принципиальное отличие от примесей типа „случайное локальное поле“ состоит в том, что в случае минимальной энергии взаимодействия параметр порядка $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ может быть как параллелен, так и антипараллелен вектору $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Поэтому для минимизации указанной энергии даже в случае хаотического распределения векторов $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в пространстве параметра порядка достаточно, чтобы направление $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ изменялось в пределах полусферы в этом пространстве. В этом состоянии среднее значение параметра порядка отлично от нуля и энергия неоднородности ниже, чем в случае, когда направление $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ изменяется в пределах всей сферы. В случае конкретных примесей типа „случайная локальная анизотропия“ направление $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ может изменяться в пределах принадлежащей полусфере, но меньшей области. В работе [9] авторы рассмотрели такой случай и пришли к выводу, что примеси типа „случайная локальная анизотропия“ не устраняют фазовый переход второго рода в упорядоченное состояние, в то время как в случае полностью хаотического распределения осей он отсутствует. В отличие от авторов этой работы мы считаем, что и в случае полностью хаотического распределения осей дальний порядок „выживает“, поскольку усреднение параметра порядка происходит по полусфере направлений.

Поскольку на сфере существует симметричная область противоположных направлений, основное состояние системы, как минимум, двукратно вырождено. В случае полностью хаотического распределения векторов $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ оно бесконечно вырождено. Выбор основного состояния обусловлен случайными причинами.

Таким образом, примеси типа „случайная локальная анизотропия“ создают неоднородное состояние в пространстве размерности $2 < d < 4$, но не устраняют дальний порядок в основном состоянии.

В то же время возможно существование метастабильных состояний с $\boldsymbol{\eta}_0 = 0$.

4. Заключение

В рамках модели $O(n)$ в полном соответствии с аргументами Имри и Ма в пространстве размерности $2 < d < 4$ примеси типов „случайное локальное поле“ и „случайная локальная анизотропия“ вызывают появление неоднородного состояния при сколь угодно малой концентрации.

Возникновение такого состояния в случае примесей типа „случайное локальное поле“ (в противоречие с утверждением Имри и Ма) не обязательно ведет к исчезновению дальнего порядка в основном состоянии системы. В настоящей работе сформулированы в качестве гипотезы необходимые и достаточные условия существования дальнего порядка (раздел 2). Согласно этим условиям, его исчезновение или сохранение зависит от характера распределения направлений случайных полей в пространстве параметра порядка.

Примеси типа „случайная локальная анизотропия“ вопреки существующему мнению не способны устранить дальний порядок в основном состоянии системы даже в случае хаотического распределения легких осей.

Авторы благодарят А.С. Сигова и Н.С. Чекалкина за ценные обсуждения.

Список литературы

[1] A.P. Levanyuk, A.S. Sigov. Defects and structural phase transitions. Gordon and Bridge, N.Y. (1987). 206 p.
[2] Spin glasses and random fields / Ed. A.P. Young. World Scientific, Singapore (1998). 456 p.
[3] Вик.С. Доценко. УФН **165**, 481 (1995).
[4] A.I. Morosov, A.S. Sigov. Comments Condens. Matter Phys. **18**, 279 (1998).
[5] G. Parisi, Vik.S. Dotsenko. J. Phys. A **25**, 3143 (1992).
[6] Y. Imry, S.-K. Ma. Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
[7] G.E. Volovik. J. Low Temp. Phys. **150**, 453 (2008).
[8] A.A. Fedorenko, F. Kuhnel. Phys. Rev. B **75**, 174 206 (2007).
[9] M. Dudka, R. Folk, Yu. Holovatch. J. Magn. Magn. Mater. **294**, 305 (2005).