

Резонансы в обобщенной LC -модели гранулированных нанокompозитов металл—диэлектрик

© Н.А. Олехно^{1,2}, Я.М. Бельтюков^{2,3}, Д.А. Паршин¹

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

² Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

³ Université Montpellier II, CNRS, Montpellier, France

E-mail: olekhnon@gmail.com

(Поступила в Редакцию 14 мая 2015 г.)

Исследованы LC -сети в виде пространственных решеток со случайно расположенными индуктивными и емкостными связями, являющиеся адекватной теоретической моделью для описания плазмонных резонансов в неупорядоченных гранулированных металл-диэлектрических нанокompозитах. Ранее такие сети теоретически рассматривались только в случае, когда значения всех L - и C -связей одинаковы. Такое приближение не применимо, когда размеры металлических гранул и диэлектрических промежутков между ними заметным образом флуктуируют. В настоящей работе была разработана более общая модель, позволяющая рассматривать также сети с произвольными значениями L и C . С помощью этой обобщенной модели исследована спектральная плотность резонансных состояний для сетей с различными значениями индуктивных и емкостных связей. Показано, что при дискретном наборе значений L - и/или C -связей характерные пики в плотности состояний расщепляются, а при непрерывном распределении этих значений — сглаживаются. Также исследован антикроссинг частот при диполь-дипольном взаимодействии одиночных резонансных кластеров и обнаружена логарифмическая сингулярность в спектральной плотности состояний на концах спектра для плавных распределений значений L и C .

Н.А. Олехно и Я.М. Бельтюков благодарят фонд „Династия“ за финансовую поддержку.

1. Введение

Неупорядоченные металл-диэлектрические нанокompозиты, представляющие собой систему металлических гранул с размерами порядка 10–50 nm, встроенных в пленку диэлектрика, привлекают в последнее время существенный интерес с точки зрения как теории, так и эксперимента [1]. В таких системах наблюдаются гигантские флуктуации локальных электрических полей, связанные с поверхностными плазмонными резонансами, возникающими в металлических гранулах, и приводящие к ярко выраженным нелинейным эффектам, например, генерации высших гармоник [2], аномально высокому оптическому поглощению [3] и поверхностно-усиленному рамановскому рассеянию [4].

Одной из моделей для описания поверхностных плазмонных резонансов в металл-диэлектрических нанокompозитах, которая естественным образом возникает при дискретизации уравнений Максвелла, является дискретная LC -сеть. В простейшем случае такая сеть представляет из себя решетку (квадратную или кубическую), в которой в качестве связей между соседними узлами случайным образом выбраны катушки индуктивности L с вероятностью p или конденсаторы C с вероятностью $1 - p$ [5,6]. При этом случайно расположенные катушки L соответствуют металлическим гранулам, а конденсаторы C — диэлектрическим прослойкам меж-

ду гранулами. Значения параметров L и C считаются одинаковыми для всей сети. Такие случайные сети исследовались в основном численно, однако некоторые простейшие случаи были рассмотрены аналитически. Аналитическое рассмотрение было также проведено в рамках теории случайных матриц для одномерных цепей с дальнедействием (когда все узлы связаны со всеми) в работах [7–9]. Ввиду вычислительной сложности прямой диагонализации уравнений Кирхгофа при численном исследовании двумерных и трехмерных неупорядоченных сетей применяются разнообразные другие подходы [10]. Так, аналитически с помощью метода матриц переноса [11] и спектрального метода [5] были исследованы различные случаи упорядоченных двумерных сетей, применяемых для моделирования метаматериалов [12].

Как показано в работе [6], вид спектральной плотности резонансов для неупорядоченных LC -сетей с одинаковыми значениями параметров L и C зависит от концентрации L - и C -связей и демонстрирует сложную фрактальную структуру как функцию частоты ω . Электрические поля собственных колебательных мод в таких сетях демонстрируют сильные флуктуации от связи к связи и описываются мультифрактальной статистикой [6,13].

Кроме этого, случайные LC -сети появляются при исследовании других физических задач. Например, проводимость такой сети тесно связана с характеристиками

коллективных возбуждений, наблюдаемых в спиновых стеклах [14], ввиду аналогии между уравнениями Кирхгофа и уравнениями движения для спиновых операторов, установленной в работе [15]. Также недавно было показано соответствие задач об андерсоновской локализации электронов с плоскими зонами в модели сильной связи и случайными LC -сетями [16].

В настоящей работе мы исследуем резонансы в неупорядоченных металл-диэлектрических нанокompозитах с помощью случайных LC -сетей. При этом мы учтем, чего не делалось в предыдущих работах, что разброс в размерах гранул и расстояний между ними ведет к разбросу в значениях индуктивностей L и емкостей C . Кроме этого, мы покажем, что для аккуратного описания резонансных частот ω , близких к плазменной частоте металла ω_p , металлические гранулы необходимо рассматривать как параллельные LC -контур с резонансной частотой ω_p .

2. Сведение задачи о нанокompозите к эквивалентной электрической LC -сети

Рассмотрим металл-диэлектрический нанокompозит, т.е. неоднородную среду, в которой некоторые участки представляют собой микроскопические металлические гранулы, размер которых мы оценим позже, а остальная часть среды представляет собой диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_d . Ограничимся случаем немагнитных материалов, тогда в такой среде магнитная проницаемость $\mu = 1$, и магнитное поле совпадает с магнитной индукцией $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Кроме того, будем считать, что в гранулах и в диэлектрике нет сторонних зарядов. Тогда в квазистатическом приближении (т.е. при пренебрежении запаздыванием) уравнения Максвелла сводятся к трем уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

при этом третье уравнение является очевидным следствием второго. Связь между электрическим током смещения \mathbf{j} и электрической индукцией \mathbf{D} определяется при этом выражением

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

как в диэлектрике, так и в металле. Отсюда и из уравнения Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ следует, что и $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

На некоторой частоте ω электрическая индукция $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \exp(i\omega t)$ связана с электрическим полем \mathbf{E} соотношением $\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}$. Диэлектрическую проницаемость диэлектрика $\varepsilon_d(\omega)$ в рассматриваемом диапазоне частот можно считать примерно постоянной и равной ε_d . Диэлектрическая проницаемость металла $\varepsilon_m(\omega)$ в прибли-

жении свободных электронов (модель Друде) имеет вид

$$\varepsilon_m(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (3)$$

где ω_p — плазменная частота металла. Это соотношение верно для металлов с $\omega_p \tau \gg 1$ в диапазоне частот $\omega \tau \gg 1$, где τ — характерное время релаксации импульса электрона. Для типичных металлов обратное время релаксации $1/\tau$ имеет порядок 10^{13} s^{-1} , а плазменная частота $\omega_p \sim 10^{15} - 10^{16} \text{ s}^{-1}$. Таким образом, рассматриваемые частоты ω лежат в видимом и инфракрасном диапазоне.

Из уравнения (2) получаем выражение для плотности тока смещения в диэлектрике

$$\mathbf{j} = -i\omega \frac{\varepsilon_d}{4\pi} \operatorname{grad} \varphi. \quad (4)$$

Здесь ввиду выполнения условия потенциальности $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ мы ввели электростатический потенциал φ , который связан с электрическим полем обычным образом $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. Уравнение (4) эквивалентно соотношению $I = YU$ между током $I = ja^2$ и напряжением $U = \varphi_1 - \varphi_2 = -a \operatorname{grad} \varphi$ в кубической решетке конденсаторов с малой постоянной решетки a . При этом $Y = i\omega C_d$ является адмиттансом конденсатора с емкостью

$$C_d = \varepsilon_d a / 4\pi. \quad (5)$$

С другой стороны, в металле согласно уравнениям (2) и (3) мы имеем

$$\mathbf{j} = - \left(\frac{i\omega}{4\pi} + \frac{\omega_p^2}{4\pi i\omega} \right) \operatorname{grad} \varphi, \quad (6)$$

что соответствует кубической решетке из связей с проводимостью $Y = i\omega C_m + c^2/i\omega L_m$, отвечающих параллельным LC -контуром с индуктивностью

$$L_m = 4\pi c^2 / (a\omega_p^2) \quad (7)$$

и емкостью

$$C_m = a / 4\pi. \quad (8)$$

Резонансная частота $\omega_0 = c/\sqrt{L_m C_m}$ этих контуров совпадает с плазменной частотой металла ω_p . Замена металла параллельными LC -контуром и диэлектрика емкостями C была использована в работе [17], однако в ней не были выведены точные значения L_m , C_m и C_d . В области низких частот $\omega \ll \omega_p$ параллельный LC -контур может быть заменен одной индуктивной связью L_m ввиду того, что $i\omega C_m \ll c^2/i\omega L_m$. Такое приближение использовалось в работах [5,6]. Для нахождения тока и потенциалов узлов в таких решетках необходимо решить уравнения Кирхгофа, которые являются следствием уравнений $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$.

В квазистатическом приближении необходимо, чтобы размер металлических гранул R был меньше глубины

проникновения электромагнитного поля в металл δ (глубины скин-слоя), которая, учитывая (3), имеет величину порядка $\delta = c/\omega_p \simeq 50 \text{ nm}$ (при $\omega \ll \omega_p$). Кроме того, длина волны падающего излучения λ должна быть много больше размеров всей системы. Это условие выполняется с хорошим запасом, поскольку в оптическом диапазоне частот $\lambda \simeq 400 \text{ nm}$, а в инфракрасном она еще больше. С другой стороны, металлическая гранула не должна быть слишком маленькой, чтобы не нарушилось условие $\omega\tau \gg 1$. Для предельно малых металлических гранул длина свободного пробега электронов $l \simeq R$ определяется рассеянием электронов на границах гранулы. Тогда время свободного пробега $\tau \simeq R/v_F$, где v_F — скорость электронов на поверхности Ферми. В итоге получаем, что $R \gg v_F/\omega$. Подставляя в это уравнение $v_F = 2 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$ и $\omega = 10^{15} \text{ s}^{-1}$, приходим к условию $R \gg 2 \text{ nm}$. Таким образом, размеры металлической гранулы R должны удовлетворять условию

$$\frac{v_F}{\omega} \ll R \ll \frac{c}{\omega_p}. \quad (9)$$

Учитывая, что скорость Ферми v_F примерно на два порядка меньше скорости света, этому условию можно удовлетворить с хорошим запасом в интересующем нас диапазоне частот.

3. Кинетическая и геометрическая индуктивность

Выражение (7) в точности совпадает с выражением для кинетической индуктивности участка металла L_{kin} . Такая индуктивность связана с кинетической энергией носителей заряда, а не с энергией магнитного поля. Выражение для L_{kin} получается путем приравнивания запасенной индуктивностью энергии E_L и суммарной кинетической энергии упорядоченного движения электронов E_{kin} . В работе [18] приведен такой вывод применительно к индуктивности наноразмерных разомкнутых кольцевых резонаторов, применяемых для создания метаматериалов.

Для металлического кубика со стороной a , перпендикулярно одной из пар граней которого течет ток I , имеем

$$E_L = \frac{L_{\text{kin}} I^2}{2c^2} = \frac{L_{\text{kin}} e^2 n^2 a^4}{2c^2} v^2 \quad (10)$$

и

$$E_{\text{kin}} = \frac{mna^3}{2} v^2, \quad (11)$$

где n — концентрация электронов, v — скорость их упорядоченного движения. Принимая во внимание, что $4\pi ne^2/m = \omega_p^2$ есть квадрат плазменной частоты металла, получаем

$$L_{\text{kin}} = \frac{4\pi c^2}{\omega_p^2 a}. \quad (12)$$

Эта величина оказывается обратно пропорциональной размеру a .

Оценим теперь геометрическую индуктивность L_g . Из закона Био–Савара следует, что создаваемое плотностью тока \mathbf{j} в объеме dV магнитное поле $d\mathbf{H}$ в точке с радиус-вектором \mathbf{r} определяется выражением

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{[\mathbf{j} \times \mathbf{r}]}{r^3} dV. \quad (13)$$

Полагая, что все характерные размеры порядка a , получаем оценку для магнитного поля

$$H \simeq \frac{ja}{c} = \frac{ja^2}{ac} = \frac{I}{ac}. \quad (14)$$

Энергия этого магнитного поля в кубике размером a равна

$$W_H = \frac{H^2 a^3}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \frac{I^2}{a^2 c^2} a^3 = \frac{aI^2}{8\pi c^2}. \quad (15)$$

Приравнявая эту энергию величине

$$\frac{L_g I^2}{2c^2}, \quad (16)$$

где L_g — геометрическая индуктивность, получаем выражение для геометрической индуктивности

$$L_g \simeq \frac{a}{4\pi}. \quad (17)$$

Она растет с ростом размера кубика.

Геометрическая (17) и кинетическая (12) индуктивности сравниваются по порядку величины, когда

$$a \simeq 4\pi \frac{c}{\omega_p} = 4\pi\delta. \quad (18)$$

При a , меньших этого значения, преобладает кинетическая индуктивность L_{kin} , а геометрической индуктивностью L_g можно пренебречь.

4. Уравнения Кирхгофа

Пронумеруем узлы решетки номерами $i = 1, \dots, N$, обозначив потенциалы в узлах φ_i (рис. 1). Для составления уравнений припишем каждому узлу суммарный заряд q_i обкладок конденсаторов, непосредственно примыкающих к узлу i (выделенные области на рис. 1). Если к узлу не примыкает ни одного конденсатора, то соответствующий заряд равен 0.

Потенциалы и заряды связаны между собой системой уравнений

$$q_i = \sum_{j \neq i} C_{ij} (\varphi_i - \varphi_j),$$

где C_{ij} — емкость конденсатора, непосредственно соединяющего узлы i и j . Матрица C симметрична: $C_{ij} = C_{ji}$. Если узлы i и j не соединены напрямую конденсатором, то соответствующий матричный элемент $C_{ij} = 0$. Определим диагональные элементы C_{ii} как

$$C_{ii} = - \sum_{j \neq i} C_{ij}, \quad (20)$$

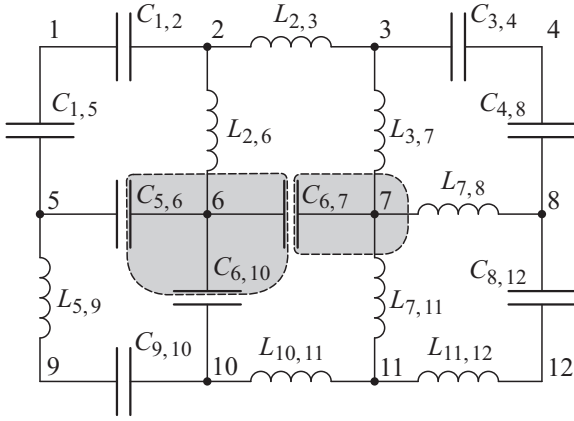


Рис. 1. Пример LC -сети. Штриховыми линиями показаны области с зарядом, относящиеся к узлам 6 и 7 соответственно.

тогда

$$q_i = - \sum_j C_{ij} \varphi_j. \quad (21)$$

С другой стороны, изменение заряда на узле i связано с втекающими в него токами соотношением

$$\dot{q}_i = \sum_{j \neq i} I_{ji}, \quad (22)$$

где I_{ji} обозначает ток, текущий из узла j в узел i . Матрица I антисимметрична: $I_{ij} = -I_{ji}$. В свою очередь, изменение тока по времени связано с напряжениями на катушках индуктивностей

$$\frac{1}{c^2} L_{ij} \dot{I}_{ij} = \varphi_i - \varphi_j, \quad (23)$$

где L_{ij} — индуктивность непосредственно между узлами i и j . Матрица L симметрична: $L_{ij} = L_{ji}$. Если непосредственно между узлами i и j нет катушки индуктивности, то $L_{ij} = \infty$. Таким образом, вторая производная заряда связана с напряжением уравнениями (22) и (23)

$$\ddot{q}_i = \sum_{j \neq i} \frac{c^2}{L_{ij}} (\varphi_j - \varphi_i). \quad (24)$$

Введем матрицу обратных индуктивностей

$$K_{ij} = \frac{1}{L_{ij}}. \quad (25)$$

Как и матрица емкостей C , матрица K симметрична. Если узлы i и j не связаны напрямую катушкой индуктивности, то матричный элемент $K_{ij} = 0$. Как и в случае емкостей, определим диагональные элементы матрицы обратных индуктивностей как

$$K_{ii} = - \sum_{j \neq i} K_{ij}, \quad (26)$$

тогда

$$\ddot{q}_i = c^2 \sum_j K_{ij} \varphi_j. \quad (27)$$

Сравнивая уравнения (21) и (27), получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно потенциалов в узлах

$$\sum_j C_{ij} \dot{\varphi}_j = -c^2 \sum_j K_{ij} \varphi_j. \quad (28)$$

Будем искать решение этой системы в виде $\varphi_i \propto \exp(i\omega t)$. Тогда

$$\omega^2 \sum_j C_{ij} \varphi_j = c^2 \sum_j K_{ij} \varphi_j. \quad (29)$$

Нетривиальное решение этой задачи существует при выполнении условия

$$\det(c^2 K - \omega^2 C) = 0. \quad (30)$$

Таким образом, поиск собственных частот LC -сети сведен к обобщенной задаче на собственные значения. Собственные числа ω^2 отвечают квадратам резонансных частот системы, соответствующие собственные вектора φ_j описывают распределение потенциала в узлах сети для собственных мод. В отличие от большинства других методов, данная постановка задачи позволяет исследовать спектральные свойства сетей и распределение локальных полей не только в случае одинаковых значений L и C , но и когда значения L и C могут произвольным образом флуктуировать от связи к связи.

Уравнения (28) напоминают уравнения колебаний механической системы, если заменить потенциалы φ_i на смещения частиц из положения равновесия u_i , матрицу обратных индуктивностей K на матрицу упругих констант Φ и матрицу емкостей C на матрицу масс M . Единственное дополнительное условие, принципиально различающее эти две задачи — матрица масс должна быть диагональна: $M_{ii} = m_i$. Тогда получаем хорошо известную систему колебательных уравнений (в скалярном варианте)

$$m_i \ddot{u}_i = - \sum_j \Phi_{ij} u_j. \quad (31)$$

5. Диполь-дипольное взаимодействие резонансов

Далее в работе рассмотрим диапазон низких частот $\omega \ll \omega_p$ и вместо параллельных LC -контуров сопоставим участкам металла индуктивности L , как это было проделано в цитируемых ранее работах. Для начала рассмотрим одиночную индуктивную связь L в бесконечной двумерной квадратной решетке из одинаковых емкостей C (рис. 2, *a*). Распределение электрического поля, создаваемого такой индуктивной связью в решетке емкостей, совпадает с полем осциллирующего диполя с зарядами, расположенными на концах катушки L [11] (рис. 2, *b*).

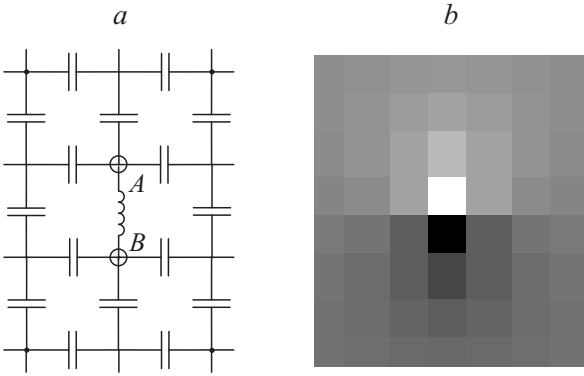


Рис. 2. Вид LC -сети (a) и собственный вектор, соответствующий резонансной частоте $\omega_0 = 1$ (в единицах $L = C = 1$), отражающий распределение потенциала в узлах решетки (b). Белый цвет отвечает положительному потенциалу, черный — отрицательному

В работах [5,6] было показано, что резонансная частота такой системы $\omega_0 = c/\sqrt{LC}$. Это связано с тем, что эффективная емкость квадратной решетки из одинаковых конденсаторов C между узлами A и B , $C_{eff} = C$ [11]. Очевидно, что эффективная емкость зависит от типа решетки и от размерности пространства. В точности аналогичная ситуация имеет место при рассмотрении системы, состоящей из одного конденсатора C в квадратной решетке из одинаковых индуктивностей L .

Рассмотрим теперь систему, состоящую из двух одинаковых L -связей, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Ввиду диполь-дипольного взаимодействия двух резонансов частоты, отвечающие этим связям, расщепляются на две частоты, соответствующие симметричной и антисимметричной моде. В работе [5] приводится аналитическое выражение для константы связи между такими одиночными диполями. Как следует из двумерной электростатики, эта константа убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между диполями. Зависимость расщепления от расстояния между ними также была численно продемонстрирована в [10]. В данном разделе мы хотим обобщить эти результаты на случай различных значений двух индуктивностей $L_1 \neq L_2$.

Как было показано в работах [5,6], при рассмотрении случайных LC -сетей с одинаковыми значениями L и C более удобным оказывается использование вместо частоты ω безразмерной переменной λ , связанной с частотой соотношением

$$\lambda = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 + (\omega/\omega_0)^2}. \quad (32)$$

Здесь $\omega_0 = c/\sqrt{LC}$ — значение частоты, отвечающее $\lambda = 0.5$. При этом $\omega = 0$ отвечает $\lambda = 0$, а значению $\omega = \infty$ отвечает значение $\lambda = 1$. Удобство такого преобразования связано с тем, что случайные сети большого размера обладают широким спектром различных

резонансных частот $0 < \omega < \infty$, при этом значение переменной λ всегда находится в интервале $0 < \lambda < 1$.

Рассмотрим систему, состоящую из двух различных индуктивных связей L_1 и L_2 , расположенных в решетке одинаковых емкостей C . Для примера рассмотрим случай, когда индуктивности расположены друг напротив друга на расстоянии двух постоянных решетки и занимают параллельные ребра. Покажем, как при этом модифицируется эффект расщепления резонансов при изменении значений индуктивностей. Зафиксируем для определенности произведение их значений $L_1 L_2 = 1$ ($C = 1$) и будем изменять одно из них. Асимптотики резонансных частот (в пренебрежении взаимодействием между резонансами) получаются подстановкой L_1 и $L_2 = 1/L_1$ в выражение (32) и имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + L_1}, \quad \lambda_2 = \frac{L_1}{1 + L_1}. \quad (33)$$

Из этой формулы следует, что в частном случае, когда $L_1 = L_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$. При учете взаимодействия

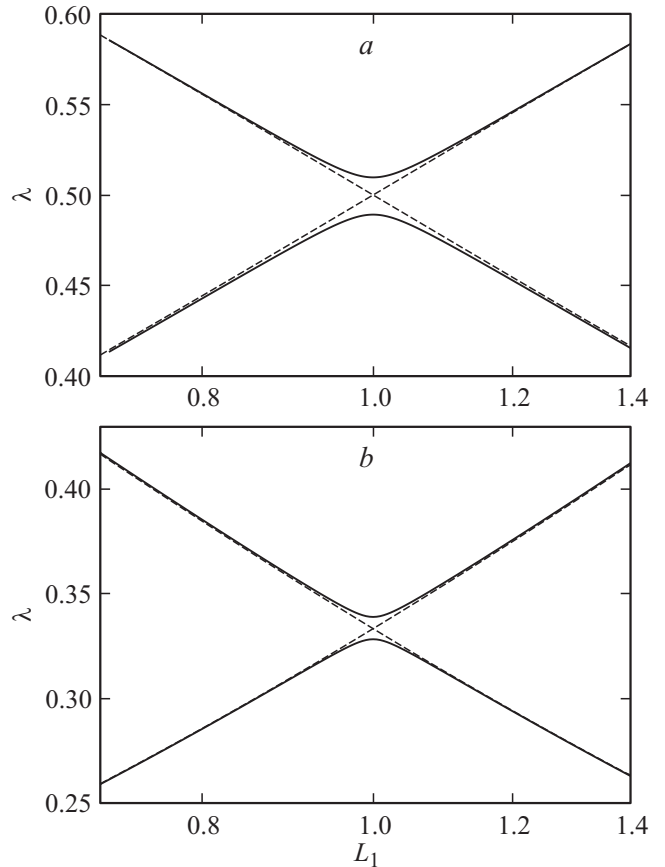


Рис. 3. Антикроссинг частот для двух индуктивных связей $L_1 = 1/L_2$ в решетке из одинаковых конденсаторов C . a — двумерная квадратная решетка; b — трехмерная простая кубическая решетка. Пунктиром обозначены асимптотики, задаваемые выражением (33) для случая a и выражением (34) для случая b . Результат численного расчета для сети размером 50×50 узлов в случае a и $15 \times 15 \times 15$ узлов в случае b с циклическими граничными условиями по всем направлениям.

между резонансами видна типичная картина антикроссинга, полученная путем численного решения системы уравнений (30) и показанная на рис. 3, *a*.

Аналогичная ситуация имеет место в трехмерной кубической решетке, с той лишь разницей, что $\omega_0 = c/\sqrt{2LC}$ ввиду того, что эффективная емкость кубической решетки между двумя соседними узлами $C_{eff} = 2C$. Асимптотики частот в этом случае имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + 2L_1}, \quad \lambda_2 = \frac{L_1}{1 + 2L_1}. \quad (34)$$

Численный расчет расщепления показан на рис. 3, *b*.

Как показано в работах [6,13], распределение локальных электрических полей в случайных LC-сетях (с одинаковыми значениями L и C) описывается мультифрактальной статистикой. Из работ [19,20] следует, что причиной мультифрактальности является диполь-дипольное взаимодействие резонансных кластеров в системе.

6. Спектральная плотность резонансов

Спектральная плотность резонансов $\rho(\lambda)$ (или $\rho(\omega)$) в рассматриваемых сетях представляет интерес, так как ее вид связан с видом спектра поглощения исходного композита. Количество резонансов и их форма в случайных LC-сетях зависят от концентрации L - и C -связей, а также от локальной геометрии L - и C -кластеров [6]. Вид и свойства $\rho(\lambda)$ для случайных LC-сетей с одинаковыми значениями L и C были подробно исследованы в работе [6]. В частности, в спектральной плотности резонансов имеются характерные пики (рис. 4, *a*), отвечающие простым конфигурациям индуктивных кластеров в решетке из емкостей. При низких концентрациях индуктивностей p они хорошо выражены, однако при приближении к порогу перколяции $p = 0.5$ пики стираются.

Кроме того, спектральная плотность резонансов $\rho(\lambda)$ в случайных сетях демонстрирует ряд симметрий, которые будут подобно рассмотрены в следующем разделе. В частности, в сетях с одинаковыми значениями L и C , имеющих топологию квадратной решетки, $\rho(\lambda)$ симметрична относительно середины спектра $\lambda = 0.5$, отвечающей частоте $\omega = \omega_0$, и имеет одинаковый вид для концентраций p и $1 - p$.

Исследуем теперь более общий случай, когда L (и C) могут принимать различные значения. Заметим, что вид спектральной плотности резонансов $\rho(\lambda)$ в силу преобразования (32) зависит от выбора значения ω_0 . Определим, как осуществить этот выбор, чтобы по возможности не потерять свойственные $\rho(\lambda)$ симметрии. Пусть заданы две частоты ω_1 и ω_2 из интервала $(0, \infty)$. Определим, каким нужно выбрать значение ω_0 в преобразовании (32), чтобы соответствующие им величины λ_1 и λ_2 были расположены симметрично относительно

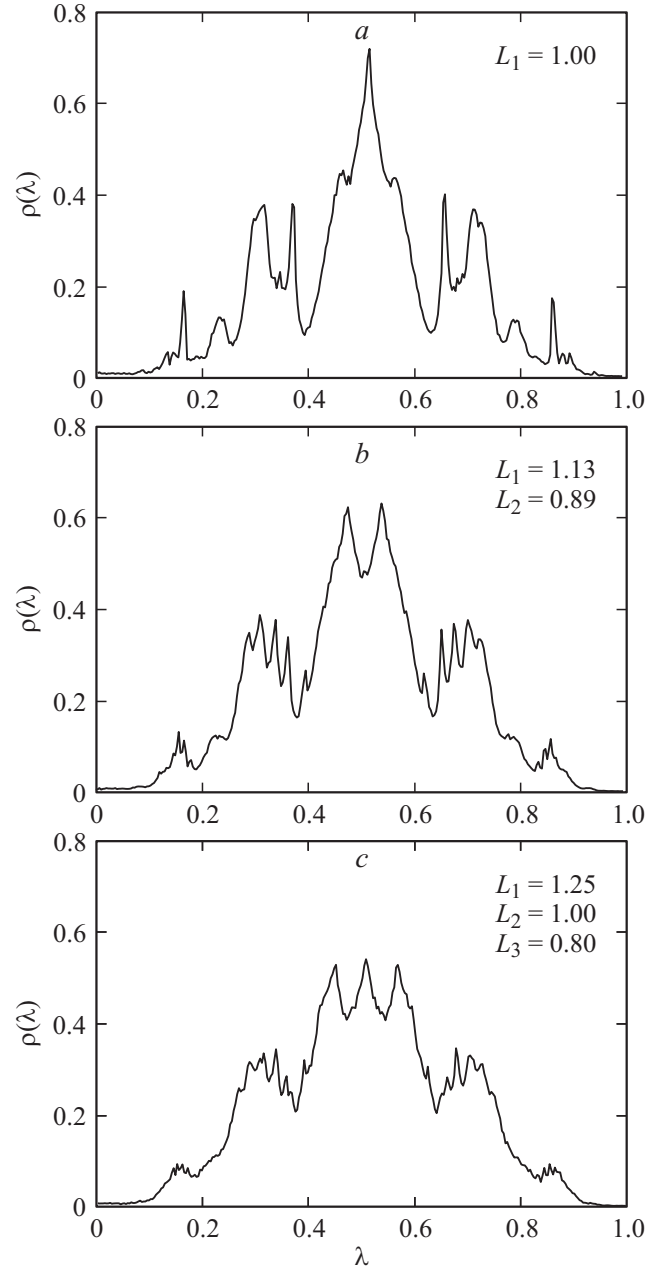


Рис. 4. *a* — спектральная плотность резонансов $\rho(\lambda)$ для LC-сетей с одинаковыми значениями $L, C = 1$ при концентрации индуктивных связей $p = 0.1$; *b, c* — спектральная плотность резонансов для LC-сетей с дискретным распределением значений индуктивных связей L в решетке из одинаковых конденсаторов $C = 1$. Суммарная концентрация индуктивных связей в каждом случае $p = 0.1$. Для случая *b* $p_1 = p_2 = 0.05$, в случае *c* $p_1 = p_2 = p_3 = 0.033$.

$\lambda = 0.5$, то есть удовлетворяли условию $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Уравнение

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 \quad (35)$$

запишем в виде

$$\frac{(\omega_1/\omega_0)^2}{1 + (\omega_1/\omega_0)^2} = \frac{1}{1 + (\omega_2/\omega_0)^2}. \quad (36)$$

Его решением является

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}. \quad (37)$$

Таким образом, две частоты ω_1 и ω_2 будут симметричны относительно $\lambda = 0.5$, если ω_0 выбрано как их среднее геометрическое.

Отсюда следует, что в случае трех частот для наличия такой симметрии необходимо выполнение условия

$$\omega_0 = \omega_3 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}, \quad (38)$$

а в случае четырех — равенства средних геометрических

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{\omega_3 \omega_4}. \quad (39)$$

Обобщение на случай произвольного числа частот очевидно. Для удобства дальнейшего рассмотрения будем выбирать частоты таким образом, чтобы их среднее геометрическое равнялось единице. Исследование спектральной плотности состояний для сетей с различными значениями L и C будем проводить, численно решая задачу (30). Все расчеты в этом разделе произведены для квадратных решеток размером 23×23 узла с циклическими граничными условиями в обоих направлениях и усреднением по 5 тысячам реализаций для каждого случая.

Для начала рассмотрим LC -сеть со случайно расположенными L - и C -связями, в которой индуктивности равновероятно принимают два разных значения (рис. 4, *b*). В таком случае характерные пики в спектральной плотности состояний расщепляются надвое. Положения двух центральных пиков соответствуют частотам $\omega_1 = c/\sqrt{L_1 C}$ и $\omega_2 = c/\sqrt{L_2 C}$, отвечающим новым резонансным частотам невзаимодействующих диполей (одиночных L -связей в C -решетке). Таким образом, величина расщепления пропорциональна разнице значений $1/\sqrt{L_1} - 1/\sqrt{L_2}$ (рис. 5).

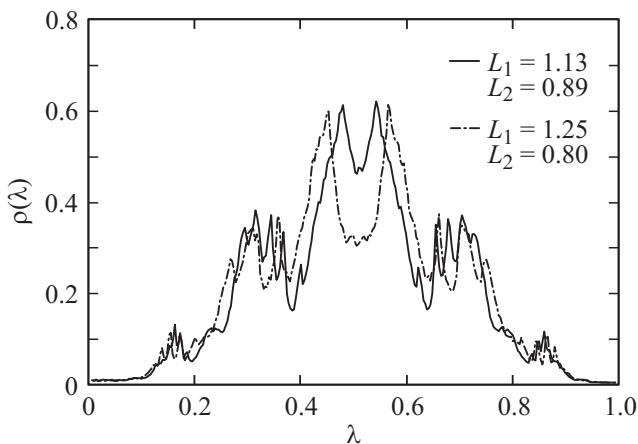


Рис. 5. Сравнение расщеплений для двух дискретных распределений значений L в решетке из одинаковых конденсаторов $C = 1$. Концентрации индуктивных связей L_1 и L_2 для обеих кривых равны $p_1 = p_2 = 0.05$.

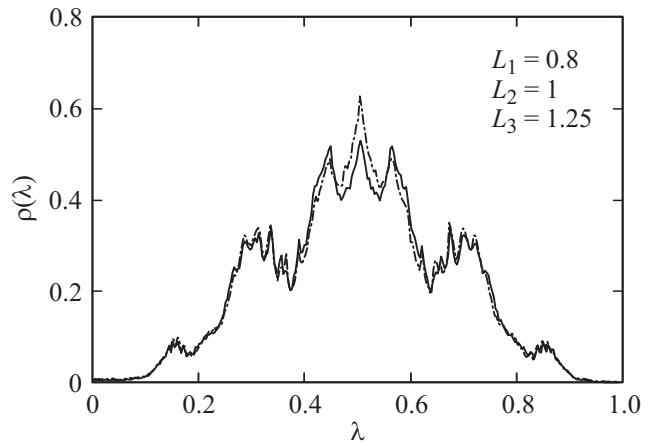


Рис. 6. Сравнение расщеплений для двух дискретных распределений значений L в решетке из одинаковых конденсаторов $C = 1$. Концентрация индуктивных связей для сплошной кривой $p_1 = p_2 = p_3 = 0.033$, для штрихпунктирной $p_1 = p_3 = 0.025$, $p_2 = 0.05$.

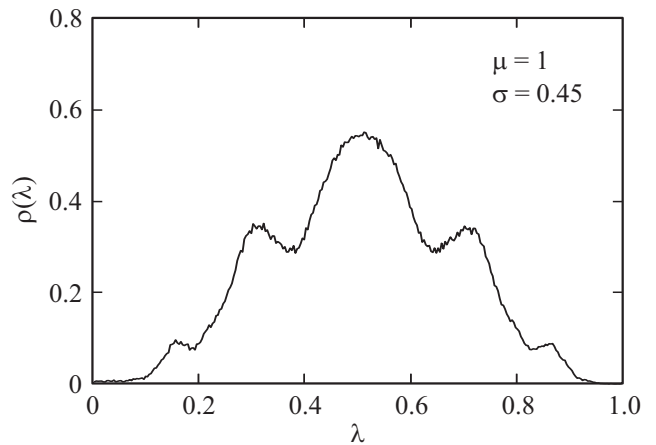


Рис. 7. Спектральная плотность резонансов для случайных LC -сетей с $C = 1$ и значениями L , распределенными следующим образом: значения половины индуктивностей распределены по Гауссу со средним значением $\mu = 1$ и дисперсией $\sigma = 0.45$ (отрицательные значения отброшены), для остальной половины индуктивностей $1/L$ распределены по Гауссу со средним значением $\mu = 1$ и дисперсией $\sigma = 0.45$. Суммарная концентрация индуктивностей $p = 0.1$.

В случае, когда номиналы индуктивных связей принимают одно из трех равновероятных значений, центральный пик расщепляется на три (рис. 4, *c*). Если дискретные значения индуктивностей не равновероятны, высоты отщепленных пиков также будут отличаться (рис. 6). Аналогичные картины наблюдаются и при другом количестве значений L в дискретном распределении. При дискретном распределении емкостей в решетке из индуктивностей наблюдаются схожие результаты.

Если значения L распределены непрерывно, все характерные пики сглаживаются. Это показано на рис. 7, на котором приведен пример для случая сети, половина

значений индуктивностей L в которой распределены по Гауссу (с отбрасыванием отрицательных значений), а другая половина — так что $1/L$ распределены по Гауссу. Такая модификация распределения является естественным обобщением условия сохранения симметрии $\rho(\lambda)$ на непрерывный случай.

7. Соотношения однородности и дуальность

Как было сказано ранее, спектральная плотность резонансов в случайных LC -сетях обладает некоторыми симметриями. В частности, имеют место соотношения

$$\rho(1 - p, 1 - \lambda) = \rho(p, \lambda), \quad (40)$$

полученные в работе [6] и названные там соотношениями однородности. Они справедливы для любой регулярной решетки (в том числе, для систем более высокой размерности). Рассмотрим ниже причину появления этих соотношений с точки зрения нашей модели.

При замене концентрации индуктивностей (или емкостей) p на $1 - p$ в случае одинаковых значений всех L и C матрицы C и K меняются местами, и уравнение для нахождения собственных частот (30) принимает вид (в системе единиц $c = 1$)

$$\det(C - \omega^2 K) = 0. \quad (41)$$

Домножая обе части на $1/\omega^2$, приходим к уравнению

$$\det\left(K - \frac{1}{\omega^2} C\right) = 0, \quad (42)$$

которое отличается от уравнения (30) заменой частоты ω на $1/\omega$. Это соответствует замене $\lambda \rightarrow 1 - \lambda$. В результате, получаем соотношение (40).

В более общем случае то же утверждение выполнено в случае различных значений L и C , когда матрицы K и C статистически эквивалентны (обладают одинаковыми распределениями значений элементов) и их можно переставить при замене $p \rightarrow 1 - p$.

Отметим, что из этих соотношений не следует симметрия $\rho(\lambda)$ относительно значения $\lambda = 0.5$ для произвольного значения p , являющаяся следствием особой симметрии, свойственной только двумерной квадратной решетке, — дуальности. Основы этой концепции для непрерывных систем были заложены в работе [21], позднее данная симметрия была использована при изучении дискретных сетей из сопротивлений [22] и применительно к резонансам в случайных LC -сетях [6].

8. Логарифмическая сингулярность в плотности резонансов

Рассмотрим двумерную случайную LC -сеть на пороге перколяции ($p_L = p_C = 0.5$ для квадратной решетки)

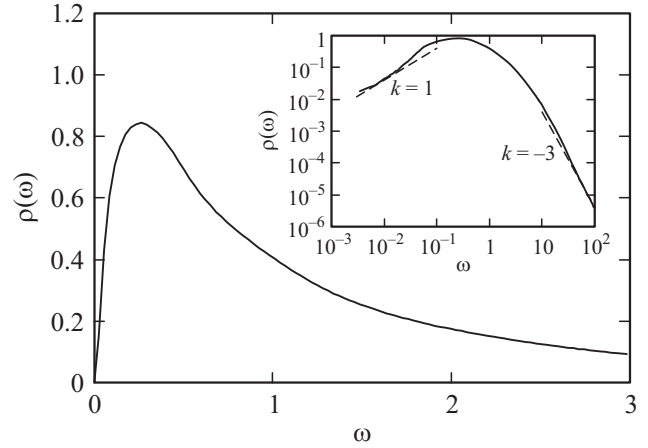


Рис. 8. Спектральная плотность резонансов по переменной ω для перколирующей LC -сети с равномерно распределенными в интервале $(0, 1)$ значениями $1/L$ и C . На вставке эта же плотность резонансов показана в двойном логарифмическом масштабе с изображением предсказанных степенных асимптотик. Коэффициент k обозначает тангенс угла наклона штриховых прямых в указанных координатах.

с равномерно распределенными значениями обратных индуктивностей $1/L$ и емкостей C в интервале $(0, 1)$. Такая модель отвечает случаю композита с металлическими гранулами, размер которых равномерно распределен от исчезающе малого до некоторого характерного, с диэлектрическими промежутками между ними, размер которых также распределен равномерно от нулевого до характерного, определяемого объемной концентрацией металлических гранул.

Вид спектральной плотности резонансов по частоте ω приведен на рис. 8. Она обладает гладким максимумом на частоте $\omega \approx 0.25$. В простейшем приближении, не учитывающем локальную геометрию сети, спектральная плотность резонансов задается выражением

$$\rho(\lambda) = \int_0^1 d\left(\frac{1}{L}\right) \int_0^1 dC \delta\left(\lambda - \frac{1}{1 + LC}\right) \quad (43)$$

по переменной λ и выражением

$$\rho(\omega) = \int_0^1 d\left(\frac{1}{L}\right) \int_0^1 dC \delta\left(\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) \quad (44)$$

по частоте ω , которое дает асимптотики $\rho(\omega) \propto \omega$ для низких частот и $\rho(\omega) \propto 1/\omega^3$ в области высоких частот. На первый взгляд это качественно совпадает с результатами численного расчета, показанными на рис. 8 в ограниченной области частот.

Однако на краях спектра по λ спектральная плотность резонансов $\rho(\lambda)$ качественно и количественно отличается от плотности резонансов в случае одинаковых значе-

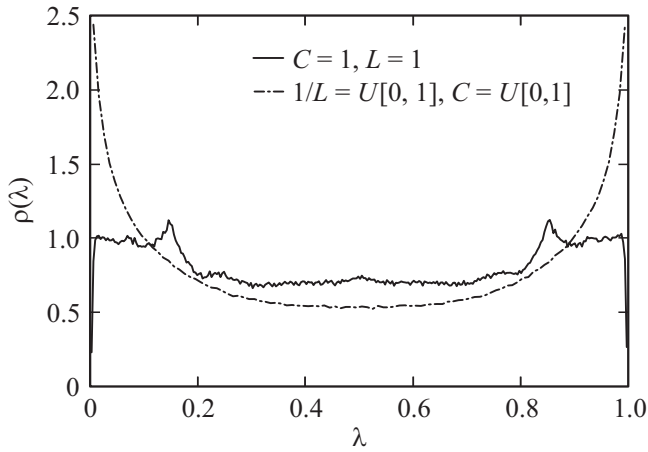


Рис. 9. Спектральная плотность резонансов для перколирующей LC -сети по переменной λ в случае одинаковых (сплошная кривая) и равномерно распределенных (штрихпунктирная кривая) значений $1/L$ и C .

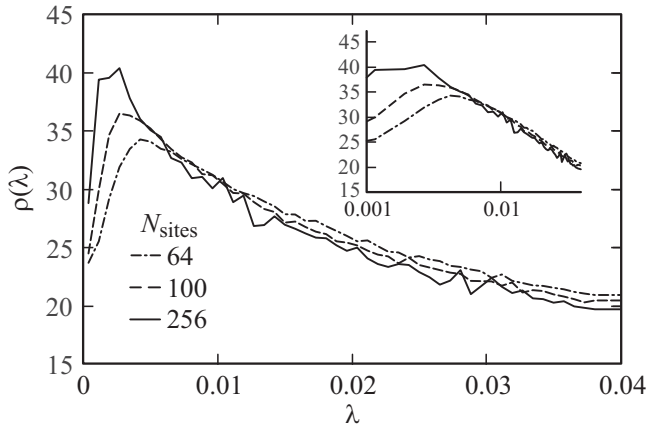


Рис. 10. Спектральная плотность резонансов для перколирующих LC -сетей различных размеров в случае $1/L, C = U[0, 1]$. Число $N_{sites} = M^2$ обозначает количество узлов в квадратной решетке размером $M \times M$. На вставке приведен график в логарифмическом масштабе по λ .

ний L и C (рис. 9) и от приближенной формулы (43), не учитывающей локальную геометрию сети. На краях спектральной плотности резонансов в случае одинаковых значений L и C присутствуют хвосты Лифшица [6], экспоненциально убывающие в 0. Кривая плотности резонансов по λ для случая равномерно распределенных значений $1/L$ и C , задаваемая формулой (43), в явном виде описывается выражением

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-\lambda)^2}, & 0 < \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\lambda^2}, & \frac{1}{2} < \lambda < 1 \end{cases} \quad (45)$$

и достигает своего наименьшего значения на концах спектра. В то же время на краях полученного численно спектра видны высокие пики, которые с ростом размера

системы становятся все выше и смещаются все ближе к краям спектра (рис. 10), что позволяет считать, что в пределе сети бесконечного размера они переходят в сингулярности. Как видно из вставки к рис. 10, хвосты этих расходимостей имеют логарифмическую форму, так как в логарифмическом по λ масштабе ложатся на прямую.

Логарифмическая сингулярность в плотности состояний на малых частотах впервые была обнаружена при исследовании колебаний в неупорядоченных одномерных механических цепочках [23]. Также подобные сингулярности наблюдаются в неупорядоченных механических системах более высоких размерностей и в электронных системах. Это говорит о сходстве случайных LC -сетей с другими неупорядоченными системами.

9. Заключение

В данной работе обобщена на случай произвольных значений L и C использованная ранее в ряде работ модель, состоящая в замене металл–диэлектрического композита дискретной LC -сетью, и представлен прямой вывод такого представления из уравнений Максвелла для исходного композита в квазистатическом приближении.

При исследовании диполь–дипольного (в рамках двумерной и трехмерной электростатики) взаимодействия двух одиночных индуктивностей с различными значениями в решетке из одинаковых емкостей получена полная картина антикроссинга частот. В предшествующих работах [5] было дано только выражение для величины расщепления частот при взаимодействии одинаковых индуктивностей.

При исследовании спектральных характеристик сетей в виде квадратных решеток из случайно расположенных емкостей и индуктивностей, принимающих дискретный спектр значений, обнаруживается расщепление характерных пиков в спектральной плотности резонансов. Примечательно, что при некоторых ограничениях на распределение случайных значений (наложенных для того, чтобы не нарушать симметрию спектральной плотности по λ самим преобразованием частот) симметрия плотности резонансов относительно $\lambda = 0.5$ для произвольной концентрации p (а следовательно, дуальность) сохраняется даже в случае, когда элементы одного типа (например, индуктивности L) принимают различные значения, а значения элементов другого типа одинаковы.

Спектральная плотность резонансов по частотной переменной λ для перколирующих сетей в случае непрерывно распределенных значений L и C демонстрирует наличие логарифмических особенностей на краях спектра, отсутствующих в случае перколирующих сетей с одинаковыми значениями индуктивностей и емкостей.

Авторы выражают благодарность В.И. Козубу за многочисленные ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] M.I. Stockman. *Phys. Today*, **64**, 39 (2011).
- [2] V.M. Shalaev. *Phys. Rep.* **272**, 61 (1996).
- [3] P. Gadenne, Y. Yagil, G. Deutcher. *J. Appl. Phys.* **66**, 3019 (1989).
- [4] A.K. Sarychev, V.M. Shalaev. *Phys. Rep.* **335**, 275 (2000).
- [5] J.P. Clerc, G. Giraud, J.M. Luck, Th. Robin. *J. Phys. A* **29**, 4781 (1996).
- [6] Th. Jonckheere, J.M. Luck. *J. Phys. A* **31**, 3687 (1998).
- [7] Yan V. Fyodorov. *J. Phys. A* **32**, 7429 (1999).
- [8] Yan V. Fyodorov. *Physica E* **9**, 609 (2001).
- [9] J. Ståring, B. Mehlig, Yan V. Fyodorov, J.M. Luck. *Phys. Rev. E* **67**, 047 101 (2003).
- [10] L. Raymond, J.M. Laugier, S. Schafer, G. Albinet. *Eur. Phys. J. B* **31**, 355 (2003).
- [11] S. Schafer, L. Raymond, G. Albinet. *Eur. Phys. J. B* **43**, 81 (2005).
- [12] C. Caloz, T. Itoh. *Electromagnetic metamaterials: Transmission line theory and microwave applications*. Wiley-Interscience, (2006). 352 p.
- [13] Y. Gu, K.W. Yu, Z.R. Yang. *Phys. Rev. B* **66**, 012 202 (2002).
- [14] E.F. Shender. *J.Phys. C* **11**, L423 (1978).
- [15] S. Kirkpatrick. *Rev. Mod. Phys.* **45**, 574 (1973).
- [16] J.T. Chalker, T.S. Pickles, Pragma Shukla. *Phys. Rev. B* **82**, 104 209 (2010).
- [17] X.C. Zeng, P.M. Hui, D. Stroud. *Phys. Rev. B* **39**, 1063 (1989).
- [18] J. Zhou, Th. Koschny, M. Kafesaki, E.N. Economou, J.B. Pendry, C.M. Soukoulis. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 223 902 (2005).
- [19] L.S. Levitov. *Europhys. Lett.* **9**, 83 (1989).
- [20] D.A. Parshin, H.R. Schober. *Phys. Rev. B* **57**, 10 232 (1998).
- [21] A.M. Dykhne. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **59**, 110 (1970).
- [22] J.P. Straley. *Phys. Rev. B* **15**, 5733 (1977).
- [23] F.J. Dyson. *Phys. Rev.* **92**, 1331 (1953).