15

Вращательные релаксационные процессы в тонких свободно подвешенных SmC-пленках

© А.В. Захаров, А.А. Вакуленко

Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: avak2vale@mail.ru

(Поступила в Редакцию 22 июня 2015 г.)

Предложено теоретическое описание процесса переориентации **c**-директора и тангенциальной компоненты вектора скорости в гибридно ориентированной SmC-пленке, натянутой между вращающейся внутренней и неподвижной внешней рамками. В рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксена–Лесли на случай смектических фаз показано, что на величину и характер переориентации поля **c**-директора и формирование гидродинамических течений в таких SmC-пленках сильное влияние оказывают как кривизна, так и направление вращения внутренней рамки.

1. Введение

Тонкие свободно подвешенные смектические пленки являются очень привлекательными объектами для изучения, поскольку, с одной стороны, представляют собой образцы практически идеальных квазидвумерных анизотропных жидкостей [1–5], а с другой стороны, широко используются в жидкокристаллических (ЖК)-дисплеях и оптоэлектронике, а также при создании различных сенсоров, термоиндикаторов и детекторов давления, применяемых в медицинской диагностике и биологических лабораториях на чипах (Lab-on-a-chip) [6,7]. Основным элементом таких сенсоров и датчиков являются тонкие смектические C (SmC)-пленки, поверхность которых служит эффективным манипулятором как структурных, так динамических и оптических свойств этих приборов. На формирование течений в этих SmC-пленках, возникающих в процессе переориентации поля директора, оказывают сильное влияние внешние силы, такие как электрические поля или механические воздействия. Не менее важным фактором, который оказывает влияние на переориентацию поля директора является геометрия ЖК-пленки [1,2,5]. В свою очередь, инициируемые в SmC-пленках гидродинамические течения также искажают ориентацию поля директора, и тем самым влияют на оптические, диэлектрические и структурные свойства этих смектических пленок. Для того, чтобы создать механическим способом ориентационное искажение поля директора смектическую пленку натягивают между двумя жесткими рамками круговой формы радиусов R_1 (внутренняя рамка) и R_2 (внешняя рамка), причем радиус внутренней рамки R_1 часто выбирают значительно меньше радиуса внешней рамки R_2. Затем внутреннюю круговую рамку заставляют вращаться с угловой скоростью ω, в то время как внешнюю рамку оставляют неподвижной (см. рис. 1, *a*). При этом были экспериментально исследованы различные условия сцепления ЖК-молекул как с вращающейся, так и неподвижной рамками, а также было изучено влияние скорости вращения внутренней круговой рамки на характер переориентации поля директора смектической пленки [1,5]. Также было изучено влияние скорости вращения и радиуса круговой рамки на величину и направление гидродинамических потоков, формирующихся в этих смектических пленках [1,5].

При этом было показано, что основным физическим механизмом, ответственным за возникновение гидродинамических потоков в свободно подвешенных смектических пленках, является взаимодействие градиентов поля **c**-директора и тангенциальной компоненты вектора скорости [1,5]. Следует отметить, что текстура такой SmC-пленки полностью описывается единичным вектором $\hat{\mathbf{c}}(t, \mathbf{r})$ (**c**-директором), представляющим собой проекцию директора $\hat{\mathbf{n}}(t, \mathbf{r})$ на плоскость XOY, в которой лежит смектическая пленка (см. рис. 1, *b*). При этом следует отметить, что локальная ориентация поля **c**-директора $\hat{\mathbf{c}}(t, \mathbf{r})$ задает направление азимутальной оптической оси и может быть зафиксирована с помощью поляризационного микроскопа [5]. Искажения

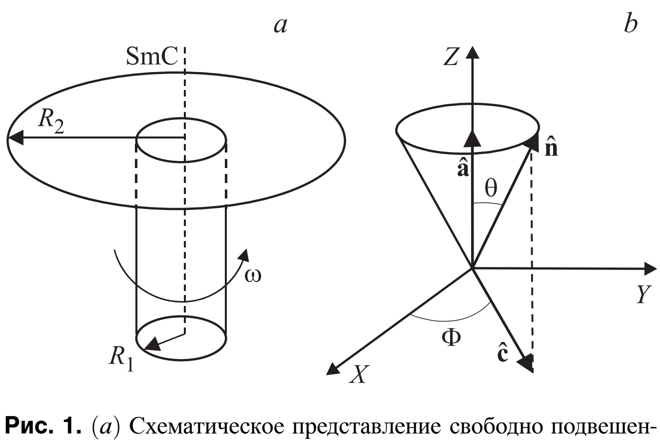

Рис. 1. (*a*) Схематическое представление свободно подвешенной SmC-пленки. (*b*) Система координат, используемая при вычислениях.

поля **c**-директора, вызванные гидродинамическими потоками, в свою очередь, создают дополнительные упругие напряжения. Поэтому всесторонние исследования динамических режимов релаксации поля **c**-директора и гидродинамических потоков, возникающих в свободно подвешенных смектических пленках, позволят улучшить как оптические, так и динамические характеристики сенсоров, термоиндикаторов и датчиков, применяемых, например, в медицинской диагностике и биологических лабораториях на чипах.

Целью нашего исследования является описание эволюции как поля **c**-директора $\hat{\mathbf{c}}(t, \mathbf{r})$, так и поля скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, возникающих в свободно подвешенных SmC-пленках, натянутых между двумя рамками круговой формы микрометровых размеров и инициируемых вращением внутренней круговой рамки с угловой скоростью ω. Это будет осуществлено в рамках классической теории Эриксена–Лесли [8,9] с учетом балансов массы, импульсов и угловых моментов, действующих на единицу объема ЖК-материала [10].

Численные исследования характера переориентации поля **c**-директора и формирования гидродинамических потоков в свободно подвешенных SmC-пленках микрометровых размеров будут проведены для различных режимов вращения и размеров внутренней круговой рамки.

2. Основные уравнения

Рассмотрим SmC-пленку шириной d, натянутую между двумя круговыми рамками радиусов R_1 и R_2 ($R_1 \ll R_2$) (см. рис. 1, *a*). В нашем случае радиус внутренней круговой рамки значительно меньше радиуса внешней рамки и директор $\hat{\mathbf{n}}(t, \mathbf{r})$ смектической пленки образует фиксированный угол θ с осью Z и нормалью $\hat{\mathbf{e}}_z$ к SmC-пленке (см. рис. 1, *b*). В цилиндрической системе координат выражение для поля директора $\hat{\mathbf{n}}$ может быть записано в виде $\hat{\mathbf{n}}(t, \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{a}} \cos\theta + \hat{\mathbf{c}}(t, \mathbf{r}) \sin\theta$. Здесь $\hat{\mathbf{c}}(t, \mathbf{r})$ – **c**-директор, а единичный вектор $\hat{\mathbf{a}}$ совпадает с нормалью к поверхности смектической пленки, т. е. $\hat{\mathbf{a}} \parallel \hat{\mathbf{e}}_z$. Эволюция **c**-директора $\hat{\mathbf{c}}(t, \mathbf{r}) = \cos\Phi(t, \mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_r + \sin\Phi(t, \mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ описывается азимутальным углом $\Phi(t, \mathbf{r})$ (см. рис. 1, *b*), где $\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_r$, а $\hat{\mathbf{e}}_z$ и $\hat{\mathbf{e}}_r$ — единичные орты. Поскольку переориентация **c**-директора $\hat{\mathbf{c}}(t, \mathbf{r})$ и вектора скорости осуществляется в плоскости SmC-пленки, то выражение для вектора скорости может быть записано в виде $\mathbf{v} = v_r(t, \mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_r + v_\varphi(t, \mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_\varphi$. Таким образом формирующееся в смектической пленке гидродинамическое течение $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, обусловленное вращением внутренней круговой рамки радиуса R_1, с последующей переориентацией **c**-директора $\hat{\mathbf{c}}(t, \mathbf{r})$, может быть описано в рамках обобщенной теории Эриксена–Лесли [8,9], которая учитывает баланс массы, импульсов и угловых моментов, действующих на единицу объема ЖК-образца. Принимая во внимание микроскопические размеры SmC-пленки, мы можем предположить, что плотность ЖК-системы постоянна и, таким образом, мы имеем дело с несжимаемой жидкостью. Это позволяет нам записать уравнения сохранения в виде [10]

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{T}^i_{\mathrm{el}} + \mathbf{T}^i_{\mathrm{vis}} = 0, \tag{2}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot \sigma^{\mathrm{vis}} + \nabla \hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{g}^c, \tag{3}$$

где $\mathbf{T}^i_{\mathrm{el}}$ и $\mathbf{T}^i_{\mathrm{vis}}$ — упругие и вязкие вклады в баланс моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, относительно векторов $\hat{\mathbf{c}}$ $(i = c)$ и $\hat{\mathbf{a}}$ $(i = a)$ соответственно. Детали вычислений импульсов и моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, приведены в Приложении (см. уравнения (П1)–(П4)), ρ — плотность ЖК-фазы, σ^{vis} — тензор вязких напряжений (см. уравнения (П5)–(П9)), $\tilde{p} = p + W_{\mathrm{el}}$, p-гидростатическое давление в ЖК-системе, W_{el} — плотность упругой энергии (см. уравнение (П10)), а $\mathbf{g}^c$ — вспомогательный вектор (см. уравнение (П11)) соответственно.

При выполнении условия несжимаемости (см. уравнение (1)) поле скорости принимает вид $\mathbf{v} = v_\varphi(t, \mathbf{r})\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ и удовлетворяет условию прилипания на неподвижной внешней рамке, а его тангенциальная компонента равна значению линейной скорости вращения на внутренней круговой рамке, т. е.

$$v_\varphi(t, r)_{r=R_2} = 0, \quad v_\varphi(t, r)_{r=R_1} = R_1\omega. \tag{4}$$

Граничные условия для азимутального угла имеют вид

$$\Phi(t, r)_{r=R_1} = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi(t, r)_{r=R_2} = 0, \tag{5}$$

т. е. мы имеем дело с гибридно ориентированным ЖК-образцом.

Система безразмерных уравнений, описывающих эволюцию поля **c**-директора и скорости для случая вращающейся внутренней круговой рамки может быть записана в виде (см. Приложение, уравнения (П11) и (П15))

$$\Phi_{,\tau} = \Phi_{,rr}\mathscr{G} + \frac{K-1}{2}\Phi^2_{,r}\sin 2\Phi + \frac{\Phi_{,r}}{r}\mathscr{G} + \frac{K-1}{2}\frac{\sin 2\Phi}{r^2}$$
$$+ \frac{\cos 2\Phi}{2}\left[(1-\lambda)v_{\varphi,r} + (1+\lambda)\frac{v_\varphi}{r}\right] - \frac{\sin^2\Phi}{r}v_\varphi,$$
$$\mathscr{A}v_{\varphi,\tau} = f_1 v_{\varphi,rr} + f_2\frac{v_{\varphi,r}}{r} + f_3\frac{v_\varphi}{r^2} + f_4, \tag{6}$$

где $K = \frac{K_2}{K_3}$, K_2 и K_3 — коэффициенты упругости, описывающие деформацию **c**-директора в SmC-пленке, $\mathscr{G} = \cos^2\Phi + K\sin^2\Phi$, $\Phi_{,\tau} = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$, $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_5}$ — отношение коэффициентов вращательных вязкостей, $\bar{r} = r/d$ — безразмерное значение пространственной координаты, $\tau = t/t_\Phi$ — безразмерное время, $t_\Phi = \frac{2\lambda_5 d^2}{K_3}$ — характерное время переориентации поля **c**-директора, $\mathscr{A} = \frac{\rho K_3}{2\lambda_5^2}$, а выражения для коэффициентов f_i $(i = 1, \ldots, 4)$ даны в Приложении (см. уравнения (П16)−(П19)). Граничные условия для азимутального угла $\Phi(\tau, r)$ и скорости $\upsilon_\varphi(\tau, r)$ в безразмером виде могут быть записаны как

$$\Phi(\tau, r)_{r=\frac{R_1}{d}} = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi(\tau, r)_{r=\frac{R_2}{d}} = 0,$$

$$\upsilon_\varphi(\tau, r)_{r=\frac{R_1}{d}} = V_0, \quad \upsilon_\varphi(\tau, r)_{r=\frac{R_2}{d}} = 0, \qquad (7)$$

в то время как начальное условие имеет вид

$$\Phi(0, r) = \Phi_{\rm el}^{\rm eq}(r), \qquad (8)$$

где $\Phi_{\rm el}^{\rm eq}(r)$ — решение системы (6), соответствующее равновесному распределению азимутального угла по всей ширине смектической пленки с учетом только упругих сил и при отсутствии течения $\upsilon_\varphi(r)_{\frac{R_1}{d} \le r \le \frac{R_2}{d}} = 0$.

В качестве смектической С-пленки может быть использована пленка, образованная ЖК-молекулами, представляющими собой коммерческую смесь Felix 16 (Clariant) [5], которая допускает существование SmC-фазы при комнатных температурах и плотности $\rho \sim 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Значение полярного угла θ было выбрано равным 20°, а величины упругих и вязких коэффициентов для этих ЖК-материалов были оценены как [11] $K_2 = 0.64\,\mathrm{pN}$ и $K_3 = 1.58\,\mathrm{pN}$, $\mu_0 = 0.07$, $\mu_3 = 0.0001$, $\mu_4 = 0.002$, $\lambda_2 = -0.0041$ и $\lambda_5 = 0.004$ соответственно. Здесь все значения коэффициентов вязкости даны в [Pa s]. Значение радиуса внешней круговой рамки равно $R_2 = 500\,\mu m$, в то время как значения радиуса внутренней круговой рамки были выбраны равными $R_1 = 10$, 20 и $50\,\mu$m. Принимая во внимание микроскопическую ширину смектической пленки $d = R_2 - R_1$, характерное время $t_\Phi = \frac{2\lambda_5 d^2}{K_3}$, используемое при нормировке, может быть оценено в 1200 s, при ширине смектической SmC-пленки в $d = 490\,\mu$m, в 1150 s, при $d = 480\,\mu$m и в 1000 s, при $d = 450\,\mu$m. В наших расчетах величины коэффициентов $\mathscr{A} = \frac{\rho K_3}{2\lambda_5^2}$ и $\delta = \frac{\mu_3}{\lambda_5}$ могут быть оценены как: $\mathscr{A} \sim 4.6 \times 10^{-5}$ и $\delta \sim 0.025$. Угловая скорость вращения угловой рамки варьировалась от $\omega \sim 82$ rad/s, при $R_1 = 10\,\mu$m, до $\omega \sim 18$ rad/s при $R_1 = 50\,\mu$m.

Учитывая, что $\mathscr{A} \ll 1$, левой частью второго уравнения (6) можно пренебречь. А тот факт, что $\delta \ll 1$, позволяет также пренебречь некоторыми вкладами в коэффициенты $f_i (i = 1, \ldots, 4)$ (см. уравнения (П16)−(П19)).

3. Эволюция поля c-директора и скорости в SmC-пленке

Процесс переориентации поля **c**-директора и формирование гидродинамического потока, инициируемого вращающейся с постоянной безразмерной скоростью $V_0 = 2000$ внутренней круговой рамкой различных радиусов, описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (6) с

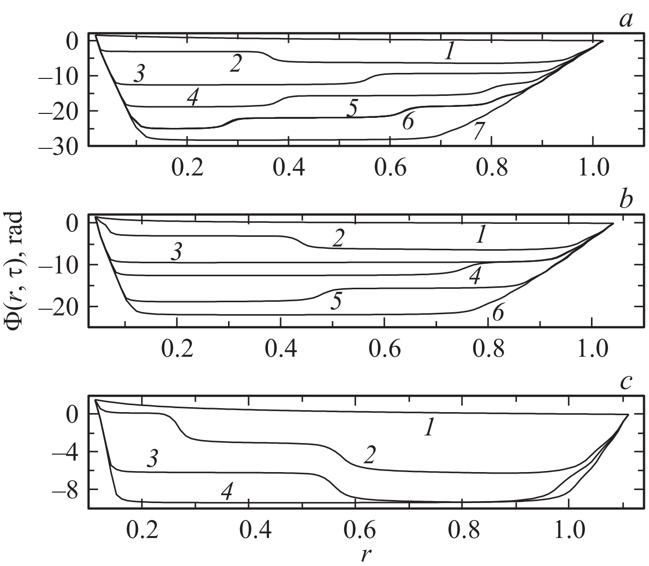

Рис. 2. Распределения азимутального угла $\Phi(\tau, r)$ по ширине свободно подвешенной смектической пленки, соответствующие различным моментам времени и различным значениям радиуса внутренней круговой рамки, вращающейся против часовой стрелки с безразмерной скоростью $V_0 = 2000$. (*a*) $R_1 = 10\,\mu$m, и (*1*) $\tau_1 = 10^{-6}$, (*2*) $\tau_2 = 0.005$, (*3*) $\tau_3 = 0.02$, (*4*) $\tau_4 = 0.03$, (*5*) $\tau_5 = 0.0373$, (*6*) $\tau_6 = 0.04$ и (*7*) $\tau_7 = \tau_R = 0.094$. (*b*) $R_1 = 20\,\mu$m, и (*1*) $\tau_1 = 10^{-6}$, (*2*) $\tau_2 = 0.005$, (*3*) $\tau_3 = 0.02$, (*4*) $\tau_4 = 0.03$, (*5*) $\tau_5 = 0.06$ и (*6*) $\tau_6 = \tau_R = 0.102$. (*c*) $R_1 = 50\,\mu$m и (*1*) $\tau_1 = 10^{-6}$, (*2*) $\tau_2 = 0.005$, (*3*) $\tau_3 = 0.01$ и (*4*) $\tau_4 = \tau_R = 0.037$.

учетом граничных (7) и начального (8) условий, и результаты расчетов представлены на рис. 2–7. Эта система была решена комбинацией методов релаксации и прогонки [12]. В начальный момент времени $\tau = 0$ было рассчитано распределение азимутального угла $\Phi_{\rm el}^{\rm eq}(r)$ по всей ширине SmC-пленки с помощью системы (6) при условии отсутствия гидродинамического течения $\upsilon_\varphi(r)_{\frac{R_1}{d} \le r \le \frac{R_2}{d}} = 0$, а условием сходимости итерационной процедуры была выбрана величина $\epsilon = |(\Phi_{m+1}(r) - \Phi_m(r))/\Phi_m(r)| \sim 10^{-4}$, где m — номер итерации. На рис. 2 представлены результаты расчета эволюции распределения поля **c**-директора в гибридно ориентированной свободно подвешенной SmC-пленке при постоянном значении безразмерной скорости $V_0 = 2000$ вращения внутренней круговой рамки. При этом радиус вращающейся против часовой стрелки (случай I) круговой рамки R_1 изменялся от 10 до $50\,\mu$m, а значения скорости вращения внутренней рамки изменялись от $\omega = 82$ rad/s до $\omega = 18$ rad/s. Процесс переориентации азимутального угла $\Phi(\tau, r)$ на безразмерных временах до $\tau_2 = 0.005$ характеризуется тем, что сильнее переориентируется область $(0.6 \le r \le 1.0)$, примыкающая к внешней неподвижной круговой рамке, вне зависимости от величины радиуса вращающейся рамки. По мере роста τ процесс переориентации начинает увлекать и области, примыкающие к внут-

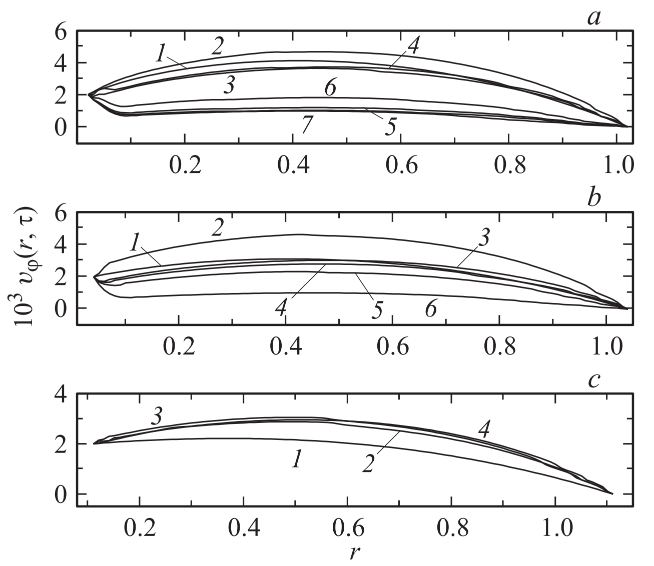

Рис. 3. Распределения тангенциальной компоненты вектора скорости $v_\phi(\tau, r)$ по ширине свободно подвешенной смектической пленки, соответствующие различным временам и величинам радиуса внутренней круговой рамки, представленным на рис. 2.

ренней вращающейся рамке. При достижении времен $\tau = \tau_R = \tau_i$ ($i = 7$ при $R_1 = 10\,\mu$m, $i = 6$ при $R_1 = 20\,\mu$m и $i = 4$ при $R_1 = 50\,\mu$m) азимутальный угол $\Phi(\tau, r)$ достигает максимальных значений: $\Phi_7^{\max} \sim 28.55$ rad, или ~ 4.5 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ по часовой стрелке при $R_1 = 10\,\mu$m, $\Phi_6^{\max} \sim 21.72$ rad, или ~ 3.5 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ по часовой стрелке при $R_1 = 20\,\mu$m и $\Phi_4^{\max} \sim 9.25$ rad, или ~ 1.5 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ по часовой стрелке при $R_1 = 50\,\mu$m соответственно. Здесь τ_R — величина времени, при котором система достигает равновесного состояния. На рис. 3 представлены результаты расчетов эволюции распределения тангенциальной компоненты вектора скорости $v_\varphi(\tau, r)$ для трех значений радиуса внутренней рамки R_1, вращающейся против часовой стрелки: (*a*) $10\,\mu$m, (*b*) $20\,\mu$m и (*c*) $50\,\mu$m соответственно. Для всех этих трех случаев безразмерная величина скорости вращения внутренней рамки равна 2000. На начальных временах эволюции до $\tau = \tau_3$ профили скорости $v_\varphi(\tau, r)$ представляют собой выпуклые положительно определенные функции с максимальными значениями, достигаемыми в середине пленки ($r \sim 0.5$) (см. рис. 3). Так, $v_\varphi^{\max}(R_1 = 10\,\mu\text{m}) \sim 3670$ ($\sim 1500\,\mu$m/s), $v_\varphi^{\max}(R_1 = 20\,\mu\text{m}) \sim 3030$ ($\sim 1260\,\mu$m/s) и $v_\varphi^{\max}(R_1 = 50\,\mu\text{m}) \sim 3080$ ($\sim 1380\,\mu$m/s) соответственно. По мере роста τ и уменьшения радиуса R_1 происходит качественное изменение формы профиля скорости $v_\varphi(\tau, r)$. Из профиля, характеризующегося выпуклой функцией в сторону положительных значений $v_\varphi(\tau = \tau_4 = \tau_R, r)$ при $R_1 = 50\,\mu$m (см. рис. 3, *c*), распределение скорости превращается в вогнутые профили с полностью отрицательными значениями по всей ширине смектической пленки, как при $R_1 = 10\,\mu$m (см. рис. 3, *a*), так и при $R_1 = 20\,\mu$m (см. рис. 3, *b*). Основываясь на наших расчетах, мы можем сделать заключение, что кривизна внутренней вращающейся рамки оказывает принципиальное влияние на характер распределения тангенциальной компоненты вектора скорости. На рис. 4 представлены результаты расчета эволюции азимутального угла $\Phi(\tau, r)$ в трех точках, удаленных на расстояния $r = 0.2$ (*1*), 0.5 (*2*) и 0.9 (*3*), соответствующие безразмерным единицам, отсчитанным от центра системы координат, и трех значений радиуса внутренней рамки: (*a*) $R_1 = 10\,\mu$m, (*b*) $20\,\mu$m и (*c*) $50\,\mu$m соответственно, причем внутренняя рамка вращалась против часовой стрелки с безразмерной скоростью $V_0 = 2000$ (случай I). Было показано, что для всех трех значений радиуса рамки, на начальном этапе эволюции ($\tau < 0.005$), **c**-директор закручивается сильнее по часовой стрелке относительно вектора $\hat{\mathbf{a}}$ в областях, примыкающих к неподвижной внешней рамке. На конечном этапе эволюции азимутального угла $\Phi(\tau, r)$ реализуется более сильное закручивание **c**-директора уже в областях, примыкающих к вращающейся внутренней рамке. При этом с увеличением радиуса R_1 закручивание убывает более чем в три раза, с $\Phi_{\text{eq}}^{\max} \sim 28.55$ rad, или ~ 4.5 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ по часовой стрелке при $R_1 = 10\,\mu$m, до ~ 9.25 rad, или ~ 1.5 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ по часовой стрелке при $R_1 = 50\,\mu$m (см. рис. 4). Это позволяет нам сделать заключение, что кривизна внутренней вращающейся рамки оказывает сильное влияние и на закручивание **c**-директора свободно подвешенной SmC-пленки относительно вектора $\hat{\mathbf{a}}$. На рис. 5 представлены результаты

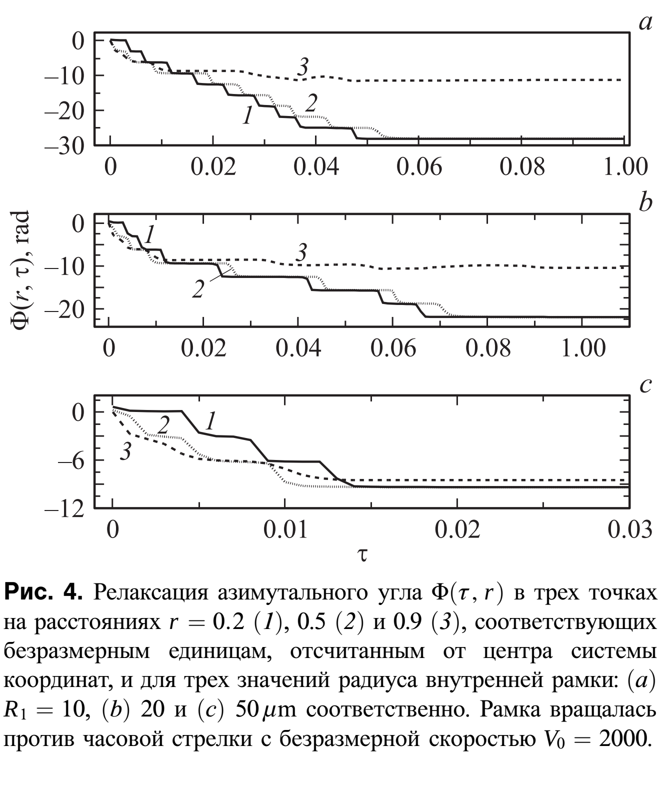

Рис. 4. Релаксация азимутального угла $\Phi(\tau, r)$ в трех точках на расстояниях $r = 0.2$ (*1*), 0.5 (*2*) и 0.9 (*3*), соответствующих безразмерным единицам, отсчитанным от центра системы координат, и для трех значений радиуса внутренней рамки: (*a*) $R_1 = 10$, (*b*) 20 и (*c*) $50\,\mu$m соответственно. Рамка вращалась против часовой стрелки с безразмерной скоростью $V_0 = 2000$.

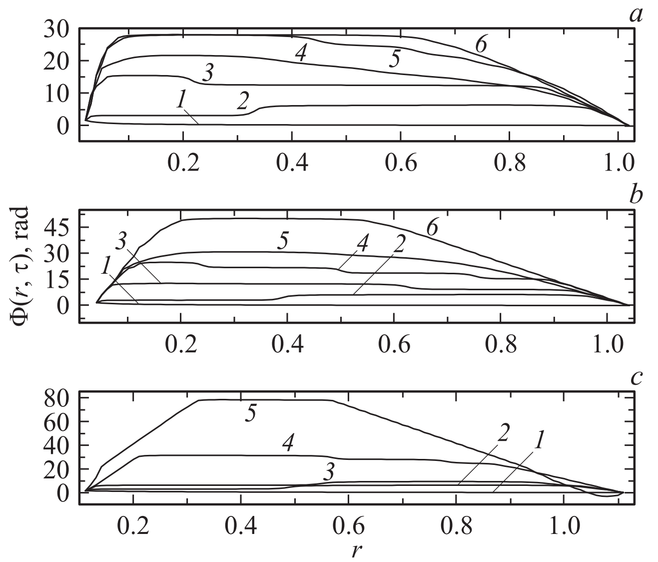

Рис. 5. То же, что и на рис. 2, но только внутренняя рамка вращается по часовой стрелке с безразмерной скоростью $V_0 = 2000$. (*a*) $R_1 = 10\,\mu$m и (*1*) $\tau_1 = 10^{-7}$, (*2*) $\tau_2 = 0.005$, (*3*) $\tau_3 = 0.02$, (*4*) $\tau_4 = 0.03$, (*5*) $\tau_5 = 0.08$ и (*6*) $\tau_6 = \tau_R = 0.15$. (*b*) $R_1 = 20\,\mu$m и (*1*) $\tau_1 = 10^{-7}$, (*2*) $\tau_2 = 0.005$, (*3*) $\tau_3 = 0.02$, (*4*) $\tau_4 = 0.03$, (*5*) $\tau_5 = 0.06$ и (*6*) $\tau_6 = \tau_R = 0.11$. (*c*) $R_1 = 50\,\mu$m и (*1*) $\tau_1 = 10^{-7}$, (*2*) $\tau_2 = 0.005$, (*3*) $\tau_3 = 0.01$ и (*4*) $\tau_4 = 0.06$ и $\tau_5 = \tau_R = 0.094$.

расчета эволюции поля **c**-директора в гибридно ориентированной SmC-пленке для случая вращения внутренней рамки по часовой стрелке (случай II) для трех значений радиуса R_1: (*a*) $10\,\mu$m, (*b*) $20\,\mu$m, и (*c*) $50\,\mu$m соответственно. Процесс переориентации азимутального угла $\Phi(\tau, r)$ на безразмерных временах до $\tau_2 = 0.005$ характеризуется тем, что сильнее переориентируются области $(0.6 < r < 0.9)$, примыкающие к внешней неподвижной рамке, вне зависимости от величины радиуса вращающейся рамки (см. рис. 5). По мере роста τ процесс переориентации начинает все сильнее увлекать области, примыкающие к вращающейся против часовой стрелки рамке. При достижении времен $\tau = \tau_R = \tau_i$ ($i = 6$, при $R_1 = 10\,\mu$m и $20\,\mu$m, и $i = 5$, при $R_1 = 50\,\mu$m) азимутальный угол $\Phi(\tau, r)$ достигает максимальных значений $\Phi_6^{\max} \sim 28.18$ rad или ~ 4.5 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ против часовой стрелки при $R_1 = 10\,\mu$m, $\Phi_6^{\max} \sim 50.31$ rad или ~ 8 оборотов вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ против часовой стрелки при $R_1 = 20\,\mu$m и $\Phi_5^{\max} \sim 77.7$ rad или ~ 12.3 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ против часовой стрелки при $R_1 = 50\,\mu$m соответственно. Эволюция распределения тангенциальной компоненты вектора скорости $\upsilon_\varphi(\tau, r)$ для трех значений радиуса внутренней рамки R_1 и для случая II представлена на рис. 6. Для всех трех значений радиуса R_1: (*a*)$10\,\mu$m, (*b*) $20\,\mu$m и (*c*) $50\,\mu$m безразмерная величина скорости вращения внутренней рамки была равна 2000. Прежде всего следует отметить, что во всех трех случаях, представленных на рис. 6, *a*, *b* и *c*, значения скорости $\upsilon_\varphi(\tau, r)$ отрицательны, т.е. свободно подвешенная смектическая пленка на всем временном интервале эволюции вращается по часовой стрелке. В случае малого радиуса $R_1 = 10\,\mu$m, основная перестройка профиля $\upsilon_\varphi(\tau, r)$ происходит вблизи вращающейся внуренней рамки (см. рис. 6, *a*) $(0 < r < 0.006)$, в то время как с увеличением радиуса R_1 до значений 20 и $50\,\mu$m основное изменение профиля $\upsilon_\varphi(\tau, r)$ происходит в середине смектической пленки $(0.1 < r < 0.8)$. Так, в случае $R_1 = 20\,\mu$m максимальное значение скорости $\upsilon_\varphi^{\max} \sim 9000$ достигается на временах $\tau = \tau_4$ в точке $r \sim 0.45$ и потом скорость резко убывает в несколько раз до максимального значения $\upsilon_\varphi^{\max} \sim 3000$ вблизи вращающейся рамки $(r \sim 0.06)$ на временах $\tau = \tau_R$. В случае $R_1 = 50\,\mu$m максимальное значение скорости $\upsilon_\varphi^{\max} \sim 12\,000$ достигается близи середины смектической пленки $(r \sim 0.45)$ на временах $\tau = \tau_R$. Следует отметить, что величина тангенциальной компоненты вектора скорости на конечном этапе эволюции на порядок выше в случае $R_1 = 50\,\mu$m по сравнению с двумя другими значениями радиуса $R_1 = 10\,\mu$m и $R_1 = 20\,\mu$m соответственно. При этом безразмерная скорость вращения внутренней рамки равна 2000. На рис. 7 представлены результаты расчета эволюции азимутального угла $\Phi(\tau, r)$ в трех точках, удаленных на расстояния $r = 0.2$ (*1*), 0.5 (*2*) и 0.9 (*3*), соответствующие безразмерным единицам, отсчитанным от центра системы координат, и для трех значений радиуса внутренней рамки: (*a*) $R_1 = 10\,\mu$m, (b) $20\,\mu$m и (*c*) $50\,\mu$m соответственно, причем внутренняя рамка вращалась по часовой стрелке с безразмерной скоростью 2000. В отличие от случая I, предстваленного на рис. 4, когда внутренняя рамка вращалась против часовой стрел-

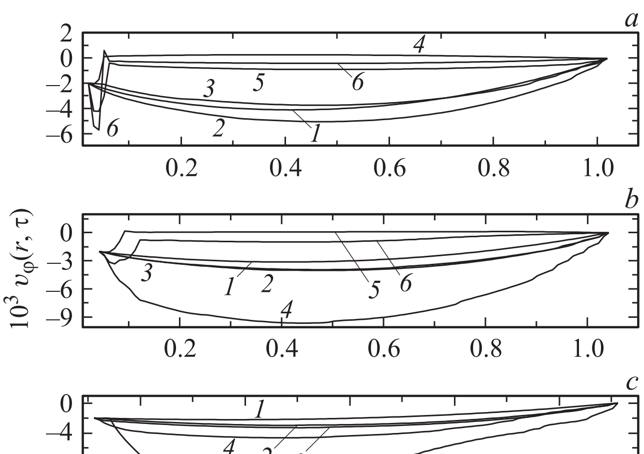

Рис. 6. То же, что и на рис. 3, но только внутренняя рамка вращалась по часовой стрелке с безразмерной скоростью $V_0 = 2000$. Времена и значения радиуса внутренней рамки те же, что и на рис. 5.

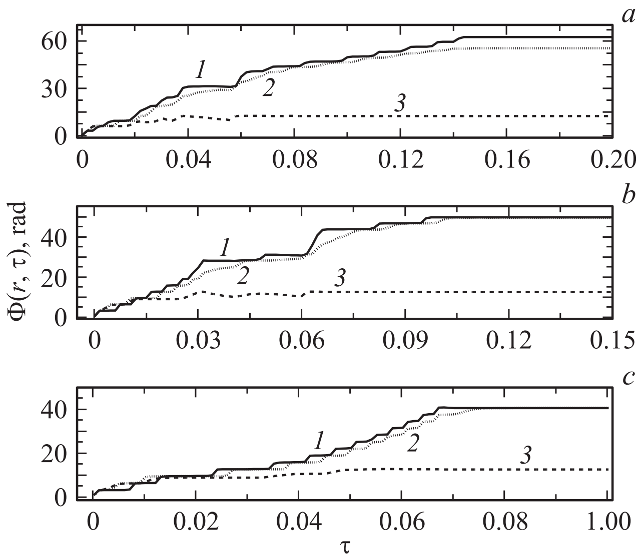

Рис. 7. То же, что и на рис. 4, но только внутренняя рамка вращалась по часовой стрелке с безразмерной скоростью $V_0 = 2000$.

ки с такой же скоростью 2000, на заключительном этапе эволюции области SmC-пленки, прилегающие к вращающейся рамке, закручивались значительно сильнее, чем области, прилегающие к неподвижной рамке (см. рис. 7). Такое поведение ЖК-материала вполне понятно с физической точки зрения. Действительно, поскольку смектическая пленка характеризуется слабым коэффициентом упругости ЖК-материала, то в процесс движения должны сильнее увлекаться области, примыкающие к вращающейся рамке, в то время как области, примыкающие к неподвижной рамке должны раскручиваться медленнее. Это и показано на рис. 7, *a*, *b* и *c*. Таким образом наши исследования эволюции как азимутального угла Φ, или **c**-директора, так и тангенциальной компоненты вектора скорости v_φ показали, что кривизна вращающейся внутренней рамки сильно влияет на характер формирующихся равновесных профилей этих физических величин. Было показано, что максимальное закручивание **c**-директора вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ или нормали к SmC-пленке для случая I примерно в два раза больше, чем для случая II (см. рис. 4 и 7). При этом безразмерная скорость вращения внутренней рамки в обоих случаях I и II была равна 2000. Наши вычисления также показали, что в случае II, когда внутренняя рамка вращалась с безразмерной скоростью 2000, переориентация директора в смектической пленке осуществлялась таким образом, что максимальное значение азимутального угла $\Phi_7^{\max}(0.12 < r < 0.68)$ было равно ~ 30 rad или ~ 4.5 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ по часовой стрелке при $R_1 = 10\,\mu$m. В то же время для случая I, когда внутренняя рамка вращалась с той же скоростью, но против часовой стрелки, максимальное значение азимутального угла $\Phi_5^{\max}(0.3 < r < 0.58)$ было равно ~ 80 rad или $\sim$ 12.3 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ против часовой стрелки при $R_1 = 50\,\mu$m. Вычисления также показали, что при малых значениях $R_1 = 50\,\mu$m профили $v_\varphi(\tau, r)$ эволюционировали антисимметрично для вышеописанных случаев I и II и максимальные значения азимутальных углов были практически равны (см. рис. 2, *a* и 5, *a*). Но с ростом R_1 или с уменьшением кривизны вращающейся внутренней рамки до значения $50\,\mu$m произошло координальное изменение профилей $\Phi(\tau, r)$ таким образом, что максимальные значения азимутального угла, соответствующие случаям I и II, различались на порядок величины. Так, $\Phi_{\mathrm{eq}}^{\max}(0.1 < r < 0.9) \sim 8$ rad или ~ 1.5 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ по часовой стрелке при $R_1 = 50\,\mu$m для случая I, в то время как $\Phi_{\mathrm{eq}}^{\max}(0.3 < r < 0.6) \sim 80$ rad или 12.3 оборота вокруг вектора $\hat{\mathbf{a}}$ против часовой стрелки при $R_1 = 50\,\mu$m для случая II, при том, что внутренняя рамка вращалась с одной и той же безразмерной скоростью $V_0 = 2000$.

4. Заключение

В настоящей работе была исследована релаксация как поля **c**-директора, так и тангенциальной составляющей вектора скорости в гибридно ориентированной SmC-пленке, натянутой между двумя круговыми рамками, выбранными таким образом, что внутренняя рамка вращалась с постоянной скоростью, а внешняя рамка оставалась неподвижной. Было показано, что на величину и характер переориентации азимутального угла, который однозначно определеляет распределение **c**-директора по всей ширине SmC-пленки, сильно влияют, при всех прочих равных условиях, кривизна и направление вращения внутренней рамки. При вращении рамки по часовой стрелке (случай I) **c**-директор в свободно подвешенной пленке закручивается вокруг нормали к SmC-пленке против часовой стрелки. При смене направления вращения внутренней круговой рамки на противоположное, т. е. когда внутренняя рамка вращалась против часовой стрелки (случай II), то **c**-директор закручивался по часовой стрелке, причем расчетная величина азимутального угла $\Phi(\tau, r)$, описывающего ориентацию **c**-директора, была практически в два раза больше в случае II, чем в случае I. Более того, с ростом радиуса R_1 неравенство азимутальных углов, соответствующих случаям I и II, только возрастало. Такое поведение распределения азимутального угла позволяет сделать заключение о том, что на ориентацию поля **c**-директора в свободно подвешенной смектической пленке, натянутой между вращающейся внутренней и неподвижной внешней рамками, сильное влияние оказывают как кривизна, так и направление вращения внутренней рамки.

Следует отметить, что расчетное распределение поля **c**-директора по ширине SmC-пленки, натянутой между вращающейся внутренней и неподвижной внешней рамками (см. рис. 2 и 5), качественно согласуется с экспериментально наблюдаемой с помощью поляризационного микроскопа текстурой свободно подвешенной SmC-пленки, натянутой на круговую рамку [2,5]. В эксперименте вращение ЖК-системы было достигнуто с помощью вращающегося электрического поля, которое было инициировано двумя синхронизированными генераторами. При этом исследовались как бездефектные SmC-пленки, так и смектические пленки с топологическими дефектами структуры [2,5]. Наблюдаемые тестуры в бездефектных SmC-пленках характеризовались чередованием концентрических колец светлых и темных тонов, в то время как наблюдаемые текстуры в SmC-пленках с топологическими дефектами представляли собой спиральные узоры. В свою очередь, если бы эволюции поля **c**-директора в бездефектных смектических пленках, представленные на рис. 2 и 5, наблюдались бы в поляризационный микроскоп, то видимые текстуры этих смектических пленок характеризовались бы чередованием концентрических областей светлых и темных тонов, как это было описано в эксперименте.

Все это позволяет сделать заключение о том, что реакцию смектической пленки на локальное механическое возмущение необходимо учитывать при создании измерительных приборов на основе ЖК-материалов.

5. Приложение: моменты и компоненты тензора напряжений

Мы рассматриваем SmC-фазу, где поле **c**-директора задано вектором $\hat{\mathbf{c}} = \big(\cos\Phi(\tau, r), \sin\Phi(\tau, r), 0\big)$. Баланс вращательных моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, состоит из двух вкладов, за счет упругих и вязких сил, действующих относительно **c**-директора, как $\mathbf{T}^c_{\mathrm{el}} = \frac{\delta \mathscr{W}_{\mathrm{el}}}{\delta \hat{\mathbf{c}}} \times \hat{\mathbf{c}}$ и $\mathbf{T}^c_{\mathrm{vis}} = \mathbf{g}^c \times \hat{\mathbf{c}}$ соответственно так и относительно $\hat{\mathbf{a}}$-вектора, как $\mathbf{T}^a_{\mathrm{el}} = \mathscr{E}\colon \nabla\mathbf{b} \times \hat{\mathbf{a}}$ и $\mathbf{T}^a_{\mathrm{vis}} = \mathbf{g}^a \times \hat{\mathbf{a}}$ соответственно. Здесь $\mathbf{b}$ — неизвестный вектор, который дает вклад в выражение для упругого момента относительно вектора $\hat{\mathbf{a}}$ и будет определен из уравнения баланса моментов, действующих на единицу объема смектической пленки, а два других вектора $\mathbf{g}^c = -2[\lambda_2 D_s \cdot \hat{\mathbf{c}} + \lambda_5 \mathbf{C}]$ и $\mathbf{g}^a = -2[\lambda_2 D_s \cdot \hat{\mathbf{c}} + \tau_5 \mathbf{C} + \tau_4 \hat{\mathbf{c}}(\hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{D}^c)]$ дают вклад в диссипационную функцию $\mathscr{R}^{\mathrm{vis}}$, а $\mathscr{E}$-тензор Леви–Чивита, а $\mathscr{W}_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\left[K_2(\nabla\cdot\hat{\mathbf{c}})^2 + K_3\big(\hat{\mathbf{a}}\cdot\nabla\times\hat{\mathbf{c}}\big)^2\right]$ — плотность упругой энергии, приходящейся на единицу объема смектической пленки. Вязкий вклад в диссипационную функцию имеет вид $\mathscr{R}^{\mathrm{vis}} = \frac{1}{2}\left(\sigma^{\mathrm{vis}} + (\sigma^{\mathrm{vis}})^T\right)\colon D_s - \mathbf{g}^c\cdot\mathbf{C} + \mathbf{g}^a\cdot(D_a\cdot\hat{\mathbf{a}})$, где $\mathbf{C} = \frac{d\hat{\mathbf{c}}}{dt} - D_a\cdot\hat{\mathbf{c}}$, а $\mathbf{D}_s = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\right]$ и $\mathbf{D}_a = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\right]$ — симметричный и антисимметричный вклады в тензор $\nabla\mathbf{v}$. Тензор вязких напряжений σ^{vis} для случая смектической пленки принимает вид

$$\sigma^{\mathrm{vis}} = \mu_0 D_s + \mu_3(\hat{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{D}^c)\hat{\mathbf{c}}\otimes\hat{\mathbf{c}} + \mu_4\left(\mathbf{D}^c\otimes\hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{c}}\otimes\mathbf{D}^c\right) + \lambda_2\big((\mathbf{C}+\mathbf{D}^c)\otimes\hat{\mathbf{c}} + \hat{\mathbf{c}}\otimes(\mathbf{C}-\mathbf{D}^c)\big) + \lambda_5\big(\mathbf{C}\otimes\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{c}}\otimes\mathbf{C}\big),$$

где $\mathbf{D}^c = D_s\cdot\hat{\mathbf{c}}$ и $\mathbf{D}^a = D_s\cdot\hat{\mathbf{a}}$ — два вспомогательных вектора, а μ_0, μ_2, μ_3, μ_4, λ_2, λ_5, τ_5, τ_4 — коэффициенты вязкости смектической пленки.

Безразмерные упругие моменты имеют вид

$$\mathbf{T}^c_{\mathrm{el}} = -\hat{\mathbf{e}}_z\left[\Phi_{,rr}\mathscr{G} + \frac{K-1}{2}\Phi^2_{,r}\sin 2\Phi + \frac{\Phi_{,r}}{r}\mathscr{G} + \frac{K-1}{2}\frac{\sin 2\Phi}{r^2}\right], \qquad (\text{П}1)$$

$$\mathbf{T}^a_{\mathrm{el}} = -\hat{\mathbf{e}}_z\cos\Phi b_{z,r}, \qquad (\text{П}2)$$

в то время как вязкие вклады задаются выражениями [10]

$$\mathbf{T}^c_{\mathrm{vis}} = \hat{\mathbf{e}}_z\left[\Phi_{,\tau} - \frac{\cos 2\Phi}{2}\left((1-\lambda)v_{\varphi,r} + (1+\lambda)\frac{v_\varphi}{r}\right) + \frac{\sin^2\Phi}{r}\right], \qquad (\text{П}3)$$

$$\mathbf{T}^a_{\mathrm{vis}} = \hat{\mathbf{e}}_z\left[\frac{1}{2}\cos 2\Phi\left(\lambda - 1)v_{\varphi,r} - (1+\lambda)\frac{v_\varphi}{r}\right) + \sin^2\Phi\frac{v_\varphi}{r} + \Phi_{,\tau}\right], \qquad (\text{П}4)$$

где $K = \frac{K_2}{K_3}$, $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_5}$, $\mathscr{G} = \cos^2\Phi + K\sin^2\Phi$, $\Phi_{,\tau} = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$, $\Phi_{,r} = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$. Безразмерные компоненты тензора вязких напряжений имеют вид

$$\sigma^{\mathrm{vis}}_{rr} = \left(v_{\varphi,r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)\left(\frac{\mu_3}{2\lambda_5}\sin 2\Phi\cos^2\Phi + \frac{\mu_4}{\lambda_5}\sin 2\Phi\right) + \lambda\sin 2\Phi\left(\Phi_{,\tau} + \frac{3}{2}\frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{2}v_{\varphi,r}\right), \qquad (\text{П}5)$$

$$\sigma^{\mathrm{vis}}_{\varphi\varphi} = \left(v_{\varphi,r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)\left(\frac{\mu_3}{2\lambda_5}\sin 2\Phi\sin^2\Phi + \frac{\mu_4}{\lambda_5}\sin 2\Phi\right) + \lambda\sin 2\Phi\left(\Phi_{,\tau} + \frac{1}{2}\left(v_{\varphi,r} + \frac{v_\varphi}{r}\right)\right), \qquad (\text{П}6)$$

$$\sigma^{\mathrm{vis}}_{r\varphi} = \left(v_{\varphi,r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)\left(\frac{\mu_0}{\lambda_5} + \frac{\mu_3}{2\lambda_5}\sin^2 2\Phi + \frac{\mu_4}{2\lambda_5}\right) + (\lambda-1)\Phi_{,\tau}\cos 2\Phi + \frac{1-\lambda+\lambda\cos 2\Phi}{2}\frac{v_\varphi}{r}, \qquad (\text{П}7)$$

$$\sigma^{\mathrm{vis}}_{\varphi r} = \left(v_{\varphi,r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)\left(\frac{\mu_0}{\lambda_5} + \frac{\mu_3}{2\lambda_5}\sin^2 2\Phi + \frac{\mu_4}{2\lambda_5}\right) + (\lambda-1)\Phi_{,\tau}\cos 2\Phi - \frac{1-\lambda+\lambda\cos 2\Phi}{2}\frac{v_\varphi}{r}. \qquad (\text{П}8)$$

Компоненты вектора $\mathbf{g}^c$ в полярной системе координат могут быть записаны в виде

$$g_r^c = \Big[(1-\lambda)v_{\varphi,r} + (1+\lambda)\frac{v_\varphi}{r} + 2\Phi_{,\tau}\Big]\sin\Phi,$$

$$g_\varphi^c = \Big[(1-\lambda)v_{\varphi,r} + (1+\lambda)\frac{v_\varphi}{r} - 2\Phi_{,\tau}\Big]\cos\Phi, \qquad (\text{П}9)$$

в то время как безразмерная плотность упругой энергии принимает вид

$$W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\left[K\left(\frac{\cos\Phi}{r} - \sin\Phi\Phi_{,r}\right)^2 + \left(\frac{\sin\Phi}{r} + \cos\Phi\Phi_{,r}\right)^2\right]. \qquad (\text{П}10)$$

Выражения (П1) и (П3) приводят к безразмерному уравнению баланса моментов относительно $\mathbf{c}$-директора

$$\Phi_{,\tau} = \Phi_{,rr}\mathscr{G} + \frac{K-1}{2}\Phi_{,r}^2\sin 2\Phi + \frac{\Phi_{,r}}{r}\mathscr{G} + \frac{K-1}{2}\frac{\sin 2\Phi}{r^2}$$
$$+ \frac{\cos 2\Phi}{2}\Big[(1-\lambda)v_{\varphi,r} + (1+\lambda)\frac{v_\varphi}{r}\Big] - \frac{\sin^2\Phi}{r}v_\varphi, \qquad (\text{П}11)$$

в то время как выражения (П2) и (П4) приводят к безразмерному уравнению баланса моментов относительно вектора $\hat{\mathbf{a}}$

$$\cos\Phi b_{z,r} = \frac{1}{2}\cos 2\Phi\Big[(\lambda-1)v_{\varphi,r}$$
$$- (1+\lambda)\frac{v_\varphi}{r}\Big] + \sin^2\Phi\frac{v_\varphi}{r} + \Phi_{,\tau}. \qquad (\text{П}12)$$

Уравнение (3) в проекциях на орты $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ сводится к двум безразмерным уравнениям, где первое — определяет гидростатическое давление

$$\tilde{p}_{,r} = -\mathscr{A}\frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\mu_3}{\lambda_5}\Big[\frac{1}{2}v_{\varphi,rr}\sin 2\Phi\cos^2\Phi$$
$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{v_{\varphi,r}}{r} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right)(\sin 4\Phi - 2\sin 2\Phi)$$
$$+ \frac{1}{4}\left(v_{\varphi,r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)\Phi_{,r}\left(4\cos 2\Phi\cos^2\Phi - \sin 4\Phi\right)\Big]$$
$$+ \frac{\mu_4}{2\lambda_5}\sin 2\Phi\left(v_{\varphi,rr} - \frac{v_{\varphi,r}}{r} + \frac{v_\varphi}{r^2}\right)$$
$$- \Phi_{,r}\cos^2\Phi\left(2\Phi_{,\tau} + v_{\varphi,r} + \frac{v_\varphi}{r}\right)$$
$$- \lambda\Big[\Phi_{,\tau r}\sin 2\Phi + 2\Phi_{,\tau}\Phi_{,r}\cos 2\Phi$$
$$+ \frac{1}{2}\sin 2\Phi\left(v_{\varphi,rr} + \frac{3v_{\varphi,r}}{r} - \frac{3v_\varphi}{r^2}\right)$$
$$- \Phi_{,r}\cos^2\Phi\left(v_{\varphi,r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)\Big], \qquad (\text{П}13)$$

а второе связывает тангенциальную скорость и азимутальный угол

$$\mathscr{A}v_{\varphi,\tau} = \frac{\mu_0+\mu_4}{4\lambda_5}\left(v_{\varphi,rr} + \frac{v_{\varphi,r}}{r} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right) + \frac{\mu_3}{8\lambda_5}$$
$$\times\Big[\sin^2 2\Phi\left(v_{\varphi,rr} + \frac{v_{\varphi,r}}{r} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right)$$
$$+ \Phi_{,r}\left(v_{\varphi,r}r - \frac{v_\varphi}{r}\right)\sin 4\Phi\Big]$$
$$+ \frac{1}{8}\Big[4\Phi_{,\tau r} - 8\Phi_{,\tau}\frac{\sin^2\Phi}{r} + 2\Phi_{,r}v_{\varphi,r}$$
$$\times(\sin 2\Phi + \cos 2\Phi) + \Phi_{,r}\frac{v_\varphi}{r}(3\sin 2\Phi$$
$$+ 2\cos 2\Phi) + \sin 2\Phi\left(v_{\varphi,rr} + \frac{v_{\varphi,r}}{r} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right)$$
$$+ 2\sin^2\Phi\left(v_{\varphi,rr} + \frac{v_{\varphi,r}}{r} - 13\frac{v_\varphi}{r^2}\right)\Big]$$
$$+ \lambda\Big[\Phi_{,\tau r}\cos 2\Phi - 2\Phi_{,\tau}\Phi_{,r}\sin 2\Phi$$
$$+ \frac{2\Phi_{,\tau}}{r}\cos 2\Phi - \Phi_{,r}\left(2v_{\varphi,r} + \frac{v_\varphi}{r}\right)\sin 2\Phi$$
$$+ \left(v_{\varphi,rr} + \frac{v_{\varphi,r}}{r} + 2\frac{v_\varphi}{r^2}\right)\cos 2\Phi - \frac{v_\varphi}{r^2}\Big]. \qquad (\text{П}14)$$

Здесь $\mathscr{A} = \frac{\rho K_3}{2\lambda_5{}^2}$. Подстановка уравнения (П11) в (П14) приводит к эволюционному уравнению для поля скорости

$$\mathscr{A}v_{\varphi,\tau} = f_1 v_{\varphi,rr} + f_2\frac{v_{\varphi,r}}{r} + f_3\frac{v_\varphi}{r^2} + f_4, \qquad (\text{П}15)$$

где коэффициенты $f_i (i = 1, \ldots, 4)$ задаются выражениями

$$f_1 = \frac{1}{8}\Big[2 + \frac{\mu_0+\mu_4+\mu_3\sin^2 2\Phi}{\lambda_5}$$
$$+ \sin 2\Phi + 2(1-\lambda)\cos 2\Phi(\lambda\cos 2\Phi - 1)\Big], \qquad (\text{П}16)$$

$$f_2 = \frac{1}{4}\Big[-\frac{\mu_0+\mu_4+\mu_3\sin^2 2\Phi}{\lambda_5} + \sin 2\Phi$$
$$+ \cos 2\Phi(1 + 2\lambda + 2\lambda\cos 2\Phi)$$
$$- \sin^2\Phi\big(1 + (1+\lambda)\cos 2\Phi\big)$$
$$+ \Phi_{,r}r\Big(-5\sin 2\Phi + \cos 2\Phi$$
$$- \lambda(2-\lambda)\sin 4\Phi + \frac{2\mu_3}{\lambda_5}\sin 4\Phi\Big)\Big], \qquad (\text{П}17)$$

$$f_3 = \frac{1}{8}\Bigg[2\frac{\mu_0+\mu_4-2\lambda_2+\mu_3\sin^2 2\Phi}{\lambda_5}$$
$$-\sin 2\Phi + \cos 2\Phi\big(8\lambda + 2(1+\lambda)$$
$$\times(-1+\lambda\cos 2\Phi) - 8\sin^2\Phi\big)$$
$$-\sin^2\Phi(18+8\cos 2\Phi) - \Phi_{,r} r \sin 2\Phi$$
$$\times\left(1+8\lambda\cos^2\Phi - 4\frac{2\mu_3}{\lambda_5}\sin 4\Phi\right)\Bigg], \qquad (\text{П}18)$$

$$f_4 = \left[\frac{\lambda\cos 2\Phi - \sin^2\Phi}{r} - \lambda\Phi_{,r}\sin 2\Phi\right]$$
$$\times\left[\Phi_{,rr}\mathscr{G} + \frac{K-1}{2}\Phi_{,r}^2\sin 2\Phi + \frac{\Phi_{,r}}{r}\mathscr{G} + \frac{K-1}{2}\frac{\sin 2\Phi}{r^2}\right]$$
$$+\frac{1+\lambda\cos 2\Phi}{2}\Bigg[\Phi_{,rrr}\mathscr{G} + (K-1)\left(2\Phi_{,rr}\Phi_{,r} + \frac{\Phi_{,r}^2}{r} - \frac{1}{r^3}\right)$$
$$\times\sin 2\Phi + (K-1)\left(\Phi_{,r}^3 + \frac{\Phi_{,r}}{r^2}\right)\cos 2\Phi + \mathscr{G}\left(\frac{\Phi_{,rr}}{r} - \frac{\Phi_{,r}}{r^2}\right)\Bigg]. \qquad (\text{П}19)$$

Список литературы

[1] P.E. Cladis, Y. Couder, H.R. Brand. Phys. Rev. Lett. **55**, 2945 (1985).
[2] R. Stannarius, Ch. Bohley, A. Eremin. Phys. Rev. Lett. **97**, 097 802 (2006).
[3] Y. Tabe, H. Yokoyama. Nature Mater. **2**, 806 (2003).
[4] D. Svensek, H. Pleiner, H.R. Brand. Phys. Rev. Lett. **96**, 140 601 (2006).
[5] K. Harth, A. Eremin, R. Stannarius. Soft Mater. **7**, 2858 (2011).
[6] D.K. Yang, S.T. Wu. Fundamentals of liquid crystal devices. John Wiley and Sons, N.Y. (2006). 378 p.
[7] M. Staykova, D.P. Holmes, C. Read, H.A. Stone. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **108**, 9084 (2011).
[8] J.L. Ericksen. Arch. Ration. Mech. Anal. **4**, 231 (1960).
[9] F.M. Leslie. Arch. Ration. Mech. Anal. **28**, 265 (1968).
[10] С. Гроот, П. Мазур. Неравновесная термодинамика. Мир, М. (1964). 456 с.
[11] I.W. Stewart. The static and dynamic continuum theory of liquid crystals. Taylor and Francis, London (2004). 360 p.
[12] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Наука, М. (1978). 592 с.