

01.3

Идентификация структуры взаимодействий и собственных параметров элементов в сетях, состоящих из систем с задержкой

© И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: ivssci@gmail.com

Поступило в Редакцию 14 августа 2015 г.

Предложен метод реконструкции архитектуры и величины связей и собственных параметров элементов в сетях взаимодействующих систем с запаздыванием по их временным рядам. Эффективность метода продемонстрирована на примере хаотических временных рядов сети, состоящей из диффузионно связанных неидентичных уравнений Икеды в присутствии шума.

Задача выявления по временным рядам наличия, структуры и характеристик связей в сетях, состоящих из большого числа связанных между собой элементов, привлекает в последние годы большое внимание. Для ее решения используются методы, основанные на анализе причинности по Грейнджеру [1], моделировании фазовой динамики [2–4], методы адаптивного управления [5,6,] и другие методы [7–9]. Однако в большинстве случаев элементы исследуемых сетей либо не имеют запаздывающей обратной связи, либо ее величина предполагается известной. Метод, позволяющий восстановить как параметры элементов, включая время запаздывания, так и архитектуру и величину связей в сетях систем с задержкой, был недавно предложен нами в [10,11]. Метод основан на реконструкции модельных дифференциальных уравнений с запаздыванием для элементов сети и диагностике значимости связей с помощью последовательного пробного исключения или добавления коэффициентов связи в модель. Однако он имеет недостаток, состоящий в том, что для восстановления времени запаздывания элементов используется отдельная процедура, основанная на подходах, предложенных в [12,13]. Кроме того, использование итерационного алгоритма для

реконструкции архитектуры связей приводит к относительно большому времени работы, а полученный результат может зависеть от стартовых догадок архитектуры связей.

В данной работе предлагается новый метод восстановления сетей, состоящих из систем с запаздыванием, свободный от указанных недостатков. Метод основан на минимизации целевой функции, характеризующей расстояние между точками реконструируемой нелинейной функции, отсортированными по величине абсциссы, и использовании метода K -средних для разделения восстановленных коэффициентов связи на значимые и незначимые.

Рассмотрим сеть, состоящую из диффузионно связанных систем с запаздыванием, каждая из которых описывается уравнением следующего вида:

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1(j \neq i)}^P k_{i,j}(x_j(t) - x_i(t)), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, P$, P — число элементов в сети, τ_i — время запаздывания, f_i — нелинейная функция, $k_{i,j}$ — коэффициенты связи, характеризующие воздействие j -го элемента на i -й.

Пусть у нас имеются временные ряды $\mathbf{x}_i = \{x_i(n)\}_{n=1}^N$ длиной N точек всех P осцилляторов, измеренные с шагом выборки Δt . Введем дискретное время запаздывания $\theta_i = \tau_i/\Delta t$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$f_j(x_i(n - \theta_i)) = \dot{x}_i(n) + x_i(n) - \sum_{j=1(j \neq i)}^P k_{i,j}(x_j(n) - x_i(n)). \quad (2)$$

Для каждого осциллятора отсортируем значения $x_i(n - \theta_i)$ по возрастанию, обозначив такую сортировку как преобразование Q , сопоставляющее номеру n величины $x_i(n - \theta_i)$ в исходном ряде ее номер m в отсортированном ряде: $m = Q(x_i, \theta_i, n)$. Соединив отрезками точки функции $f_j(x_i(m - \theta_i))$, отсортированные по величине абсциссы, получим ломаную линию, длина которой будет минимальной при правильном выборе коэффициентов $k_{i,j}$. При ошибочном выборе $k_{i,j}$ длина ломаной будет существенно больше, причем увеличатся вертикальные компоненты расстояний $\rho_i(m) = f_i(x_i(m + 1 - \theta_i)) - f_i(x_i(m - \theta_i))$ между точками.

Обозначим через Q^{-1} обратное к Q преобразование, с помощью которого можно найти номер n величины $x_i(n - \theta_i)$ в исходном ряде, зная ее номер m в отсортированном ряде: $n = Q^{-1}(x, \theta_i, m)$. Тогда от $\rho_i(m)$ можно перейти к $\delta_i(n)$

$$\delta_i(n) = f_i(x_i(Q^{-1}(x_i, \theta_i, m + 1) - \theta_i)) - f_i(x_i(Q^{-1}(x_i, \theta_i, m) - \theta_i)). \quad (3)$$

Для оценки коэффициентов связи $k_{i,j}$ будем решать задачу минимизации суммы квадратов L_i^2 расстояний (3). При этом значения функций, входящих в (3), найдем по временным рядам, используя уравнение (2). В результате выражение для L_i^2 примет следующий вид:

$$L_i^2 = \sum_{n=1}^{N-1} \delta_i^2(n) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\Delta \dot{x}_i(n) + \Delta x_i(n) - \sum_{j=1(j \neq i)}^P k_{i,j} (\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)) \right)^2, \quad (4)$$

$$\Delta x_i(n) = x_i(Q^{-1}(x_i, \theta_i, m + 1)) - x_i(Q^{-1}(x_i, \theta_i, m)), \quad (5)$$

$$\Delta \dot{x}_i(n) = \dot{x}_i(Q^{-1}(x_i, \theta_i, m + 1)) - \dot{x}_i(Q^{-1}(x_i, \theta_i, m)). \quad (6)$$

Выражение (4) можно рассматривать как запись задачи о нахождении коэффициентов $k_{i,j}$ методом наименьших квадратов, где разности $\Delta x_j(n) - \Delta x_i(n)$ представляют собой базисные функции, а суммы $\Delta \dot{x}_i(n) + \Delta x_i(n)$ — аппроксимируемые значения. Отметим, что величина $\delta_i^2(n)$ пропорциональна Δt^2 и $L_i^2 \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Поскольку (5), (6) и $\Delta x_j(n)$ не стремятся к 0 при $\Delta t \rightarrow 0$, а зависящая от них сумма в правой части (4) стремится к нулю только при верном выборе $k_{i,j}$, условие (4) не является тривиальным, а оценки коэффициентов $k_{i,j}$, получившиеся в результате минимизации L_i^2 , являются асимптотически точными.

При неправильном восстановлении времени запаздывания θ_i целевая функция L_i^2 перестает стремиться к 0 при $\Delta t \rightarrow 0$. Поэтому истинное время запаздывания можно найти как значение, при котором будет наблюдаться минимум зависимости $L_i^2(\tau'_i)$, где $\tau'_i = \theta'_i \Delta t$, а θ'_i — различные пробные времена запаздывания.

Предложенный метод позволяет восстановить архитектуру связей в сети. Для этого проведем кластеризацию восстановленных коэффициентов связи $k'_{i,j}$, поделив их на 2 кластера: значимых и незначимых коэффициентов. Кластеры можно найти автоматически с помощью метода K -средних [14], задав в качестве начальных положений центров

кластеров максимальное и минимальное из восстановленных значений $k'_{i,j}$. Так как в общем случае значимые коэффициенты по абсолютной величине много больше незначимых, кластеризацию удобно проводить в логарифмическом масштабе.

В качестве примера восстановим параметры элементов и архитектуру связей в сети диффузионно связанных уравнений Икеды, описываемых уравнением (1) с функцией

$$f_i(x_i(t - \tau_i)) = \mu_i \sin(x_i(t - \tau_i) - x_{0i}), \quad (7)$$

где параметр μ_i характеризует амплитуду колебаний, а x_{0i} — постоянный фазовый сдвиг. Выбор уравнения Икеды в качестве модельной системы для элемента сети обусловлен тем, что, во-первых, это уравнение уже давно стало эталонной моделью, широко используемой при исследовании сложной динамики систем с запаздыванием, а во-вторых, параметры входящей в него нелинейной функции (7) можно менять в широких пределах, что было важно при рассмотрении ансамблей, все элементы которых неидентичны.

На рис. 1, *a* приведена архитектура случайно выбранных связей в сети из 16 элементов. Из 240 возможных связей между элементами сети имеется 50 связей, среди которых есть как однонаправленные, так и взаимные. Все элементы сети являются неидентичными. Их параметры принимают случайные значения в следующих интервалах: $\tau_i \in [2, 5]$, $\mu_i \in [15, 25]$, $x_{0i} \in [0, 2\pi]$, $k_{i,j} \in [0.1, 0.5]$. При этом все элементы колеблются хаотически. Длина временных рядов $N = 10^4$ при $\Delta t = 0.01$. К каждому временному ряду добавлен некоррелированный нормальный шум $\xi_i(t)$ с нулевым средним и среднеквадратичным отклонением $\sigma_i = 0.003$.

На рис. 1, *b* приведены зависимости $L^2(\tau')$ для всех 16 элементов. Глобальные минимумы всех $L^2(\tau')$ наблюдаются в точности при истинных временах запаздывания осцилляторов. Отметим, что для оценки производной по временному ряду при построении (4) мы использовали локальную параболическую аппроксимацию.

При реконструкции модельного уравнения (1) для каждого элемента сети мы получаем 15 ненулевых коэффициентов связи $k'_{i,j}$, часть из которых являются незначимыми. Выделить значимые коэффициенты удается с помощью метода *K*-средних. На рис. 2, *a* на горизонтальной оси в логарифмическом масштабе построено распределение значений $|k'_{i,j}|$ для всех элементов. Использование модулей $k'_{i,j}$ для разделения

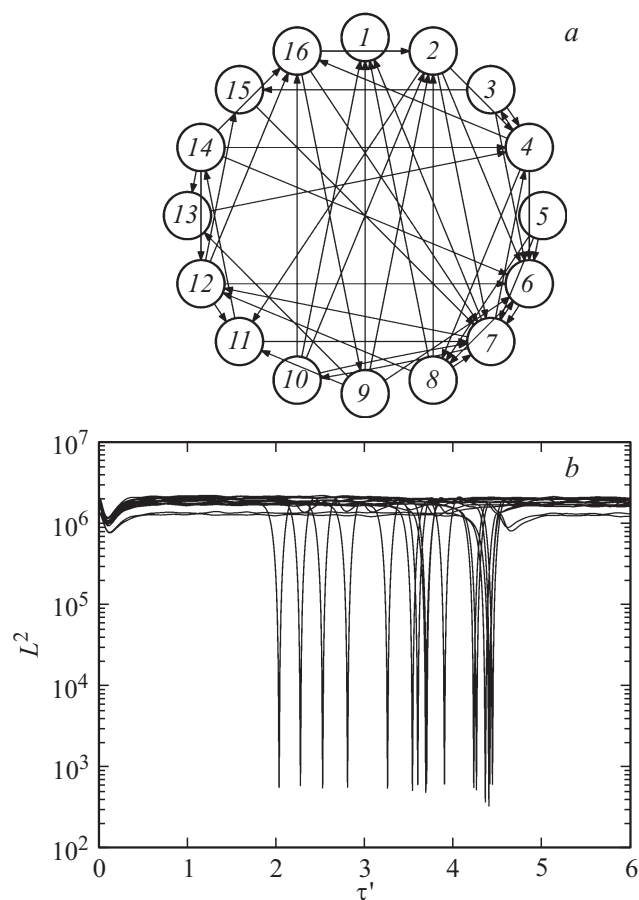


Рис. 1. *a* — архитектура связей в сети из 16 элементов, *b* — зависимости целевой функции L^2 от времени запаздывания τ' для каждого элемента.

коэффициентов связи на значимые и незначимые обусловлено тем, что, будучи близкими к нулю, незначимые коэффициенты могут иметь отрицательный знак. Из рис. 2, *a* видно, что $|k'_{i,j}|$ хорошо делятся на 2 кластера, состоящие из значимых (справа) и незначимых (слева) коэффициентов.

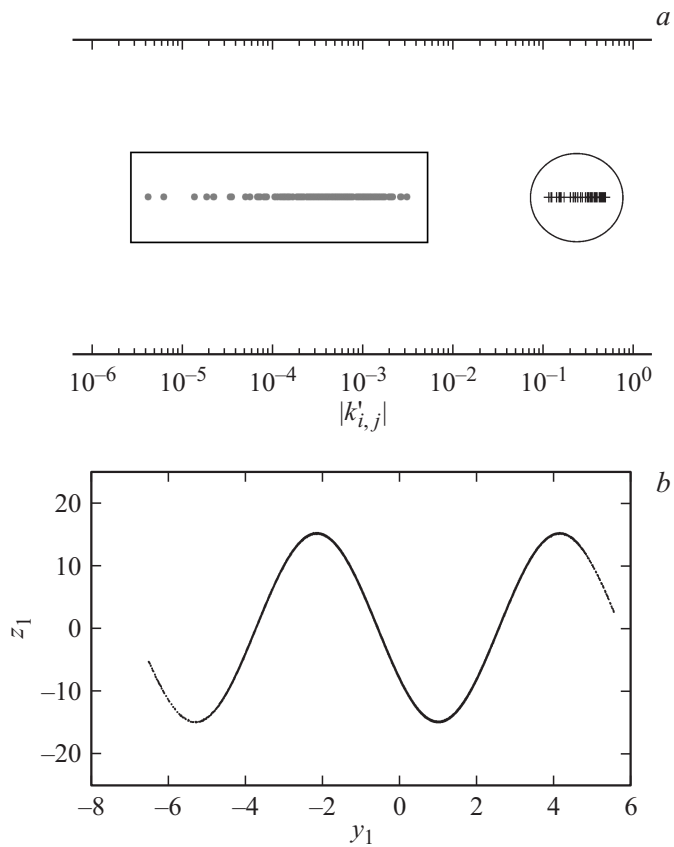


Рис. 2. *a* — распределение значений модулей оценок коэффициентов связи для всех элементов. Значимые коэффициенты показаны черными крестиками, расположенными внутри окружности, а незначимые коэффициенты показаны серыми точками, расположенными внутри прямоугольника. *b* — функция f_1 , восстановленная на плоскости (y_1, z_1) , где $y_1 = x_1(t - \tau_1)$, $z_1 = \dot{x}_1(t) + x_1(t) - \sum_{j=2}^{16} k'_{1,j}(x_j(t) - x_1(t))$.

Определив незначимые коэффициенты связи, мы удалили их из (4) и повторно восстановили все $k_{i,j}$. В результате архитектура связей в сети оказалась восстановленной правильно, в точном соответствии с рис. 1, *a*.

Проиллюстрируем результаты восстановления параметров и нелинейной функции для одного из элементов сети. Например, для первого элемента, параметры которого $\mu_1 = 15$, $x_{01} = 2.5629$, $k_{1,7} = 0.2293$, $k_{1,8} = 0.3321$, $k_{1,9} = 0.4492$, $k_{1,10} = 0.3114$, значимые восстановленные коэффициенты связи имеют следующие значения: $k'_{1,7} = 0.2276$, $k'_{1,8} = 0.3308$, $k'_{1,9} = 0.4478$, $k'_{1,10} = 0.3102$. Погрешности их восстановления вызваны преимущественно наличием шума.

На рис. 2, *b* приведена восстановленная нелинейная функция f_1 первого элемента, построенная при восстановленных значениях $k'_{1,j}$. Она достаточно хорошо совпадает с истинной функцией уравнения Икеды. Аппроксимация восстановленной функции f_1 тригонометрическим полиномом первого порядка позволяет, оценив коэффициенты полинома методом наименьших квадратов, получить следующую оценку параметров: $\mu'_1 = 14.97$ и $x'_{01} = 2.5631$.

Итак, нами предложен новый эффективный метод, позволяющий определить значения параметров элементов и архитектуру связей в сетях диффузионно связанных систем с задержкой, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием, по временным рядам их колебаний. Предложенный метод может быть также применен для реконструкции сетей с другими типами связи элементов, например, для сетей, состоящих из систем с запаздыванием, связанных через производную или через общее поле.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 14-12-00291.

Список литературы

- [1] Kamiński M., Ding M., Truccolo W.A., Bressler S.L. // Biol. Cybern. 2001. V. 85. N 2. P. 145–157.
- [2] Timme M. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. N 22. P. 224 101.
- [3] Tokuda I.T., Jain S., Kiss I.Z., Hudson J.L. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. N 6. P. 064 101.
- [4] Bezruchko B.P., Smirnov D.A. Extracting Knowledge from Time Series: An Introduction to Nonlinear Empirical Modeling. Berlin: Springer, 2010. 405 p.

- [5] *Liu H., Lu J.-A., Lü J., Hill D.J.* // Automatica. 2009. V. 45. N 8. P. 1799–1807.
- [6] *Xu Y., Zhou W., Fang J.* // Nonlinear Dyn. 2012. V. 68. N 1–2. P. 195–205.
- [7] *Han X., Shen Z., Wang W.-X., Di Z.* // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 114. N 2. P. 028 701.
- [8] *Zhang Z., Zheng Z., Niu H.* et al. // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. N 1. P. 012 814.
- [9] *Wens V.* // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. N 1. P. 012 823.
- [10] *Сысоев И.В., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. В. 15. С. 1–9. [*Sysoev I.V., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Tech. Phys. Lett. 2012. V. 38. N 8. P. 687–690.]
- [11] *Сысоев И.В., Прохоров М.Д., Пономаренко В.И., Безручко Б.П.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. В. 10. С. 16–26. [*Sysoev I.V., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Bezruchko B.P.* // Tech. Phys. 2014. V. 59. N 10. P. 1434–1444.]
- [12] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. В. 3. С. 515–527. [*Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* // JETP. 2005. V. 100. N 3. P. 457–467.]
- [13] *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 80. N 6. P. 066 206.
- [14] *Мандель И.Д.* Кластерный анализ. М.: Финансы и статистика, 1988. 176 с.