

Равновесное распределение энергии волн в цепочке карбина

© Д.А. Ковригин¹, С.П. Никитенкова²

¹ Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Россия

² Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

E-mail: spnikitenkova@yandex.ru

(Поступила в Редакцию 13 мая 2015 г.)

На основе простой математической модели, учитывающей центральные и нецентральные взаимодействия между атомами углерода в одномерной цепочке карбина, изучается стационарное распределение энергии тепловых колебаний при заданной температуре окружающей среды. Исследование проводится стандартными асимптотическими методами нелинейной динамики в рамках классической механики. В первом нелинейном приближении выявляются резонансные тройки волн, которые формируются при характерном типе нелинейности системы и благодаря выполнению условий фазового синхронизма. Каждая резонансная тройка состоит из одной продольной моды и пары поперечных мод колебаний. В общем случае в цепочке реализуется суперпозиция одностипных резонансных триплетов различных спектральных масштабов. Обнаружено, что равновесное распределение энергии нелинейных стационарных волн в цепочке карбина при заданной температуре полностью подчиняется стандартному закону Рэлея–Джинса, благодаря пропорциональной амплитудной дисперсии. Указана возможность спонтанного формирования трехчастотных солитонов огибающих в карбине. В виде таких солитонов тепло может распространяться в цепочке атомов углерода без диффузии, подобно локализованным волнам.

Работа частично поддержана грантом (соглашение от 27 августа 2013 г. № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

1. Введение

Карбин является линейным полимером, состоящим из атомов углерода. В молекуле карбина четырехвалентные атомы углерода соединены в цепочку либо тройными и одинарными связями поочередно (полиин), либо двойными связями (поликумулен). Это вещество было впервые получено и исследовано в начале шестидесятых годов прошлого века [1]. Доказано, что карбин формируется естественным образом, поскольку его присутствие обнаружено в метеоритных образцах [2]. Сегодня в лабораторных условиях удается синтезировать стабильные при комнатной температуре цепочки карбина длиной до 44 атомов. Карбин представляет особый интерес для нанотехнологий, поскольку по теоретическим оценкам это наиболее прочный из всех известных к настоящему моменту времени материалов [3], превосходящий по удельной прочности все известные аллотропные формы углерода, включая графен, углеродные нанотрубки и алмаз. Помимо прочности карбин обладает рядом уникальных свойств, которые открывают широкие перспективы использования этого материала в наноэлектронике, спинтронике, технологиях хранения водорода.

В настоящей работе на основе максимально упрощенной модели тепловых колебаний цепочки карбина выявлены трехволновые резонансы, возникающие при учете нелинейности связи между центральными и нецентральными силами, действующими между соседними

атомами. Показано, что низкочастотные квазигармонические продольные волны растяжения-сжатия, обусловленные центральными взаимодействиями атомов углерода, почти всегда неустойчивы. При распространении они распадаются на пару поперечных волн, если только частота первичной продольной моды не превысит некоторого критического значения.

Обнаружено, что стационарное распределение энергии нелинейных волн в цепочке карбина полностью подчинено закону Рэлея–Джинса, который описывает равновесное распределение долей энергии по модам колебаний. В низкочастотной области колебаний, где трехволновые процессы разрешены, проявляется эффект пропорциональной амплитудной дисперсии. Если же частота высокочастотной продольной волны попадает в критическую зону, где трехволновые процессы запрещены, то этот нелинейный эффект отсутствует.

Обнаружены трехчастотные солитоны огибающих, которые могут формироваться в карбине спонтанно при подходящих начально-краевых условиях. Это указывает на то, что тепло в цепочке атомов углерода может распространяться без диффузии в виде нелинейных локализованных волн.

Наше исследование может представлять интерес для актуальных приложений нанотехнологий, включая вопросы создания ультракомпактных электронных схем, экологически чистых аккумуляторных батарей, систем очистки воды.

2. Уравнения движения и дисперсионные соотношения

Рассматриваются механические колебания простой одномерной цепочки, состоящей из материальных частиц равных масс m , которые в состоянии покоя располагаются вдоль некоторой прямой на равном расстоянии a . Каждая частица обладает двумя степенями свободы в плоскости колебаний. Силы, действующие между атомами, являются как центральными, так и нецентральными. Учет нецентральных межатоомных взаимодействий приводит к появлению так называемой изгибной, или поперечной, моды колебаний. Абсолютное удлинение сегмента λ_n цепочки и мера изменения кривизны κ_n срединной линии цепочки в окрестности атома с номером n выражаются следующим образом:

$$\lambda_n = \sqrt{(a + (u_n - u_{n-1}))^2 + (w_n - w_{n-1})^2} - a,$$

$$\kappa_n = \arctan\left(\frac{w_n - w_{n-1}}{a + u_n - u_{n-1}}\right) - \arctan\left(\frac{w_{n+1} - w_n}{a + u_{n+1} - u_n}\right),$$

где $u_n = u_n(t)$ и $w_n = w_n(t)$ — соответственно продольная и поперечная компоненты смещения центров масс, естественным образом ориентированные относительно декартовой оси. Тогда функция Лагранжа системы в гармоническом приближении принимает вид

$$L = \frac{m}{2} \sum_{n=-Z}^Z (\dot{u}_n^2 + \dot{w}_n^2) - \frac{1}{2} \sum_{n=-Z}^Z (\alpha \lambda_n^2 + \beta \kappa_n^2), \quad (1)$$

где феноменологические константы α и β характеризуют меры растяжения и изгиба цепочки соответственно, точка обозначает производную по времени t . Число элементарных ячеек Z в цепочке полагается достаточно большим, т. е. $Z \rightarrow \infty$.

Математическая модель, вытекающая из характеристической функции (1), является геометрически нелинейной. Далее изучаются динамические эффекты лишь первого нелинейного приближения, имеющие место при небольших значениях продольных и изгибных деформаций цепочки.

В выражении функции Лагранжа (1) осуществляется переход от исходных переменных к безразмерным переменным: $t \rightarrow t\sqrt{m/\alpha}$, $u_n(t) \rightarrow au_n(t)$, $w_n(t) \rightarrow aw_n(t)$. Обозначения всех переменных остаются прежними. Из вариационного принципа Эйлера–Лагранжа можно получить уравнения динамики цепочки. Для удобства проведения последующей процедуры осреднения смещения масштабируются безразмерным малым параметром $\mu \ll 1$ с помощью преобразования подобия: $u_n(t) \rightarrow \mu u_n(t)$, $w_n(t) \rightarrow \mu w_n(t)$. Конкретная форма малого параметра произвольна; например, $\mu a = \max(u_n(t), w_n(t))$.

В линейном приближении уравнения движения, с помощью которых находится порождающее решение задачи, таковы:

$$m\ddot{u}_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1},$$

$$m\ddot{w}_n = \beta(-w_{n-2} + 4w_{n-1} - 6w_n + 4w_{n+1} - w_{n+2})/\alpha a^2. \quad (2)$$

Пусть число атомов в цепочке неограниченно, тогда решение системы (2) эффективно ищется в интегральной форме

$$u_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A_l(k) \exp i\phi_l(k, t) + A_l^*(k) \exp(-i\phi_l(k, t))] dk,$$

$$w_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A_b(k) \exp i\phi_b(k, t) + A_b^*(k) \exp(-i\phi_b(k, t))] dk, \quad (3)$$

где $A_l(k)$ и $A_b(k)$ — комплексные амплитуды, $A_l^*(k)$ и $A_b^*(k)$ — соответствующие комплексно-сопряженные величины, $\phi_l(k, t) = \omega_l(k)t + kn$ и $\phi_b(k, t) = \omega_b(k)t + kn$ — быстровращающиеся фазы поперечных и продольных волн соответственно. Собственные частоты нормальных гармонических волн $\omega_l(k)$ и $\omega_b(k)$ связаны с волновым числом k следующими дисперсионными соотношениями:

$$\omega_l(k) = \sqrt{2(1 - \cos k)}, \quad \omega_b(k) = 2\sqrt{\beta/\alpha}(1 - \cos k)/a. \quad (4)$$

Для большинства известных природных материалов, обладающих периодической структурой, обычно справедливо неравенство $\beta/\alpha a^2 \ll 1$. Это означает, что поперечные волны обладают гораздо меньшими частотами по сравнению с частотами продольных волн. Поэтому естественно ожидать, что высокочастотные продольные волны за счет нелинейности могут потерять устойчивость по отношению к малым низкочастотным поперечным возмущениям. Однако следует обратить внимание на то, что существует много биологических и искусственных материалов, которые могут обладать на первый взгляд весьма неожиданными и парадоксальными свойствами. Например, для какого-то материала может оказаться справедливым соотношение $\beta/\alpha a^2 \approx 1$, которое указывает на то, что и поперечные волны в свою очередь могут обладать достаточно высокой энергией для возникновения эффективного обмена энергией с продольными волнами вследствие нелинейного взаимодействия. Такими механическими свойствами, в частности, обладают микротрубочки, играющие центральную роль в физиологии клетки [4].

3. Осредненная функция Гамильтона. Резонанс

Если малый параметр задачи μ отличен от нуля и конечен, то представление решения (3) линеаризованной системы (2) можно успешно использовать для извлечения полезной информации о ключевых свойствах слабо нелинейной системы, характеризуемой функцией Лагранжа (1). Решение нелинейной системы ищется в том же виде, что и выражение (3), но с формальной заменой переменных: $A_l(k) \rightarrow A_l(k, t)$, $B_l(k) \rightarrow B_l(k, t)$, $A_b(k) \rightarrow A_b(k, t)$ и $B_b(k) \rightarrow B_b(k, t)$.

Очевидно, что временные вариации амплитуд будут тем ярче, чем больше параметр μ , поэтому эффективно введение новых масштабов медленных времен, т.е. $\tau_n \rightarrow \mu^n t$. Кроме того, согласно общей процедуре построения асимптотического решения, выражение (3) следует модифицировать введением малых поправок к основному решению в виде бесконечного ряда по малому параметру μ

$$u_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A_l(k, \tau_1, \tau_2, \dots) \exp i\phi_l(k, t) + A_l^*(k, \tau_1, \tau_2, \dots) \exp(-i\phi_l(k, t))] dk + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m u_n^{(m)}(t),$$

$$w_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A_b(k, \tau_1, \tau_2, \dots) \exp i\phi_b(k, t) + A_b^*(k, \tau_1, \tau_2, \dots) \exp(-i\phi_b(k, t))] dk + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m w_n^{(m)}(t). \quad (5)$$

Малые нерезонансные поправки $u_n^{(m)}(t)$ и $w_n^{(m)}(t)$ в случае необходимости определяются шаг за шагом в процессе процедуры построения асимптотического решения заданной точности.

Функция Лагранжа L после подстановки в нее представления (5) и последующего осреднения по быстровращающимся фазам $\phi_l(k, t)$ и $\phi_b(k, t)$ предстает в виде так называемой осредненной функции Лагранжа $\Lambda = \langle L \rangle$, аргументами которой будут комплексные амплитуды квазигармонических волн и их временные производные. Эти аргументы кроме всего прочего пропорциональны канонически сопряженным переменным. Если ввести стандартным способом обобщенные импульсы

$$p_{A_l} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_l}, \quad p_{A_l^*} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_l^*}, \quad p_{A_b} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_b}, \quad p_{A_b^*} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{A}_b^*},$$

то осредненная функция Лагранжа Λ преобразуется в осредненную функцию Гамильтона $H = \dot{A}_l p_{A_l} + \dot{A}_l^* p_{A_l^*} + \dot{A}_b p_{A_b} + \dot{A}_b^* p_{A_b^*} - \Lambda$.

Преимущества гамильтонова описания по сравнению с лагранжевым описанием очевидны: по меньшей мере один из интегралов движения уже известен *a priori*, а именно $H = H_0$, где H_0 — произвольная константа интегрирования. Осредненный гамильтониан, будучи разложенным в степенной ряд по малому параметру μ ,

$$\langle H \rangle = \mu^2 \langle H_2 \rangle + \mu^3 \langle H_3 \rangle + \dots \quad (6)$$

имеет весьма простую структуру. Первый член ряда $\langle H_2 \rangle$ — тождественный нуль в силу дисперсионных соотношений (4). Слагаемое $\langle H_3 \rangle$ является кубическим многочленом, зависящим от новых обобщенных координат — комплексно-сопряженных амплитуд продольных и поперечных мод, оно несет в себе всю информацию о динамических свойствах системы в первом нелиней-

ном приближении. Если $\langle H_3 \rangle$ не тождественный нуль, то в системе необходимо присутствует резонанс первого порядка [5]. Резонанс проявляется в виде многоволновых резонансных взаимодействий, при которых отдельные моды колебаний объединяются в многоволновые резонансные ансамбли — замкнутые и изолированные динамические объекты. Простейшие из таких ансамблей называются резонансными триадами или резонансными триплетами. Других резонансов в изучаемой системе, кроме трехволновых, в первом нелинейном приближении нет.

4. Резонансные трехволновые ансамбли

Для возникновения нелинейного резонансного взаимодействия троек волн в любой динамической системе кроме подходящего типа нелинейности уравнений движения необходимо соблюдение следующих условий фазового синхронизма [6]:

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad k_1 = k_2 + k_3. \quad (7)$$

Здесь ω_n — собственные частоты, k_n — соответствующие им волновые числа, удовлетворяющие дисперсионным уравнениям (4). Собственные частоты пронумерованы в следующем естественном порядке: $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3$. Аналогичные процессы, если ограничиться изучением только лишь длинноволновых процессов в цепочке карбина, имеют место и в прямолинейном упругом стержне [7].

Действительные решения дисперсионных уравнений (4), удовлетворяющие условиям фазового синхронизма (7), можно определить графически [8–10]. Эти решения существуют не во всем допустимом интервале волновых чисел, а лишь тогда, когда волновое число продольной моды k_1 не принадлежит следующему „запрещенному“ интервалу:

$$k_1 \notin \left[\arctan \left(\frac{8\sqrt{\alpha\beta}(\alpha a^2 - 4\beta)a}{\alpha^2 a^4 - 24\beta\alpha a^2 + 16\beta^2} \right) / a, 2\pi - \arctan \left(\frac{8\sqrt{\alpha\beta}(\alpha a^2 - 4\beta)a}{\alpha^2 a^4 - 24\beta\alpha a^2 + 16\beta^2} \right) / a \right]. \quad (8)$$

Вторичные поперечные волны распространяются в противоположных направлениях, поскольку $k_2 k_3 < 0$. Кинематическая схема триплета на дисперсионной диаграмме в безразмерных переменных приведена на рис. 1. Расчетные параметры графика [3] следующие:

$$a = 32.71 \cdot 10^{-10} \text{ м}, \quad m = 1.994 \cdot 10^{-26} \text{ кг},$$

$$r = 0.366 \cdot 10^{-10} \text{ м}, \quad E = 32.71 \text{ ТПа},$$

$$F = \pi r^2 = 0.149 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2, \quad J = \pi r^4 / 4 = 0.017 \cdot 10^{-40} \text{ м}^4,$$

$$\alpha = EF/a = 5.969 \cdot 10^{-10} \text{ ТПа} \cdot \text{м},$$

$$\beta = JF/a = 0.222 \cdot 10^{-30} \text{ ТПа} \cdot \text{м}^3,$$

где r — эффективный радиус частицы, E — модуль Юнга, F — эффективная площадь поперечного сечения

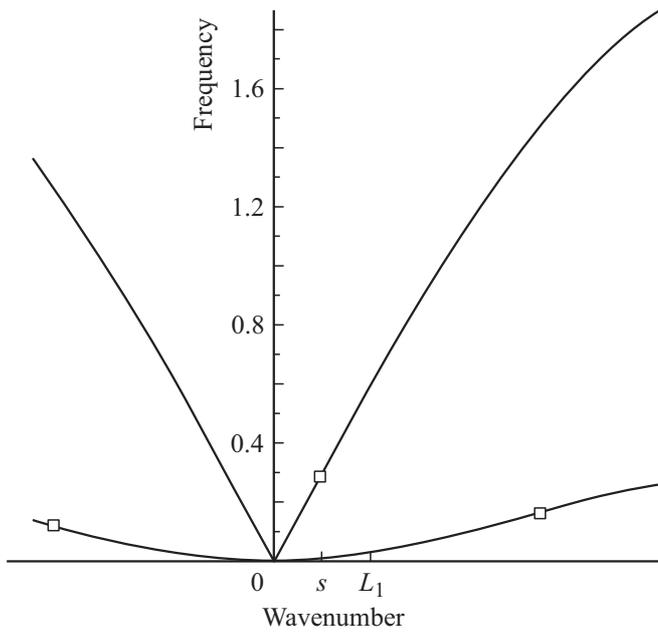


Рис. 1. Фазовый синхронизм резонансной тройки волн, указанной точками на дисперсионных кривых. Символ L_1 отвечает нижней границе „запрещенного“ интервала для продольных волн; волновое число высокочастотной распадной моды $k_1 = 0.299$ отмечено буквой s .

цепочки карбина, J — эффективный момент инерции поперечного сечения цепочки.

Изгибной жесткости карбина при комнатной температуре соответствует персистентная длина порядка 110 атомов углерода, расположенных вдоль цепочки. Отношение длины волны де Бройля к расстоянию между атомами цепочки составляет величину порядка 10^{-1} . Последнее указывает на возможность изучения некоторых существенных аспектов волновой динамики карбина в рамках классической механики.

Пусть высокочастотной компонентой резонансной тройки является продольная волна. Тогда решение представляется в виде резонансной тройки волн

$$\begin{aligned}
 u_n(t) &= A_1(\tau) \exp i(\omega_1 t + k_1 n) + (*), \\
 w_n(t) &= A_2(\tau) \exp i(\omega_2 t + k_2 n) \\
 &+ A_3(\tau) \exp i(\omega_3 t + k_3 n) + (*), \quad (9)
 \end{aligned}$$

где ω_m и k_m — спектральные параметры квазигармонических волн, $A_m(t)$ — комплексные амплитуды, медленно изменяющиеся во времени $\tau = \omega t$; (*) обозначает соответствующие комплексно сопряженные слагаемые. Эволюционные уравнения динамики триплета первого типа примут форму

$$2i\omega \frac{dA_j}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial A_j^*}, \quad 2i\omega_j \frac{dA_j^*}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial A_j}. \quad (10)$$

Здесь $H = i\gamma(A_1^*A_2A_3 - A_1A_2^*A_3^*)$ — осредненный гамильтониан триплета, γ — коэффициент нелинейного взаимодействия. Конкретное значение этого коэффициента

нелинейности

$$\begin{aligned}
 \gamma &= -2(\sin k_2 + \sin k_3 - \sin(k_2 + k_3)) \\
 &+ \frac{2\beta}{\alpha a^2} (5 \sin k_2 + 5 \sin k_3 - 6 \sin(k_2 + k_3) - \sin 2k_3 \\
 &+ \sin(2k_2 + k_3) + \sin(k_2 + 2k_3) - \sin 2ak_2). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших математических выкладок в уравнениях (10) следует перейти от комплексных амплитуд к действительным амплитудам $a_m(\tau)$ и обобщенной фазе $\psi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$, используя известную формулу $A_m(\tau) = a_m(\tau) \exp i\varphi_m(\tau)$ ($m = \overline{1, 3}$).

5. Законы сохранения для резонансной тройки

Полученные укороченные уравнения (10) обладают первыми интегралами. Один из них — осредненный гамильтониан $H = \text{const}$. Другие интегралы движения известны как соотношения Мэнли–Роу [6]

$$\frac{E_1}{\omega_1} + \frac{E_2}{\omega_2} = \text{const}, \quad \frac{E_2}{\omega_2} - \frac{E_3}{\omega_3} = \text{const}, \quad (12)$$

из которых следует закон сохранения полной кинетической энергии

$$\frac{E_1}{\omega_1} + \frac{E_2}{\omega_2} + \frac{E_3}{\omega_3} = \text{const}. \quad (13)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $E_n = \omega_n^2 a_n^2$.

Этих интегралов движения вполне достаточно для полной интегрируемости уравнений (10). Общее решение определяется эллиптическими функциями Якоби. Конкретная форма этих решений и характерные осциллограммы, демонстрирующие, в частности, процесс так называемой распадной неустойчивости высокочастотной моды триплета, представлены в работе [11].

6. Стационарное решение

Рассматриваются свойства стационарных волн. В частности, интерес представляет амплитудная дисперсия, т.е. зависимость аддитивных поправок Ω_j к частотам квазинормальных волн ω_j и поправок K_j к волновым числам k_j от амплитуд a_j . Для определения параметров пространственно однородных стационарных решений системы (10)

$$A_n(\tau) = a_n \exp i(\Omega_n \tau + K_n \chi + \xi_n) \quad (n = \overline{1, 3}) \quad (14)$$

используются система из трех уравнений

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 + v_1 K_1 &= \frac{\gamma a_2 a_3}{\omega_1 a_1}, & \Omega_2 + v_2 K_2 &= \frac{\gamma a_1 a_3}{\omega_2 a_2}, \\
 \Omega_3 + v_3 K_2 &= \frac{\gamma a_1 a_2}{\omega_1 a_2} \quad (15)
 \end{aligned}$$

и условия фазового синхронизма для нелинейных поправок

$$\begin{aligned} \Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3 + v_1 K_1 - v_2 K_2 - v_3 K_3 &= 0, \\ \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 &= \Psi, \end{aligned} \quad (16)$$

где Ψ — произвольная постоянная обобщенная фаза. Условия синхронизма (16) определяются тем, что для возникновения нетривиального стационарного режима колебаний обобщенная фаза триплета необходимо должна быть подчинена следующему ограничению:

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = \pi/2 + \pi m_j, \quad (17)$$

где m_j — произвольные целые числа. Последнее свидетельствует о явлении фазовой синхронизации в системе, которой отвечают „нейтрально“ устойчивые периодические или почти периодические движения в гамильтоновой механике [12].

Одно из стационарных решений системы уравнений (15)

$$\begin{aligned} \varpi_1 \omega_1 a_1^2 = \varpi_2 \omega_2 a_2^2 = \varpi_3 \omega_3 a_3^2 = 4\varpi_1 \varpi_2 \varpi_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3 / \gamma^2, \\ \psi = -\pi/2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\varpi_i = \Omega_i + v_i K_i$ — добавки к собственным частотам волн, обусловленные нелинейностью системы. Здесь величина Ω , как и прежде, обозначает соответствующую вариацию по частоте, а K_i — по волновому числу, v_i — групповые скорости нормальных волн. Величины ϖ_i — произвольные числа, связанные лишь условием фазовой синхронизации

$$\varpi_1 = \varpi_2 + \varpi_3. \quad (19)$$

Значение обобщенной фазы стационарных колебаний $\psi = -\pi/2$ обеспечивает минимум осредненной функции Гамильтона системы (10): $H = c(A_1^* A_2 A_3 - A_1 A_2^* A_3^*) = 2c a_1 a_2 a_3 \sin \psi$.

Возмущенное движение триады вблизи стационарного решения (18) представляется в следующем виде:

$$A_j(\tau) = (a_j + b_j(\tau)) \exp i(\Omega_j \tau + K_j \chi + \xi_j + \eta_j(\tau)), \quad (20)$$

где a_j — константы, характеризующие стационарные значения амплитуд волн; $b_j = b_j(\tau)$ — малые возмущения этих величин во времени τ ; $\eta_j = \eta_j(\tau)$ — малые возмущения индивидуальных фаз волн $\varphi_j(\tau)$ вблизи стационарных значений обобщенной фазы ψ резонансной триады (17). Индексы изменяются в пределах $j = \overline{1, 3}$.

Если возмущения b_j и η_j отсутствуют, то решение (20) является стационарным и пространственно однородным, т.е. параметры a_j , Ω_j , K_j и константы ξ_j удовлетворяют уравнениям (15) и (16).

Динамика возмущенной системы вблизи стационарных орбит характеризуется следующей функцией Лагранжа, которая получается из исходного лагранжиана системы (1), если после подстановки в него

выражения (20) пренебречь членами высшего порядка малости, начиная с кубических слагаемых:

$$\begin{aligned} l = \gamma [a_1 a_2 a_3 (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)^2 - (a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 a_3)^2] \\ + 4 \sum_{n=1}^3 \omega_n b_n a_n \left(\frac{d\eta_n}{d\tau} \right) + 2 \sum_{n=1}^3 \varpi_n \omega_n b_n^2. \end{aligned}$$

Система линейных дифференциальных уравнений движения для малых возмущений, порожаемая этим лагранжианом l , при учете условий синхронизма (19) оказывается следующей:

$$\begin{aligned} \dot{b}_1 &= \frac{\gamma a_2 a_3 (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{2\omega_1}, \\ \dot{\eta}_1 &= -\frac{\gamma (a_2 a_3 b_1 - a_1 a_3 b_2 - a_1 a_2 b_3)}{2\omega_1 a_1^2}, \\ \dot{b}_2 &= -\frac{\gamma a_1 a_3 (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{2\omega_2}, \\ \dot{\eta}_2 &= \frac{\gamma (a_2 a_3 b_1 - a_1 a_3 b_2 + a_1 a_2 b_3)}{2\omega_2 a_2^2}, \\ \dot{b}_3 &= -\frac{\gamma a_1 a_2 (\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{2\omega_3}, \\ \dot{\eta}_3 &= \frac{\gamma (a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 - a_1 a_2 b_3)}{2\omega_3 a_3^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Характеристическое уравнение этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет шесть корней. Среди этих корней четыре нулевые, а остальные два являются ненулевыми комплексно-сопряженными корнями и, кроме того, различными чисто мнимыми корнями. Наличие нулевых корней объясняется тем, что не все искомые переменные в системе уравнений (21) являются независимыми, поскольку всегда можно понизить порядок исходной системы, введя обобщенную фазу $\eta_1 - \eta_2 - \eta_3$, вместо использования трех индивидуальных фаз η_j . Кроме того, амплитуды стационарных волн b_j ($j = \overline{1, 3}$) оказываются связанными между собой двумя независимыми связями — соотношениями Мэнли–Роу (12). Оставшаяся пара нулевых корней присуща линейной колебательной системе маятникового типа, наделенной единственной степенью свободы. Отсюда следует вывод о том, что мера возмущенного движения триплетной цепочки вблизи стационарного решения совпадает с мерой самих малых возмущений. В этом смысле стационарные пространственно однородные решения устойчивы по Ляпунову.

7. Распределение энергии волн по резонансным ансамблям

В первом нелинейном приближении резонансные триады являются замкнутыми и изолированными ансамблями, которые не вступают во взаимодействие и не обмениваются энергией с другими волновыми ансамблями.

Осредненная функция Гамильтона системы, состоящей из N триплетов, имеет следующий вид:

$$H = i \sum_{n=1}^N \gamma_n (A_{3n-2}^* A_{3n-1} A_{3n} - A_{3n-2} A_{3n-1}^* A_{3n}^*), \quad (22)$$

где γ_n коэффициенты нелинейности n -го резонансного триплета; A_m ($m = \overline{1, 2N}$) — искомые комплексные амплитуды волн, медленно меняющиеся во времени τ . Уравнения динамики триплетной решетки таковы:

$$2i\omega_n \frac{dA_n}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial A_n^*}, \quad 2i\omega_n \frac{dA_n^*}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial A_n}, \quad (n = \overline{1, 3N}). \quad (23)$$

В первом нелинейном приближении для любого множества триплетов справедлив принцип суперпозиции, поскольку каждая резонансная триада, будучи замкнутой и изолированной системой, обладает локальными интегралами движения в форме функций Гамильтона и соотношений Мэнли–Роу. Это означает, что с формальной точки зрения существует бесконечное множество различных стационарных распределений полной энергии системы по модам колебаний. Из всего множества возможных стационарных распределений следует попытаться выбрать лишь то единственное, которое реализуется на практике. Правило отбора в равновесной классической статистической механике предоставляет теорема Больцмана о равнораспределении энергии по степеням свободы, утверждающая, что в тепловом равновесии энергия разделена в равных долях между ее различными формами колебаний [13].

В контексте задачи поиска стационарных распределений в цепочке карбина очевиден следующий порядок построений. Сначала разумно допустить, что нелинейные взаимодействия между модами колебаний настолько ничтожны, что система представляет собой газ невзаимодействующих линейных осцилляторов. Это утверждение в полной мере справедливо для высокочастотных продольных волн, если их волновые числа принадлежат „запрещенному“ интервалу (8). Тогда стационарное распределение энергии в цепочке будет в точности описываться законом Рэлея–Джинса [14], поскольку полная энергия всей системы, согласно теореме о равнораспределении, складывается из суммы равных порций энергии, отнесенных к каждой моде колебаний:

$$E = \sum_{n=1}^{\mathcal{L}} E_n = \sum_{n=1}^{\mathcal{L}} \omega_n^2 a_n^2 = N k_B T (a^2 \alpha)^{-1}, \quad (24)$$

где k_B и T — значения константы Больцмана и температуры соответственно, \mathcal{L} — общее число продольных мод колебаний.

Теперь предполагается, что нелинейность системы существенна. Это актуально для низкочастотных продольных волн, волновые числа которых не принадлежат „запрещенному“ интервалу (8). Стационарное распределение энергии по модам колебаний можно получить,

воспользовавшись принципом минимума энергии. Требуется минимизировать гамильтониан системы, представленный в виде суммы гамильтонианов отдельных изолированных резонансных триплетов

$$H_n = -2\gamma_n a_{3n-2} a_{3n-1} a_{3n},$$

при условии равнораспределения энергии, но не по отдельным модам колебаний, а по каждому резонансному триpletу

$$\sum_{i=0}^2 \omega_{3n-1}^2 a_{3n-1}^2 = 3k_B T (a^2 \alpha)^{-1} \quad (n = \overline{1, N}).$$

Вся динамическая система содержит $3N$ мод колебаний, N из которых продольные, а остальные моды поперечные. Выстраивается функционал

$$E = \sum_{n=1}^N H_n + \sum_{n=1}^N \lambda_n \left(\sum_{i=0}^2 \omega_{3n-1}^2 a_{3n-1}^2 - 3k_B T (a^2 \alpha)^{-1} \right), \quad (25)$$

где λ_n — неопределенные множители Лагранжа, подлежащие определению совместно с амплитудами колебаний a_n . Используя стационарное решение для каждой отдельной триады (18)

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{3n-2} \omega_{3n-2} a_{3n-2}^2 &= \overline{\omega}_{3n-1} \omega_{3n-1} a_{3n-1}^2 = \overline{\omega}_{3n} \omega_{3n} a_{3n}^2 \\ &= 4\overline{\omega}_{3n-2} \overline{\omega}_{3n-1} \overline{\omega}_{3n} \omega_{3n-2} \omega_{3n-1} \omega_{3n} / \gamma_n^2 \end{aligned}$$

совместно с условиями фазовой синхронизации (19)

$$\overline{\omega}_{3n-2} = \overline{\omega}_{3n-1} + \overline{\omega}_{3n},$$

можно прийти к выводу, что функционал E представим в виде функции N переменных: например, $\overline{\omega}_{3n-1}$ ($n = \overline{1, N}$) представляющих собой нелинейные частотные поправки компонент триплетов на частотах ω_{3n-1} ($n = \overline{1, N}$). Минимум функции E в точности отвечает закону Рэлея–Джинса

$$\begin{aligned} a_{3n-2} &= \frac{\sqrt{k_B T (a^2 \alpha)^{-1}}}{\omega_{3n-2}}, \quad a_{3n-1} = \frac{\sqrt{k_B T (a^2 \alpha)^{-1}}}{\omega_{3n-1}}, \\ a_{3n} &= \frac{\sqrt{k_B T (a^2 \alpha)^{-1}}}{\omega_{3n}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из выражений (26) непосредственно следует эффект пропорциональной амплитудной дисперсии: частотные поправки нелинейных стационарных волн $\overline{\omega}_n$ оказываются прямо пропорциональными частотам линейных осцилляторов ω_n с коэффициентами пропорциональности

$$\sigma_n = \frac{\gamma_n \sqrt{k_B T}}{2a \sqrt{\alpha} \omega_{3n-2} \omega_{3n-1} \omega_{3n}} \quad (n = \overline{1, N}).$$

Обобщение закона Рэлея–Джинса на случай нелинейных стационарных волн сводится лишь к незначительному росту частот линейных волн: $\omega_{3n-1}(1 + \mu\sigma_n)$

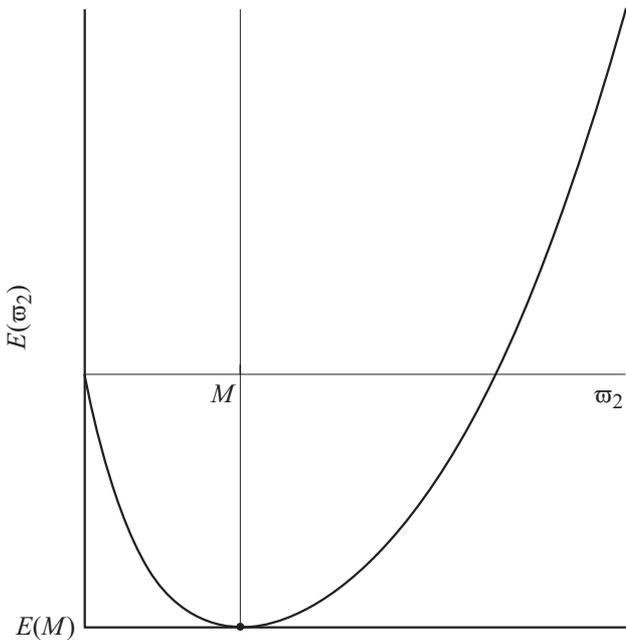


Рис. 2. Минимум функционала $E(\omega_2)$ в точке $M = \omega_2$.

($i = \overline{0, 2}, n = \overline{1, N}$), где малый параметр $\mu = \max(a_n)$ ($n = \overline{1, 3N}$).

В качестве примера рассматривается отдельная резонансная триада со следующими спектральными параметрами (рис. 1): $\omega_1 = 0.297, \omega_2 = 0.126, \omega_3 = 0.171, \gamma_1 = 0.568$. Пусть температура окружающей среды $T = 300$ К. Функционал (25), подлежащий минимизации, с помощью выражений (18) и условия фазовой синхронизации (19) можно представить в параметрическом виде

$$E = -16(\omega_2 + \omega_3(\omega_2))\omega_2\omega_3(\omega_2)\omega_1\omega_2\omega_3/\gamma_1^2,$$

где явная зависимость $\omega_3(\omega_2)$ определяется следующим квадратным уравнением

$$4\left[\omega_2\omega_3(\omega_1\omega_2 + \omega_2(\omega_2 + \omega_3))\omega_3 + \omega_1\omega_3\omega_2(\omega_2 + \omega_3)\right]/\gamma_1^2 = 3k_B T(a^2\alpha)^{-1}.$$

Минимум функции E изображен на рис. 2. Значение минимума в точке $\omega_2 = 0.057$, обозначенной на рис. 2 буквой M , равно $E(\omega_2) = -1.9 \cdot 10^{-4}$. Коэффициент пропорциональности $\sigma_1 = 0.453$. Максимум амплитуды волн стационарного процесса, согласно выражениям (18), равен $\mu = a_3 = 0.081$. Относительное изменение частот волн вследствие пропорциональной амплитудной дисперсии $\omega_{3n-i}(1 + \mu\sigma_1)$ ($i = \overline{0, 2}$) будет $\mu\sigma_1 = 0.036$.

Обобщение задачи на любое множество резонансных триад тривиально, поскольку последние являются замкнутыми и изолированными динамическими системами, по крайней мере в рамках первого нелинейного приближения.

8. Солитоны огибающих

Рассматриваются свойства пространственно неоднородных стационарных волн. Предполагается, что амплитуды квазигармонических волн A_n теперь являются не только функциями времени, но и медленно изменяющимися функциями пространственной координаты $\chi = m$, где m — номер узла кристаллической цепочки. Это означает, что спектральные плотности амплитудных огибающих, входящие в выражение (5), будут представлять собой сумму дельтообразных функций с малой дисперсией относительно волнового числа. Для математического описания движения подобных узкополосных квазигармонических волн с комплексными амплитудами $A_n = A_n(\chi, \tau)$ полную производную по времени τ , входящую в систему уравнений (23), следует записать в виде суммы ее локальной и конвективной составляющих

$$\frac{dA_n(\chi, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial A_n(\chi, \tau)}{\partial \tau} + v_n \frac{\partial A_n(\chi, \tau)}{\partial \chi},$$

где $v_n = dw_n(k_n)/dk_n$ — групповая скорость распространения огибающей модулированной квазигармонической волны с амплитудой A_n на частоте ω_n с волновым числом k_n . Тогда уравнения динамики триплетной цепочки примут вид системы квазилинейных уравнений гиперболического типа с частными производными

$$2i\omega_n \left(\frac{dA_n}{d\tau} + v_n \frac{dA_n}{d\chi} \right) = \frac{\partial H}{\partial A_n^8},$$

$$2i\omega_n \left(\frac{dA_n^*}{d\tau} + v_n \frac{dA_n^*}{d\chi} \right) = -\frac{\partial H}{\partial A_n^8} \quad (n = \overline{1, 3, N}). \quad (27)$$

Законы сохранения, аналогичные выражениям (12), для системы уравнений (27) представляются в дивергентной форме — в виде соотношений между плотностями осредненной энергии мод колебаний и соответствующих плотностей потоков энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{E_1}{\omega_1} + \frac{E_2}{\omega_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{v_1 E_1}{\omega_1} + \frac{v_2 E_2}{\omega_2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{E_2}{\omega_2} - \frac{E_3}{\omega_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{v_2 E_2}{\omega_2} - \frac{v_3 E_3}{\omega_3} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

из которых следует сохранение энергии волн ансамбля в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{E_1}{\omega_1} + \frac{E_2}{\omega_2} + \frac{E_3}{\omega_3} \right) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{v_1 E_1}{\omega_1} + \frac{v_2 E_2}{\omega_2} + \frac{v_3 E_3}{\omega_3} \right) = 0.$$

Здесь используется прежнее обозначение $E_n = \omega_n^2 |A_n|^2$.

Для полной совокупности волн величина $\sum_{n=1}^{3N} E_n$ соответствует плотности энергии системы, а сумма $\sum_{n=1}^{3N} v_n E_n$ — плотности потока энергии.

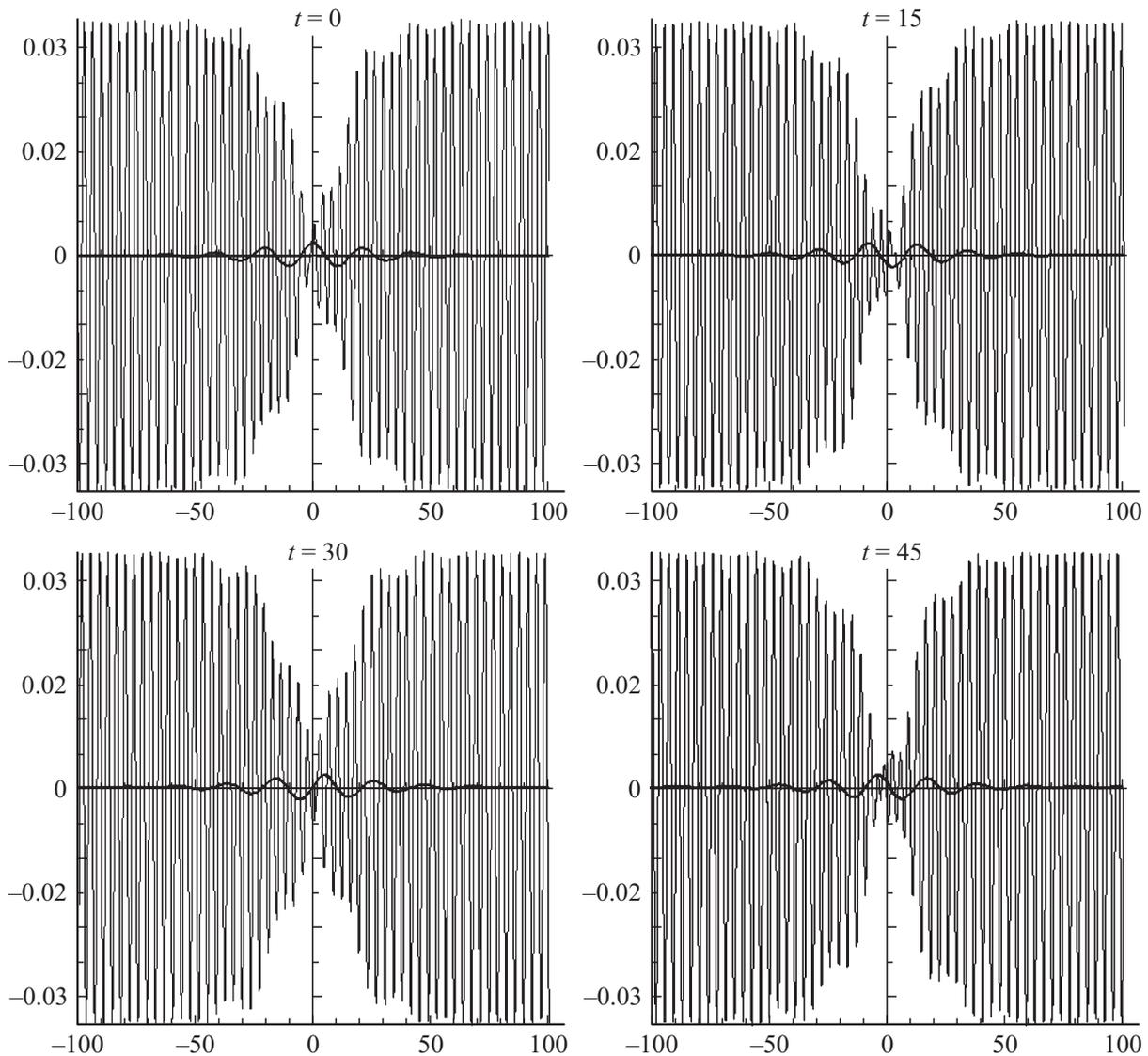


Рис. 3. Профиль трехчастотного солитона с высокочастотной „светлой“ распадной модой в подвижной системе отсчета $x = \chi - V\tau$ в различные моменты времени $t = \tau$ вдоль координаты x . Скорость солитона $V = 0.145$. Продольная компонента солитона u_n отмечена жирной линией, а изгибающая компонента w_n — тонкой. Расчетные параметры системы те же, что использовались при построении рис. 1. Параметры κ_n выбраны нулевыми.

Нетривиальные аналитические решения этих уравнений представляются в виде всевозможных комбинаций так называемых „светлых“ солитонов и солитонов „затемнения“, если использовать терминологию, принятую в нелинейной оптике [15]. Существуют два основных варианта солитонных решений системы (27). В первом случае распадной модой триплетного каскада является „темный“ солитон

$$A_{3i-2}(x) = a_{3i-2} \tanh(\lambda x) \exp i (\eta_{3i-2}\tau + \kappa_{3i-2}\chi + \phi_{3i-2}),$$

$$A_{3i-1}(x) = a_{3i-1} \operatorname{sech}(\lambda x) \exp i (\eta_{3i-1}\tau + \kappa_{3i-1}\chi + \phi_{3i-1}),$$

$$A_{3i}(x) = a_{3i} \operatorname{sech}(\lambda x) \exp i (\eta_{3i}\tau + \kappa_{3i}\chi + \phi_{3i}). \quad (29)$$

Во втором случае в качестве распадной моды выступает „светлый“ солитон

$$A_{3i-2}(x) = a_{3i-2} \operatorname{sech}(\lambda x) \times \exp i (\eta_{3i-2}\tau + \kappa_{3i-2}\chi + \phi_{3i-2}),$$

$$A_{3i-1}(x) = a_{3i-1} \tanh(\lambda x) \times \exp i (\eta_{3i-1}\tau + \kappa_{3i-1}\chi + \phi_{3i-1}),$$

$$A_{3i}(x) = a_{3i} \operatorname{sech}(\lambda x) \exp i (\eta_{3i}\tau + \kappa_{3i}\chi + \phi_{3i}). \quad (30)$$

Здесь $x = \chi - V\tau$ сопровождающая координата уединенной волны, распространяющейся со скоростью V ; λ — произвольное положительное число, характеризую-

щее ширину солитона; фазы солитонов связаны условиями синхронизма

$$\eta_{3i-2} - \eta_{3i-1} - \eta_{3i} = 0, \quad \kappa_{3i-2} - \kappa_{3i-1} - \kappa_{3i} = 0,$$

$$\phi_{3i-2} - \phi_{3i-1} - \phi_{3i} = 0, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (31)$$

где N — число триплетов в системе. Для однозначного решения системы уравнений (31) в качестве свободного параметра можно выбрать, например, величину κ_2 . Тогда условия синхронизма (31) переписутся в следующем виде:

$$\kappa_1 = \kappa_2(1 - \kappa_2(v_2 - v_3)/v_1 - v_3);$$

$$\kappa_3 = -\kappa_2(v_2 - v_3)/v_1 - v_3;$$

$$\eta_1 = -v_1\kappa_2(v_2 - v_3)/(v_1 - v_3);$$

$$\eta_2 = -v_2\kappa_2; \quad \eta_3 = v_3\kappa_2(v_1 - v_2)/(v_1 - v_3)$$

Расчетные фазы всех компонент солитона ϕ_i ($i = 1, \dots, 3N$) без ограничения общности можно выбрать нулями.

В обоих вариантах решений следует отделить физически реализуемые решения системы уравнений (27) от формальных решений. Физические решения реализуются при естественных необходимых причинно-следственных условиях, указывающих на то, что скорость распространения всех компонент солитона не должна превышать скоростей квазигармонических волн вдоль характеристических направлений системы (27), иначе говоря, групповых скоростей. Согласно этому правилу отбора, в системе (27) могут реализовываться только солитоны со „светлой“ распаднй модой (30). Пример одного из таких физически реализуемых решений системы (27) иллюстрируется на рис. 3: солитон распространяется со скоростью $V = 0.145$, которая принадлежит следующему разрешенному интервалу скоростей $] - 0.148, 0.149[$. Максимальное и минимальное значения групповых скоростей солитонного ансамбля составляют $v_{\max} = 0.988$ и $v_{\min} = 0.149$ соответственно.

Осредненная плотность функции Гамильтона для любого трехчастотного солитона

$$H = -i \sum_{n=1}^{3N} \omega_n v_n \left(\frac{\partial A_n}{\partial \chi} A_n^* - \frac{\partial A_n^*}{\partial \chi} A_n \right)$$

может быть как отрицательной, так и положительной величиной. Конкретное значение этой функции в случае трехчастотного солитона со „светлой“ распаднй модой (30) есть

$$H = \frac{2\kappa_2}{v_1 - v_3} \left\{ \left[(v_2(\eta_1 a_1^2 + \eta_2 a_2^2) - v_3 \omega_1 a_1^2) v_1 - v_2 \omega_2 a_2^2 \right] \right.$$

$$\left. \times \operatorname{sech}^2(\lambda x) - v_3 \omega_3 a_3^2 (v_1 - v_2) \tanh^2(\lambda x) \right\}.$$

Если эта величина отрицательна, то в системе (27) возможно спонтанное формирование трехчастотных солитонов огибающих [16]. График плотности функции Гамильтона, соответствующий устойчивому солитону, при различных значениях произвольного параметра k_2 приведен на рис. 4.

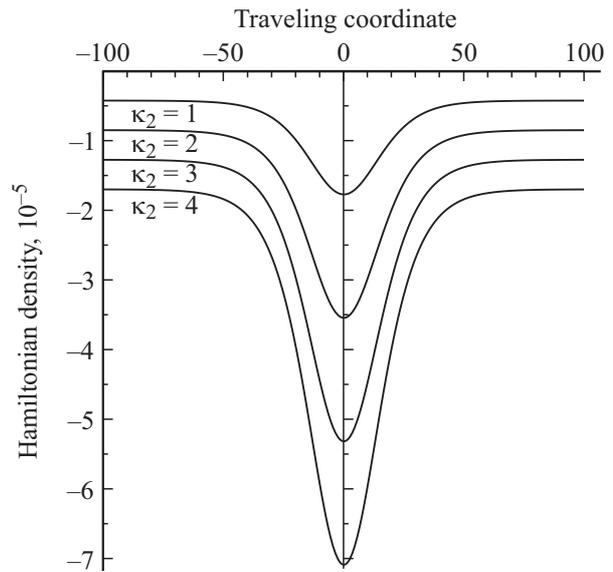


Рис. 4. Осредненная плотность функции Гамильтона.

В теории солитонов известно [17], что задача Коши с произвольными начальными условиями для стандартной системы уравнений трехволнового резонансного взаимодействия, изоморфной уравнениям (27), строго разрешима в экспоненциальных функциях с помощью метода обратной задачи рассеяния [18]. Эти решения представляются пространственно локализованными квазигармоническими волновыми пакетами с нулевыми асимптотиками на бесконечности. Волны распространяются, сохраняя свои профили, с теми же групповыми скоростями, что и линейные волны. Лишь в момент перекрытия профилей низкочастотных компонент триплета возникает локализованное возмущение на суммарной частоте высокочастотной компоненты триплета. С течением времени это высокочастотное возмущение полностью исчезает, а профили низкочастотных компонент восстанавливают свои первоначальные формы, которые были до взаимодействия. Очевидно, что подобные солитонные решения актуальны для описания колебаний цепочки карбина при низких температурах. Однако следует отметить, что длина волны де Бройля становится сравнимой с расстоянием между соседними атомами углерода в цепочке карбина примерно при температуре $T = 10$ К. Поэтому адекватное описание подобных решений в рамках классического приближения, которое использовалось в настоящей работе, невозможно. В этом случае для успешного решения задачи следует воспользоваться техникой вторичного квантования гамильтониана [19]. Можно ожидать, что при комнатных температурах на фоне стационарного распределения энергии по модам колебаний (18) такие солитоны с нулевыми асимптотиками на бесконечности будут просто неразличимы с малыми возмущениями. Однако детали этого вопроса требуют отдельного строгого изучения, в настоящей работе они не рассматриваются.

9. Заключение

В предельном случае, когда волны в цепочке карбина можно представить линейными нормальными модами колебаний малой интенсивности, термическое равновесие достигается равномерным распределением энергии по степеням свободы согласно закону Рэля–Джинса. С ростом интенсивности колебаний проявляются нелинейные взаимодействия между резонансными тройками продольных и поперечных волн, находящимися в фазовом синхронизме. В этом случае термическое равновесие также обеспечивается равномерным распределением энергии по закону Рэля–Джинса благодаря эффекту пропорциональной амплитудной дисперсии нелинейных стационарных волн. Аналогичный результат, касающийся распределения Рэля–Джинса, может быть получен с использованием гипотезы о случайности фаз волн в почти линейных динамических системах с дисперсией. Однако эта гипотеза строго обоснована лишь для начального момента времени [20]. Если этим обстоятельством пренебречь, то эффект пропорциональной амплитудной дисперсии волн останется за рамками приближенного описания [21–23]. Очевидно, что запросы современных технологий, связанные, например, с проектированием прецизионных датчиков деформации на основе карбина [3], требуют большей точности теоретического предсказания.

При подходящих начально-краевых условиях в карбине возможно спонтанное формирование трехчастотных солитонов огибающих. Тепло в форме таких солитонов может распространяться в цепочке атомов углерода без диффузии как нелинейная локализованная волна, что создает условия для эффективного теплообмена с окружающей средой.

Карбин является естественным материалом с периодической структурой и сравнительно небольшой изгибной жесткостью ($\beta/\alpha a^2 < 1$). Это означает, что трехволновые резонансные ансамбли, распадной модой которых может быть только продольная волна, являются замкнутыми и изолированными динамическими объектами. Существуют материалы с достаточно высокой изгибной жесткостью, для которых справедливо соотношение $\beta/\alpha a^2 \approx 1$ [4], препятствующее сохранению свойства замкнутости и изолированности трехволновых резонансных ансамблей, поскольку в таком случае распадными могут быть и поперечные, и продольные моды одновременно. Изучение подобных сложных объектов микромеханики представляет существенный интерес для развития тематики, затронутой в настоящей работе.

Список литературы

- [1] А.М. Сладков. Карбин — третья аллотропная форма углерода. Наука, М. (2003). 151 с.
- [2] P.P.K. Smith, P.R. Buseck. Carbon in the allende meteorite. Evidence for poorly graphitized carbon rather than carbyne. Proc. 12th Conf. Lunar Planet. Sci. Houston, USA (1981). P. 1167–1175.
- [3] M. Liu, V.I. Artyukhov, H. Lee, F. Xu, V.I. Yakobson. ACS Nano **7**, *11*, 10 075 (2013).
- [4] F. Gittes, B. Mickey, J. Nettleton, J. Howard. J. Cell Biol. **120**, *4*, 923 (1993).
- [5] В.Ф. Журавлёв, Д.М. Климов. Прикладные методы в теории колебаний. Наука, М. (1988). 328 с.
- [6] P.J. Kaup, A. Reiman, A. Bers. Rev. Mod. Phys. **51**, *2*, 275 (1979).
- [7] D.A. Kovrigine, A.I. Potapov. Eur. J. Mech. A **15**, *6*, 1049 (1996).
- [8] J.M. Ziman. Electrons and phonons. Clarendon Press, Oxford (1960). 554 p.
- [9] F.K. Ball, J. Fluid Mech. **19**, 465 (1964).
- [10] O.M. Phillips. The dynamics of the upper ocean. Cambridge University Press, (1977). 336 p.
- [11] E. Kartashova. Discrete Contin. Dynam. Syst. B **12**, *3*, 607 (2009).
- [12] В.И. Арнольд. УМН, **18**, *6 (114)*, 91 (1963).
- [13] К. Хуанг. Статистическая механика. Мир, М. (1966) 520 с.
- [14] J.H. Jeans. Proc. Roy. Soc. Lond. **76**, 545 (1905).
- [15] А.П. Сухоруков. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. Наука, М. (1988). 230 с.
- [16] A. Degasperis, M. Conforti, F. Baronio, S. Wabnitz. Phys. Rev. Lett. **97**, *9*, 093 901 (2006).
- [17] В.Е. Захаров, С.В. Манаков. ЖЭТФ **69**, *5*, 1654 (1975).
- [18] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. Мир, М. (1987). 479 с.
- [19] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. Физматлит, М. (2002). 536 с.
- [20] И. Пригожин. Неравновесная статистическая механика. Мир, М. (1964). 314 с.
- [21] Г.М. Заславский, Б.В. Чириков. УФН **105**, *1*, 3 (1971).
- [22] М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн. Наука, М. (1984). 432 с.
- [23] Б.Б. Кадомцев. Коллективные явления в плазме. Наука, М. (1988). 304 с.