05.1

Определение упругих модулей 3-го порядка по параметрам объемных солитонов деформации

© *Ф.Е. Гарбузов* [1,2], *А.М. Самсонов* [1], *А.А. Семёнов* [1,2], *А.Г. Шварц* [1]

[1] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: samsonov@math.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 15 сентября 2015 г.

Предложен метод определения упругих модулей 3-го порядка (модулей Мурнагана), основанный на оценке измеряемых параметров объемных солитонов деформации в трех основных типах конструкций — стержне, пластине и оболочке. Выведены формулы связи модулей 3-го порядка материала волновода с параметрами уединенной волны деформации (амплитуда, скорость, ширина на половине высоты). При наличии экспериментально измеренных параметров солитонов в трех типах волноводов, изготовленных из одного и того же материала, определение модулей 3-го порядка сводится к решению системы трех алгебраических уравнений с невырожденной матрицей.

Упругие свойства различных материалов определяются коэффициентами (модулями упругости) в степенном разложении потенциальной энергии по инвариантам тензора деформации (см., например, [1]). Модули упругости 2-го порядка описывают линейную зависимость напряжений от деформаций, в то время как модули 3-го порядка характеризуют нелинейные свойства материала.

Модули упругости 2-го порядка (например, модуль Юнга и коэффициент Пуассона) для большинства материалов измерены с высокой точностью, чего нельзя сказать о модулях 3-го порядка. Основной метод определения последних основан на зависимости скорости ультразвуковых волн (УЗ) (продольных и сдвиговых) от сжатия исследуемого образца. Этот метод, как и вся ультразвуковая дефектоскопия, основан на исследовании распространения УЗ-колебаний с частотой 0.5–25 MHz в контролируемых изделиях и используется для измерения модулей 3-го порядка для металлов, нанокомпозитов и сплавов [2], а также и для полимеров [3], однако у него есть ряд недостатков. Частоту УЗ-колебаний надо повышать, чтобы избежать дифракции, но с ростом частоты УЗ очень быстро растет затухание УЗ-колебаний. Вариации скоростей УЗ-волн зачастую очень малы, и для их регистрации требуются высокоточные измерения, более того, приводимые в литературе данные о модулях немногочисленны и говорят о большой погрешности данного метода [4–6].

Целью нашей работы является построение принципиально иной схемы расчета модулей третьего порядка (l, m, n), основанной не на ультразвуковых измерениях, а на экспериментальном определении параметров уединенной объемной волны — солитона деформации в различных волноводах, который почти не подвержен затуханию. Было показано, что распространение длинных продольных волн в трех основных элементах конструкций: стержне, пластине и оболочке, при учете нелинейности материала описывается одним и тем же нелинейным уравнением в частных производных с различными для каждого элемента коэффициентами (см. [7,8] и приведенные там ссылки). Модули упругости 3-го порядка (например, модули Ландау [1] или Мурнагана [4]) входят в линейной комбинации в коэффициент при слагаемом, нелинейно зависящем от деформации, причем выражение для этого коэффициента различно для каждого из типов волноводов. Тогда, при наличии измерений параметров объемных солитонов деформации в стержне, пластине и оболочке, изготовленных из одного и того же материала, задача определения модулей упругости 3-го порядка может быть приведена к решению системы из трех алгебраических уравнений. Распространение длинных продольных волн в нелинейно-упругом стержне описывается уравнением с двумя дисперсиями (УДД), которое для линейной компоненты продольной деформации $u = U_x$ имеет вид

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \left[\frac{\beta}{2\rho} u^2 + \frac{R^2 \nu}{2}\left(c^2 u_{xx} - (1-\upsilon) u_{tt}\right)\right]_{xx}, \qquad (1)$$

где U — продольная компонента вектора смещения, x — продольная координата, t — время, R — радиус стержня, ρ — плотность материала, $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость линейных продольных волн, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, β — коэффициент, описывающий малую нелинейность свойств материала и процесса деформирования [4,7] и зависящий от упругих модулей 2-го и 3-го порядка (модулей Мурнагана l, m, n):

$$\beta = 3E + 2l(1-2\nu)^3 + 4m(1+\upsilon)^2(1-2\upsilon) + 6n\upsilon. \tag{2}$$

Детальный вывод УДД и исследование математической модели можно найти в [7]. Уравнение (1) имеет, в частности, однопараметрическое решение в виде объемной уединенной волны деформации с амплитудой A

$$u = A\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{x \pm V(A)t}{\lambda(A)}\right), \tag{3}$$

причем скорость солитона V и величина λ зависят от амплитуды A и параметров стержня следующим образом:

$$V^2 = c^2 + \frac{A\beta}{3\rho}, \qquad \lambda^2 = 2R^2\nu^2\left(\frac{3E}{A\beta} - \frac{1-\nu}{\nu}\right). \tag{4}$$

В физическом эксперименте по наблюдению солитона объемной деформации может быть измерена L — так называемая „ширина на половине высоты", которая связана с величиной λ из (3) очевидным соотношением $L = 2\lambda\,\mathrm{Arch}(\sqrt{2})$.

Зная R, ρ и упругие модули 2-го порядка E и ν, можно независимо (не имея значений модулей 3-го порядка) вычислить величину коэффициента нелинейности β, используя соотношения (4). Если из физического эксперимента известны амплитуда солитона A и его скорость V, то β можно определить по формуле

$$\beta(A, V) = \frac{3\rho}{A}\,(V^2 - c^2). \tag{5}$$

Если же известны амплитуда солитона и ширина L на половине высоты, то β вычисляется по формуле

$$\beta(A, L) = \frac{3E}{A\left(\frac{1-\nu}{\nu} + \frac{L^2}{8\mathrm{Arch}^2(\sqrt{2})R^2\nu^2}\right)}. \tag{6}$$

При известной величине коэффициента β выражение (2) можно использовать как первое алгебраическое соотношение для определения модулей 3-го порядка l, m, n. Решение задачи о длинных продольных волнах в тонкой пластине из нелинейно-упругого материала можно найти в [7]. В случае плоской волны, распространяющейся вдоль срединной поверхности пластины, исходная система двух уравнений сводится к одному УДД вида (1), но с другими коэффициентами:

$$u_{tt} - \frac{c^2}{1-\nu^2}\,u_{xx} = \left[\frac{\beta}{2\rho}\,u^2 + \frac{\nu h^2}{12(1-\nu)^2}\left(\frac{c^2}{1+\nu}\,u_{xx} - (1-2\nu)u_{tt}\right)\right]_{xx}. \tag{7}$$

Здесь, аналогично (1), $u = U_x$ — линейная компонента продольной деформации, h — толщина пластины. Заметим, что коэффициенты (7) отличаются от приведенных в [7], что вызвано учетом граничных условий с точностью $O(h^3)$ на свободных боковых поверхностях пластины. Коэффициент нелинейности β для пластины по-прежнему зависит от модулей упругости 3-го порядка, но эта зависимость отличается от (2), не содержит модуля n и имеет вид

$$\beta = \frac{3E}{1-\nu^2} + 2l\,\frac{(1-2\nu)^3}{(1-\nu)^3} + 4m\,\frac{(1-2\nu)(1-\nu+\nu^2)}{(1-\nu)^3}. \tag{8}$$

Уравнение (7) имеет решение в виде уединенной волны типа (3), но с другими выражениями для скорости солитона V и величины λ:

$$V^2 = \frac{c^2}{1-\nu^2} + \frac{A\beta}{3\rho}; \quad \lambda^2 = \frac{\nu h^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{E\nu}{(1-\nu^2)A\beta} - \frac{1-2\nu}{3}\right). \tag{9}$$

Зная амплитуду A солитона объемной деформации в пластине и скорость его распространения V, можно найти значение коэффициента β для пластины по формуле

$$\beta(A, V) = \frac{3\rho}{A}\left(V^2 - \frac{c^2}{1-\nu^2}\right), \tag{10}$$

тогда как по измеренным амплитуде и ширине L на половине высоты эта величина находится по формуле

$$\beta(A, L) = \frac{E\nu}{A(1-\nu^2)\left(\frac{1-2\nu}{3} + \frac{L^2(1-\nu)^2}{4\mathrm{Arch}^2(\sqrt{2})\nu h^2}\right)}. \tag{11}$$

Формулу (8) можно рассматривать как второе алгебраическое соотношение для искомой системы уравнений для определения модулей 3-го порядка.

Решение задачи о продольных уединенных волнах в тонкой цилиндрической оболочке было получено в [8]. Было показано, что распространение длинных продольных волн в тонкой цилиндрической нелинейно-упругой оболочке, имеющей толщину h и радиус срединной поверхности R, также описывается УДД вида (7), причем в уравнении для оболочки все коэффициенты совпадают с соответствующими коэффициентами в (7), за исключением коэффициента β, который теперь имеет вид

$$\begin{aligned}\beta = E\left(\frac{3}{1-\nu^2} + \frac{\nu^2(4+3\nu)}{8(1-\nu)^2(1-\nu^2)}\,\frac{h^2}{R^2}\right)\\ + l\left(\frac{2(1-2\nu)^3}{(1-\nu)^3} + \frac{\nu(4-\nu)(1-2\nu)^3}{4(1-\nu)^5}\,\frac{h^2}{R^2}\right)\\ + m\left(\frac{4(1-2\nu)(1-\nu+\nu^2)}{(1-\nu)^3} + \frac{\upsilon^3(1-2\nu)(7-4\nu)}{2(1-\nu)^5}\,\frac{h^2}{R^2}\right)\\ - n\frac{3\upsilon^3}{4(1-\nu)^3}\,\frac{h^2}{R^{2'}}\end{aligned} \qquad (12)$$

и коэффициента при u_{xx}, имеющего вид — $\left(c^2/(1-\nu^2) + \right.$ $\left.+\nu^2c^2h^2/\{12(1-\nu)^3R^2\}\right)$.

Скорость уединенной волны и величина λ выражаются через амплитуду и параметры волновода следующим образом:

$$V^2 = \frac{A\beta}{3\rho} + c^2\left(\frac{1}{1-\nu^2} + \frac{\nu^2}{12(1-\nu)^3}\,\frac{h^2}{R^2}\right), \qquad (13)$$

$$\lambda^2 = \frac{\nu h^2}{(1-\nu)^2}\left(\frac{E\nu}{A\beta}\left(\frac{1}{1-\nu^2} - \frac{\nu(1-2\nu)}{12(1-\nu)^3}\,\frac{h^2}{R^2}\right) - \frac{1-2\nu}{3}\right).$$

Заметим, что, по сравнению с (8) и (9), в выражениях β, V и λ для оболочки появились слагаемые, пропорциональные h^2/R^2.

Формулы для вычисления коэффициента β для нелинейно-упругой оболочки по измеренным параметрам объемного солитона деформации будут иметь вид

$$\beta(A,V) = \frac{3\rho}{A}\left(V^2 - c^2\left(\frac{1}{1-\nu^2} + \frac{\nu^2}{12(1-\nu)^3}\,\frac{h^2}{R^2}\right)\right), \qquad (14)$$

$$\beta(A, L) = E\nu\left(\frac{1}{1-\nu^2} - \frac{\nu(1-2\nu)}{12(1-\nu)^3}\frac{h^2}{R^2}\right) \Big/ \left\{A\left(\frac{1-2\nu}{3} + \frac{L^2(1-\nu)^2}{4\mathrm{Arch}^2(\sqrt{2})\nu h^2}\right)\right\}. \tag{15}$$

В результате (12) есть третье алгебраическое соотношение для определения трех модулей Мурнагана l, m, n.

Таким образом, при наличии экспериментальных измерений параметров солитона продольной объемной деформации в трех типах волноводов (стержне, пластине и цилиндрической оболочке), изготовленных из одного и того же материала, выражения (2), (8) и (12) формируют систему из трех алгебраических уравнений с невырожденной матрицей для расчета модулей упругости 3-го порядка данного материала.

Значения модулей 3-го порядка, рассчитанные по данным экспериментов по возбуждению и регистрации объемных солитонов деформации в стержне, пластине [7,9] и коробе [8], изготовленных из полиметилметакрилата (ПММА), отличаются от приведенных в литературе [4,6] величин на порядок. С другой стороны, по экспериментальным данным о ширине на половине высоты солитона деформации в стержне [7,9] и известным значениям модулей Мурнагана из [6], можно оценить амплитуду солитона, которая для стержня из ПММА по порядку величины оказывается равной 10^{-2}, для стержня из полистирола (ПС) — равной 10^{-3}. Эти значения упругих деформаций близки к пределу упругости упомянутых материалов и ясно указывают на необходимость проведения более тщательных и воспроизводимых измерений модулей упругости 3-го порядка, чем это доступно в настоящее время.

Работа поддержана Российским научным фондом в рамках гранта № 14-12-00342.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965.
[2] *Коробов А.И., Прохоров В.М., Мехедов Д.М.* // ФТТ. 2013. Т. 55. В. 1.
[3] *Zhu Q., Burtin C., Binetruy C.* // Polymer Testing. 2014. V. 40. P. 178–186.
[4] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

[5] *Wang C.C.* // ZAMM. 1966. V. 46. N 2. P. 141–144.
[6] *Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А.* Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Киев: Наук. думка, 1983.
[7] *Samsonov A.M.* Strain Solitons in Solids and How to Construct Them. Chapman & Hall/CRC, 2001.
[8] *Dreiden G.V., Samsonov A.M., Semenova I.V., Shvartz A.G.* // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 105. P. 211 906.
[9] *Semenova I.V., Dreiden G.V., Samsonov A.M.* // Proc. SPIE. 2003. V. 5144. P. 521.