

03

## Электромагнитное излучение, создаваемое нелинейными осцилляциями заряженной капли

© С.О. Ширяева, А.Н. Григорьев, Н.Ю. Колбнева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
15000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 9 июля 2015 г.)

Асимптотический аналитический расчет нелинейных осцилляций сферической заряженной капли при многомодовой начальной деформации равновесной показал, что если в спектре изначально возбужденных мод содержатся две с последовательными номерами, то среди прочих возбуждается трансляционная мода осцилляций. При этом центр заряда капли совершает колебания возле положения равновесия, что приводит к генерации электромагнитного излучения дипольного типа. Показано, что интенсивность такого излучения на много порядков превышает интенсивность излучения капли, обнаруживаемую в расчетах первого порядка малости и связанную с осцилляциями заряженной поверхности капли.

### Введение

Расчет нелинейных, а также линейных осцилляций и устойчивости заряженных капель представляет интерес в связи с многообразием ситуаций, в которых встречается такой объект (см., например, обзоры [1,2] и указанную в них литературу). В частности, в связи задачей зондирования грозových облаков [3–5] возникает проблема расчета интенсивности электромагнитного излучения, генерируемого осциллирующими каплями. Проблема расчета интенсивности электромагнитного излучения от колеблющейся заряженной капли в линейном по амплитуде осцилляций приближении впервые была сформулирована в [6], там же были приведены первые оценки применительно к конвективным облакам. В [7] идеи [6] были развиты. Но в [5] было отмечено, что в [6] (и соответственно в [7]) при расчете интенсивности радиоизлучения от линейно осциллирующей капли была взята неверная асимптотика функций Ханкеля для малых значений аргумента. В итоге расчетная интенсивность электромагнитного излучения получилась существенно завышенной. Предварительные оценки излучения от нелинейно-осциллирующей заряженной капли [8] указали на его существенно большую (на порядки) интенсивность. Этой проблеме и посвящено настоящее рассмотрение.

### Постановка задачи

Рассмотрим эволюцию во времени сферической равновесной формы поверхности капли с радиусом  $R$  идеальной, несжимаемой, проводящей жидкости с плотностью  $\rho$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Примем, что капля находится в вакууме, ее полный заряд равен  $Q$ . В начальный момент времени  $t = 0$  равновесная сферическая форма капли претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение конечной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли. Зададимся

целью найти во втором порядке малости по отношению амплитуды начальной деформации к исходному радиусу сферической капли спектр возникающих осцилляций и интенсивность электромагнитного излучения при колебаниях центра заряда капли относительно положения равновесия.

Все рассмотрение проведем в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре масс капли.

Примем, что начальное возмущение поверхности капли осесимметрично, а поэтому форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Уравнение, описывающее поверхность капли, в безразмерных переменных, в которых  $R = \rho = \sigma = 1$ , имеет вид

$$r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1. \quad (1)$$

Принятое пренебрежение зависимостью начального возмущения  $\xi(\theta, t)$  формы капли от азимутального угла  $\varphi$  существенно упрощает и так довольно громоздкую математическую процедуру отыскания решения, но не ограничивает общности рассуждений.

Волновое движение жидкости в капле будем полагать потенциальным и примем, что поле скоростей движения жидкости в капле  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$  полностью определяется функцией потенциала скорости  $\psi(\mathbf{r}, t)$ .

Математическая формулировка сформулированной задачи имеет вид

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad \text{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$r = 1 + \xi(\theta, t):$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta}, \quad (5)$$

$$\Delta P - \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi(\mathbf{r}, t))^2 + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))^2 = \nabla \mathbf{n}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_s(t). \quad (7)$$

Кроме того, запишем условия неизменности полного объема капли (следствие несжимаемости жидкости), неподвижности центра масс, а также условие сохранения полного заряда капли:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi,$$

$$\int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \quad (8)$$

$$V = [0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (-\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = Q,$$

$$S = [r = 1 + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (9)$$

Начальные условия зададим в виде начальной деформации равновесной сферической формы капли, и для упрощения математической процедуры решения приравняем нулю начальную скорость движения поверхности:

$$t = 0:$$

$$\xi(\theta) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{n \in \Xi} h_n P_n(\mu),$$

$$\mu \equiv \cos \theta,$$

$$\sum_{n \in \Xi} h_n = 1, \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

где  $\Xi$  — множество значений номеров изначально возбужденных мод осцилляций.

В выражениях (5)–(10) введены обозначения:  $\Delta P$  — перепад постоянных давлений внутри капли и вне капли в состоянии равновесия,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности (1),  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  — вектор напряженности электрического поля собственного заряда капли,  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  — электрический потенциал,  $\Phi_s(t)$  — постоянный вдоль поверхности капли потенциал,  $\varepsilon$  — амплитуда начального возмущения формы поверхности капли,  $P_n(\mu)$  — полиномы Лежандра порядка  $n$ ,  $h_n$  — коэффициенты, определяющие парциальный вклад  $n$ -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение равновесной сферической поверхности,  $\xi_0$  и  $\xi_1$  — константы, определяемые из условий постоянства объема и неподвижности центра масс в начальный момент времени, с точностью до слагаемых третьего порядка малости по  $\varepsilon$ , равные

$$\xi_0 \approx -\varepsilon^2 \sum_{i \in \Xi} \frac{h_i^2}{(2i+1)} + O(\varepsilon^3),$$

$$\xi_1 \approx -\varepsilon^2 \sum_{i \in \Xi} \frac{9i h_{i-1} h_i}{(2i-1)(2i+1)} + O(\varepsilon^3). \quad (11)$$

В уравнениях (2), (4), (7), (9) предполагается, что в любой момент времени электрический заряд распределен по поверхности капли и находится в равновесии: приповерхностные токи отсутствуют, а характерное время перераспределения заряда много меньше характерного гидродинамического времени осцилляции поверхности:

$$\varepsilon_* \lambda \ll (\rho R^3 / \sigma)^{1/2},$$

где  $\lambda$  — удельное сопротивление жидкости,  $\varepsilon_*$  — диэлектрическая проницаемость жидкости.

## Метод многих временных масштабов

Для отыскания решения поставленной задачи с точностью до квадратичных по малому параметру  $\varepsilon$  слагаемых воспользуемся классическим методом многих масштабов [9,10]. Для этого искомые функции  $\xi(\theta, t)$ ,  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  представим в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$  и будем считать зависящими не просто от времени  $t$ , а от разных его масштабов, определенных через малый параметр  $\varepsilon$ :  $T_m \equiv \varepsilon^m t$ ,

$$\xi(\theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, T_2, \dots),$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots). \quad (12)$$

Производные по времени будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя разложения (12) в краевую задачу (2)–(9) и приравнявая в каждом из уравнений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций  $\xi^{(m)}$ ,  $\psi^{(m)}$ ,  $\Phi^{(m)}$ .

В силу линейности уравнений (2)–(4) им должны удовлетворять каждая из функций  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  в разложениях (12), поэтому выражения для отдельных поправок ищутся в виде

$$\psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots) r^n P_n(\mu),$$

$$\Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots) r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (13)$$

В виде рядов по полиномам Лежандра представляются и последовательные поправки к форме поверхности капли  $\xi^{(m)}$ :

$$\xi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots) P_n(\mu). \quad (14)$$

### Задача нулевого порядка малости по $\varepsilon$

В нулевом порядке малости по  $\varepsilon$  из задачи получим решение, описывающее равновесное состояние системы

$$\xi^{(0)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots) = 0, \quad \psi^{(0)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots) = 0, \\ \Phi^{(0)}(r, \theta, T_0, T_1, T_2, \dots) = \frac{Q}{T}. \quad (15)$$

При этом потенциал невозмущенной поверхности капли  $\Phi_s^{(0)} = Q$ .

### Задача первого порядка малости по $\varepsilon$

В первом порядке малости по  $\varepsilon$  для определения коэффициентов  $D_n^{(m)}, F_n^{(m)}, M_n^{(m)}$ , в решениях (13), (14) (при  $m = 1$ ) из уравнений (5)–(9) получается система

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}, \\ -\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} \right) = -(2 + L_\theta) \xi^{(1)}, \\ \Phi^{(1)} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \xi^{(1)} = \Phi_s^{(1)}, \\ \int_0^\pi \left[ \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \right] \sin \theta d\theta = 0, \\ \int_0^\pi \xi^{(1)} \sin \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi^{(1)} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0, \\ L_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (16)$$

Здесь  $\Phi_s^{(1)}$  поправка первого порядка малости к величине потенциала капли.

Выражения для поправок первого порядка к коэффициентам разложений (13), (14) несложно найти из системы (16) в виде

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) = 0, \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) = 0, \\ M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) = A_n(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_n T_0) + \text{с.с.}, \\ (n \geq 2), \quad (17)$$

$$D_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots)}{\partial T_0}, \quad (n \geq 1),$$

$$F_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots) = Q M_n^{(1)}(T_0, T_1, T_2, \dots), \quad (n \geq 0), \quad (18) \\ A_n(T_1, T_2, \dots) \equiv a_n(T_1, T_2, \dots) \exp[ib_n(T_1, T_2, \dots)],$$

$$\Phi_s^{(1)} = 0, \quad \omega_n^2 = n(n-1)((n+2) - W), \quad W = \frac{Q^2}{4\pi}. \quad (19)$$

Аббревиатура „с.с.“ означает — слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Зависимости функций  $a_n$  и  $b_n$  от параметров  $T_1, T_2$  и т.д. определяются в следующих порядках малости. Чтобы завершить рассмотрение задачи в линейном по  $\varepsilon$  приближении, достаточно принять, что  $a_n$  и  $b_n$  — константы и определить их из начальных условий (10). Посмотрим, какова будет погрешность такого приближения и на каких временных интервалах оно будет справедливым. Очевидно, что

$$a_n(T_1, T_2, \dots) \approx a_n + O(\varepsilon t), \\ b_n(T_1, T_2, \dots) \approx b_n + O(\varepsilon t). \quad (20)$$

В линейном по  $\varepsilon$  приближении разложение (12) для возмущенной поверхности с учетом решения (15) имеет вид

$$\xi(\theta, t) \approx \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, t, a_n, b_n) + \varepsilon O(\varepsilon t). \quad (21)$$

Ошибка в этом разложении окажется порядка первого члена, если  $t \sim O(\varepsilon^{-1})$ . Для значений  $t \geq O(\varepsilon^{-1})$  данное разложение становится непригодным. Таким образом, выражение (21) справедливо на временном интервале  $t \leq O(1)$ , в этом случае ошибка составляет величину  $\sim \varepsilon^2$ . Однако с целью оценки тенденций развития процесса выражением (21) можно пользоваться и на временных интервалах  $t \leq O(\varepsilon^{-1})$ , постоянно контролируя качество выполнения требования соизмеримости поправки первого порядка по сравнению с начальным возмущением. Более детальная информация о пределах применимости выписанного разложения может быть получена при анализе в следующем квадратичном порядке малости.

Подставляя разложение (21) с учетом (14), (17)–(20) в начальные условия (10), (11) и приравнивая друг другу величины одного порядка малости, найдем

$$a_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \Xi} h_m \delta_{mn}, \quad b_n = 0, \quad (n \geq 1),$$

где  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера. В итоге функция, описывающая эволюцию формы поверхности капли со временем, в линейном по  $\varepsilon$  приближении имеет вид

$$\xi(\theta, t) \approx \varepsilon \sum_{m \in \Xi} h_m \cos(\omega_m t) P_m(\mu) + O(\varepsilon^2). \quad (22)$$

Согласно этому решению, в первом порядке по  $\varepsilon$  поверхность капли совершает в окрестности равновесной сферы колебания, соответствующие суперпозиции всех изначально возбужденных мод.

### Задача второго порядка малости по $\varepsilon$

Для определения поправок второго порядка малости к найденному решению (т.е. для отыскания функций  $\xi^{(2)}(\theta, t)$ ,  $\psi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ ) приведем систему уравнений, получающуюся (5)–(9) приравнованием слагаемых при  $\varepsilon^2$ ,

$r = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} &= \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} \\ &- \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \xi^{(1)} - \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{8\pi} \left[ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right. \\ &\times \left. \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \xi^{(2)} + 2 \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} \right. \\ &\left. + \left( \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} + \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right)^2 \right) \left( \xi^{(1)} \right)^2 \right] \\ &+ (2 + L_\theta) \xi^{(2)} - 2 \xi^{(1)} (1 + L_\theta) \xi^{(1)} = 0, \\ \Phi^{(2)} + \left[ \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \xi^{(2)} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \left( \xi^{(1)} \right)^2 \right] &= \Phi_s^{(2)}, \\ \int_0^\pi \left[ \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} \right. & \\ \left. + \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(2)} + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} + 2 \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \right. & \\ \left. \times \left( \xi^{(1)} \right)^2 - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \right] \sin \theta d\theta = 0, & \\ \int_0^\pi \left( \xi^{(2)}(\theta, t) + \left( \xi^{(1)}(\theta, t) \right)^2 \right) \sin \theta d\theta = 0, & \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( 2 \xi^{(2)}(\theta, t) + 3 \left( \xi^{(1)}(\theta, t) \right)^2 \right) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0, & \quad (23) \end{aligned}$$

где  $\Phi_s^{(2)}$  — поправка второго порядка малости к потенциалу поверхности.

Подставляя разложения (13), (14) (при  $m = 2$ ), а также решения (15) и (17)–(19) в систему уравнений (23), получим дифференциальные уравнения для нахождения коэффициентов  $M_n^{(2)}(T_0, T_1, T_2, \dots)$ .

Требование исключения из решений этих уравнений секулярных членов показывает, что  $a_n$  и  $b_n$  не зависят от времени  $T_1$ . Их зависимость от более медленных

времен  $T_2, T_3$  и т.д. может быть определена лишь в следующих порядках приближений.

Решения полученных из системы (23) уравнений записываются в виде

$$\begin{aligned} M_0^{(2)}(T_0, T_2, \dots) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left\{ A_n(T_2, \dots) \bar{A}_n(T_2, \dots) \right. \\ &\left. + [A_n(T_2, \dots)]^2 \exp(i2\omega_n T_0) + \text{c.c.} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1^{(2)}(T_0, T_2, \dots) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9n}{(2n+1)(2n-1)} \\ &\times \left\{ A_n(T_2, \dots) A_{n-1}(T_2, \dots) \exp(i(\omega_n + \omega_{n-1})T_0) \right. \\ &\left. + A_n(T_2, \dots) \bar{A}_{n-1}(T_2, \dots) \exp(i(\omega_n - \omega_{n-1})T_0 + \text{c.c.}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots) &= \left\{ \left[ \frac{c_n(T_2, \dots)}{a_n(T_2, \dots)} + i d_n(T_2, \dots) \right] \right. \\ &\left. \times A_n(T_2, \dots) \exp(i\omega_n T_0) + \text{c.c.} \right\} + N_n(T_0, T_2, \dots), \quad (n \geq 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_n(T_0, T_2, \dots) &\equiv \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \lambda_{mln}^{(+)} A_m(T_2, \dots) A_l(T_2, \dots) \right. \\ &\times \exp(i(\omega_m + \omega_l)T_0) + \lambda_{mln}^{(-)} A_m(T_2, \dots) \bar{A}_l(T_2, \dots) \\ &\left. \times \exp(i(\omega_m - \omega_l)T_0) + \text{c.c.} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{mln}^{(\pm)} &\equiv \frac{\gamma_{mln} \pm \omega_m \omega_l \eta_{mln}}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2}; \quad \gamma_{mln} \equiv K_{mln} \left[ \omega_m^2 (n-m+1) \right. \\ &\left. + 2n(l+1) - 1 + (l(m+1) - m(2m-2n+7) + 3)n \frac{W}{2} \right] \\ &+ \alpha_{mln} \left( \frac{1}{m} \omega_m^2 + n \frac{W}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\eta_{mln} \equiv K_{mln} \left( \frac{n}{2} - m + 1 \right) + \alpha_{mln} \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{n}{2l} \right),$$

$$K_{mln} = [C_{l0, m0}^{n0}]^2,$$

$$\alpha_{mln} = -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0, l0}^{n0} C_{m-1, l1}^{n0}, \quad (24)$$

$C_{mk, lp}^{nq}$  — коэффициенты Клебша–Гордана, отличные от нуля, только когда индексы удовлетворяют соотношениям  $|m-l| \leq n \leq m+l$ ,  $m+l+n$  — четное [11]. Горизонтальная черта сверху над  $A_n$  в (24) обозначает комплексное сопряжение.

Коэффициенты в разложениях (13) для потенциала скорости  $\psi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$  и электростатического потенциа-

ла  $\Phi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$  связаны с решениями (17) и (24) следующими соотношениями:

$$D_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (m(m-1)K_{mln} - \alpha_{mln}) \frac{1}{m} \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} \times M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\}, \quad F_0^{(2)}(T_0, T_2, \dots) = 0,$$

$$F_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots) = Q \left\{ M_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} mK_{mln} M_m^{(1)}(T_0, T_2, \dots) M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\}.$$

Поправка второго порядка малости к электростатическому потенциалу поверхности имеет вид

$$\Phi_s^{(2)}(t) = -Q \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{2n+1} \left( M_n^{(1)}(t) \right)^2.$$

В решении (24)  $c_n(T_2, \dots)$  и  $d_n(T_2, \dots)$  — неизвестные функции времени, которые, как и  $a_n$  и  $b_n$ , не зависят от временных масштабов  $T_0$  и  $T_1$ . Аналогично тому, как это делалось для случая линейного приближения, чтобы завершить рассмотрение задачи в квадратичном по  $\varepsilon$  приближении, следует принять неизвестные функции  $a_n, b_n, c_n, d_n$  равными константам, величины которых определяются начальными условиями (10), (11). В этом случае разложение (12) для функции, описывающей искажение формы поверхности капли, принимает вид

$$\xi(\theta, t) \approx \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, T_0, a_n, b_n) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0, a_n, b_n, c_n, d_n) + \varepsilon O(\varepsilon^2 t), \quad (25)$$

где  $a_n, b_n, c_n, d_n$  — константы.

Выражение (25) справедливо на временном интервале  $t \leq O(1)$  с ошибкой  $\sim \varepsilon^3$ . На временном интервале  $O(1) \leq t \leq O(\varepsilon^{-1})$  величина ошибки сравнима со вторым слагаемым (с поправкой второго порядка малости). Следовательно, в разложении (25) справедливым останется лишь первый член, соответствующий линейному приближению. Таким образом, приближенное линейное решение задачи (22) строго применимо (равномерно пригодно) на временном интервале  $t \leq O(\varepsilon^{-1})$ . Всем разложением (25) можно пользоваться на временных интервалах  $t \leq O(\varepsilon^{-1})$ , имея в виду, что квадратичное по  $\varepsilon$  слагаемое должно оставаться лишь малой поправкой к линейному.

Характерным масштабом измерения времени в принятых безразмерных переменных является  $t_* = (R^3 \rho / \sigma)^{1/2}$ . Для капли воды миллиметрового радиуса

она будет  $\sim 0.004s$ , а при  $R = 1 \text{ cm}$   $t_* \sim 0.12s$ . Следовательно, выражение (25) будет адекватно описывать временную эволюцию формы капли воды для интервала времени  $t \leq 0.01s$  (при  $R = 1 \text{ mm}$ ) и  $t \leq 0.3s$  (при  $R = 1 \text{ cm}$ ). Решение же (22), если принять начальную амплитуду возмущения  $\varepsilon \sim 0.1$ , будет оставаться справедливым вплоть до значений времени, на порядок больших приведенных.

Разложение (25) подставим с учетом (14) в начальные условия (10), (11) и, приравнявая друг другу величины одного порядка малости, найдем неизвестные константы  $a_n, b_n, c_n, d_n$ :

$$a_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \Xi} h_m \delta_{nm}, \quad b_n = 0, \quad c_n = -\frac{1}{2} N_n(0),$$

$$d_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При этом выражения (17), (18), (24) для коэффициентов  $M_n^{(j)}(t)$  примут окончательный вид

$$M_n^{(1)}(t) = \sum_{m \in \Xi} \delta_{nm} h_m \cos(\omega_m t), \quad (26)$$

$$M_0^{(2)}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{m \in \Xi} \frac{h_m^2}{(2m+1)} (1 + \cos(2\omega_m t)),$$

$$M_1^{(2)}(t) = \sum_{i \in \Xi} \frac{9ih_{i-1}h_i}{(2i-1)(2i+1)} \cos(\omega_{i-1}T_0) \cos(\omega_iT_0),$$

$$M_n^{(2)}(t) = -N_n(0) \cos(\omega_n t) + N_n(t), \quad (n \leq 2),$$

$$N_n(t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{m \in \Xi} \sum_{j \in \Xi} h_m h_j \left[ \lambda_{mjn}^{(+)} \cos((\omega_m + \omega_j)t) + \lambda_{mjn}^{(-)} \cos((\omega_m - \omega_j)t) \right].$$

Легко заметить, что коэффициенты  $M_n^{(2)}(t)$  пропорциональны величинам  $\lambda_{mjn}^{(\pm)}$ , которые в свою очередь, согласно обозначениям (24), пропорциональны коэффициентам Клебша–Гордана  $C_{m0,10}^{n0}$  и  $C_{m-1,11}^{n0}$  и, следовательно, отличны от нуля, только если индексы удовлетворяют соотношениям:  $m + j + n$  — четное,  $|m - j| \leq n \leq m + j$  для любых значений  $m, j \in \Xi$ .

В итоге, подставляя (26) в (25), с учетом (1) найдем, что форма поверхности капли с точностью до слагаемых второго порядка малости (на временных интервалах  $t \leq O(1)$ ) описывается функцией

$$r(\theta, t) \approx 1 + \varepsilon \sum_{m \in \Xi} h_m \cos(\omega_m t) P_m(\mu) - \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m \in \Xi} \frac{h_m^2}{(2m+1)} (1 + \cos(2\omega_m t)) + \sum_{n=1}^{\infty} (N_n(0) \cos(\omega_n t) - N_n(t)) P_n(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3 t). \quad (27)$$

## Смещение центра заряда капли

Выясним, происходит ли смещение центра заряда капли при нелинейных осцилляциях ее поверхности

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_q &= \frac{1}{Q} \int_S \mathbf{r} dQ = -\frac{1}{4\pi Q} \int_S (\mathbf{n}, \nabla\Phi) \mathbf{r} dS \\ &= -\frac{1}{4\pi Q} \int_{\Omega} \frac{(\mathbf{n}, \nabla\Phi)}{\mathbf{n}, \mathbf{e}_r} r^3(\theta, t) \mathbf{e}_r d\Omega, \end{aligned}$$

где  $\Omega \equiv [0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi]$ , а  $r(\theta, t)$  определяется выражением (24).

Радиальный орт  $\mathbf{e}_r$  сферической системы координат связан с оортами декартовой системы координат

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \theta.$$

Выразим проекции вектора  $\mathbf{R}_q$  на декартовы оси через сферические функции  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ , учитывая соотношения [11]:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_1^0(\theta, \varphi), \\ \sin \theta \cos \varphi &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_1^{-1}(\theta, \varphi) - Y_1^1(\theta, \varphi)), \\ \sin \theta \sin \varphi &= i\sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_1^{-1}(\theta, \varphi) + Y_1^1(\theta, \varphi)). \end{aligned}$$

Для проекций вектора  $\mathbf{R}_q$  получим выражения

$$\begin{aligned} R_{qx} &= \frac{1}{2\sqrt{6\pi}Q} \int_{\Omega} r^3(\theta, t) \frac{(\mathbf{n}, \nabla\Phi)}{\mathbf{n}, \mathbf{e}_r} (Y_1^1(\theta, \varphi) - Y_1^{-1}(\theta, \varphi)) d\Omega, \\ R_{qy} &= -i \frac{1}{2\sqrt{6\pi}Q} \int_{\Omega} r^3(\theta, t) \frac{(\mathbf{n}, \nabla\Phi)}{\mathbf{n}, \mathbf{e}_r} (Y_1^1(\theta, \varphi) + Y_1^{-1}(\theta, \varphi)) d\Omega, \\ R_{qz} &= -\frac{1}{2\sqrt{3\pi}Q} \int_{\Omega} r^3(\theta, t) \frac{(\mathbf{n}, \nabla\Phi)}{\mathbf{n}, \mathbf{e}_r} Y_1^0(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (28) \end{aligned}$$

Подставим сюда (12) и представим подынтегральное выражение в (28) в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$  с точностью до слагаемых  $\sim \varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned} r^3(\theta, t) \frac{(\mathbf{n}, \nabla\Phi)}{\mathbf{n}, \mathbf{e}_r} &\approx -Q + \varepsilon \left[ \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} - Q\xi^{(1)} \right]_{r=1} \\ &+ \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r} - Q\xi^{(2)} + \left( \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} - \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\theta} \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta} \right]_{r=1} + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

а учитывая вид функций  $\xi^{(1)}(\theta, t)$  и  $\xi^{(2)}(\theta, t)$  из (24) и решение для потенциала  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , полученное из краевой

задачи (2), (4), (7), (9), запишем подынтегральное выражение в виде разложения по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} r^3(\theta, t) \frac{(\mathbf{n}, \nabla\Phi)}{\mathbf{n}, \mathbf{e}_r} &\approx -Q P_0(\mu) - \varepsilon Q \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) M_n^{(1)} P_n(\mu) \\ &- \varepsilon^2 Q \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2 - \delta_{n0}) M_n^{(2)}(t) - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[ ((m-1) \right. \right. \\ &\times (m+1) - m(n+1 - \delta_{n0})) K_{mln} - \alpha_{mln} \left. \left. \right] M_m^{(1)}(t) M_l^{(1)}(t) \right\} \\ &\times P_n(\mu) + Q(\varepsilon^3). \quad (29) \end{aligned}$$

Подставляя (29) в (28) и переходя от полиномов Лежандра к сферическим функциям [11], получим

$$P_j(\mu) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2j+1)}} Y_j^0(\theta, \varphi).$$

Учитывая условие ортонормированности сферических функций

$$\int_{\Omega} Y_j^m(\theta, \varphi) Y_n^k(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{jn} \delta_{mk}, \quad (30)$$

заметим, что при возбуждении осесимметричных (относительно оси  $z$ ) колебаний поверхности капли, когда возмущение ее равновесной сферической формы не зависит от угла  $\varphi$ , подынтегральное выражение (29) представлено в виде ряда по сферическим функциям с нулевым верхним индексом  $Y_j^0$  и в силу (30) смещения центра заряда в плоскости  $x, y$  не происходит

$$R_{qx} = R_{qy} = 0.$$

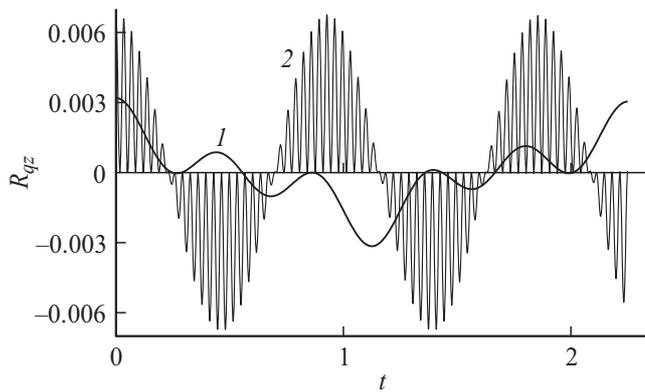
Его смещение вдоль оси  $OZ$  описывается выражением

$$\begin{aligned} R_{qz} &\approx \varepsilon^2 \left\{ M_1^{(2)}(t) - \frac{1}{3} \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[ (m^2 - 2m - 1) K_{ml1} - \alpha_{ml1} \right] \right. \\ &\times \left. M_m^{(1)}(t) M_l^{(1)}(t) \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

Воспользовавшись явным видом коэффициентов Клебша–Гордана [11], приведем (31) к более компактному виду

$$R_{qz} \approx \varepsilon^2 \left\{ M_1^{(2)}(t) + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{3n}{(2n+1)} M_n^{(1)}(t) M_{n-1}^{(1)}(t) \right\}.$$

Наконец, учитывая выражения для коэффициентов  $M_n^{(1)}(t)$  и  $M_1^{(2)}(t)$ , приведенные в (26), и переходя к размерным переменным для смещения центра заряда вдоль



**Рис. 1.** Зависимость безразмерного смещения центра заряда капли  $R_{qz}$  от безразмерного времени при  $\varepsilon = 0.1$ . Кривая 1 соответствует начальному возбуждению равновесной формы поверхности капли в линейном по  $\varepsilon$  приближении вида  $\varepsilon[P_3(\mu) + P_4(\mu)]/2$ , рассчитанная при  $Q = 8.3 \cdot 10^{-10} \mu\text{C}$  ( $\sim 1 \cdot 10^{-2} W_{\text{cr}}$  при  $R = 3 \mu\text{m}$  и  $\sim 4 \cdot 10^{-4} W_{\text{cr}}$  при  $R = 30 \mu\text{m}$ ). Кривая 2 соответствует начальному возбуждению равновесной формы поверхности капли вида  $\varepsilon[P_{20}(\mu) + P_{21}(\mu)]/2$ , рассчитанная при  $Q = 1.6 \cdot 10^{-7} \mu\text{C}$  ( $\sim 1 \cdot 10^{-2} W_{\text{cr}}$  при  $R = 80 \mu\text{m}$  и  $\sim 4 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 150 \mu\text{m}$ ).

оси  $z$  во втором порядке малости по безразмерному возмущению поверхности, получим

$$\begin{aligned} R_{qz} &\approx \varepsilon^2 R \sum_{m \in \Xi} \frac{6m(m-2)}{(2m-1)(2m+1)} h_m h_{m-1} \cos(\omega_m t) \cos(\omega_{m-1} t) \\ &\equiv \varepsilon^2 R \sum_{m \in \Xi} \frac{3m(m-2)}{(2m-1)(2m+1)} h_m h_{m-1} \left[ \cos((\omega_m + \omega_{m-1})t) \right. \\ &\quad \left. + \cos((\omega_m - \omega_{m-1})t) \right], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\omega_m^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} m(m-1) \left( (m+2) - \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \right).$$

На рис. 1 в безразмерных переменных, в которых  $R = \sigma = \rho = 1$ , приведены временные зависимости  $R_{qz}$  для различных пар изначально возбужденных мод.

## Излучение электромагнитных волн

Наличие осцилляций центра заряда капли превращает ее в излучатель электромагнитных волн дипольного типа. Рассмотрим случай, когда изначально возбуждены две соседние моды  $m$  и  $m-1$ . Интенсивность электромагнитного излучения от единичной капли  $I$  в соответствии с известным [12] выражением запишется в виде

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3c^3} \left\{ |d_{\omega_m + \omega_{m-1}}|^2 (\omega_m + \omega_{m-1})^4 \right. \\ &\quad \left. + |d_{\omega_{m-1} - \omega_m}|^2 (\omega_{m-1} - \omega_m)^4 \right\}, \end{aligned}$$

где  $c$  — скорость света в вакууме,  $d_{\omega_m}$  — дипольный момент капли, центр заряда которой колеблется с частотой  $\omega_m$ .

Дипольный момент капли по определению равен произведению заряда капли на модуль смещения центра заряда осциллирующей капли  $R_{qz}$ . Поскольку  $R_{qz}$  уже определен выражением (32), то видно, что по порядку величины модуль  $R_{qz}$  определится выражением, стоящим в (32) перед квадратными скобками. Таким образом, будем иметь

$$d_{\omega_m + \omega_{m-1}} \equiv d_{\omega_{m-1} - \omega_m} \equiv Q |R_{qz}|,$$

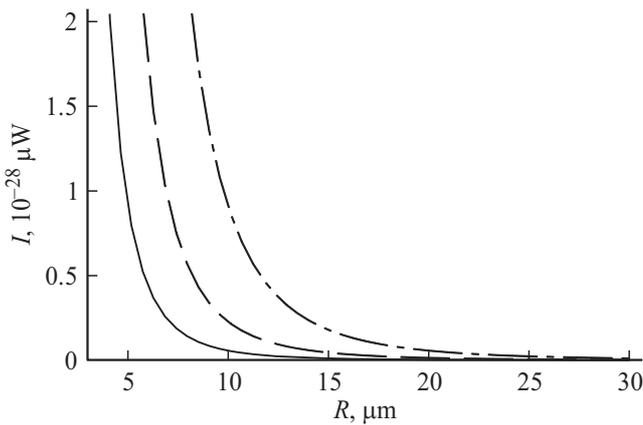
$|R_{qz}|$  — модуль амплитудного значения  $R_{qz}$ . Поэтому получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3c^3} Q^2 |R_{qz}|^2 \{ (\omega_m + \omega_{m-1})^4 + (\omega_{m-1} - \omega_m)^4 \} \\ &= \frac{12}{c^3} Q^2 R^2 \sum_{m \in \Xi} \left( \frac{\varepsilon^2 m(m-2)}{(2m-1)(2m+2)} h_m h_{m-1} \right)^2 \\ &\quad \times \{ (\omega_{m-1} + \omega_m)^4 + (\omega_{m-1} - \omega_m)^4 \}. \end{aligned} \quad (33)$$

Из (33) с учетом (32) можно оценить величину интенсивности фонового шумового электромагнитного излучения от различных жидкокапельных систем искусственного и естественного происхождения, например таких, как конвективные облака. Можно выделить два наиболее вероятных источника электромагнитного излучения капель в грозном облаке.

Первый возможный источник электромагнитного излучения связан с осцилляциями конечной амплитуды мелких капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30  $\mu\text{m}$ . Концентрация  $n$  таких капель в облаке  $\sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$  [13,14]. Осцилляции большой амплитуды облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией, дроблением на более мелкие в результате столкновительных процессов или в результате реализации электростатической неустойчивости, гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих капель, аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозных облаков. Амплитуды колебаний облачных капель, согласно данным натурных наблюдений [4,15], могут достигать десятков процентов от радиуса капли. На рис. 1 осцилляции центра заряда, связанные с первым источником излучения, приведены кривой 1.

Второй возможный источник электромагнитного излучения облака связан, согласно [6], со свободно падающими гидрометеорами, коагулирующими с более мелкими капельками и потому непрерывно колеблющимися и, следовательно, излучающими. Однако в [6] на роль излучающих гидрометеоров предлагались заряженные капли радиуса  $R = 1 \text{ mm}$ , концентрация которых в облаке, согласно данным наблюдений [13,14], весьма мала  $n \sim 1 \text{ m}^{-3}$ . В итоге оценки интенсивности



**Рис. 2.** Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной заряженной капли от радиуса при различных зарядах, рассчитанные при  $j = 4$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $h_3 = h_4 = 0.5$ ,  $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$ ,  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ . Сплошная линия соответствует  $Q = 8.3 \cdot 10^{-10} \text{ μC}$  ( $\sim 8 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 3 \text{ μm}$  и  $\sim 3 \cdot 10^{-4} W_{\text{cr}}$  при  $R = 30 \text{ μm}$ ), штриховая линия соответствует  $Q = 1.6 \cdot 10^{-9} \text{ μC}$  ( $\sim 2 \cdot 10^{-2} W_{\text{cr}}$  при  $R = 3 \text{ μm}$  и  $\sim 5 \cdot 10^{-4} W_{\text{cr}}$  при  $R = 30 \text{ μm}$ ), штрихпунктирная линия соответствует  $Q = 3.3 \cdot 10^{-9} \text{ μC}$  ( $\sim 3 \cdot 10^{-2} W_{\text{cr}}$  при  $R = 3 \text{ μm}$  и  $\sim 1 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 30 \text{ μm}$ ).

электромагнитного излучения из облака, основанные на обсуждаемом механизме, проведенные для экстремальных численных значений зарядов и концентраций капель с  $R = 1 \text{ mm}$ , по всей видимости, существенно завышены. Тем не менее, сам механизм, предложенный в [6], несомненно, должен работать, если в его основу положить на порядок более мелкие капли с  $R = 100 \text{ μm}$ , концентрация которых в облаке, согласно данным наблюдений [13,14], достаточно высока  $\sim 10^3 \text{ m}^{-3}$ , а скорость их свободного падения имеет величину  $\approx 78 \text{ cm/s}$ . При такой скорости падения сквозь облако капель с радиусами от 3 до  $30 \text{ μm}$  с максимумом концентрации, приходящимся на диапазон от 3 до  $7 \text{ μm}$ , гидрометеор будет испытывать каждую секунду около 22 столкновений, при которых в нем будут возбуждаться моды с  $n \in \{2-30\}$ . На рис. 1 осцилляции центра заряда, связанные со вторым источником излучения, приведены кривой 2.

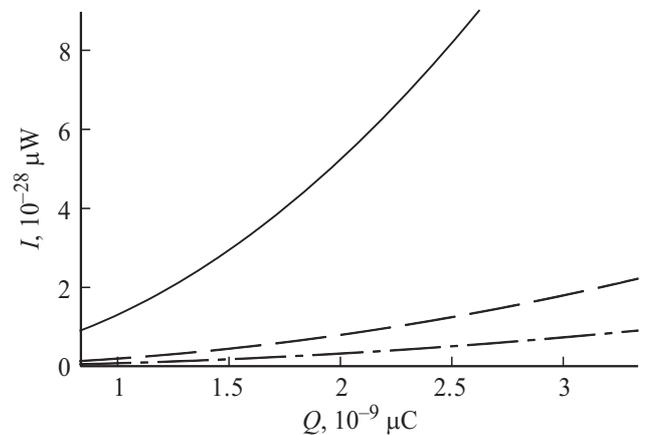
Для первого возможного источника электромагнитного излучения проведем оценку интенсивности фонового дипольного электромагнитного излучения, когда смещение центра заряда связано с возбуждением всего двух соседних мод с  $m - 1 = 3$  и  $m = 4$ . Тогда из (33) для капли радиусом  $R = 3 \text{ μm}$  несложно получить  $I \sim 7 \cdot 10^{-28} \text{ μW}$  на частоте  $\approx 9 \text{ MHz}$  (рис. 2).

Интегральная интенсивность электромагнитного излучения из облака диаметром  $10 \text{ km}$  будет в  $\approx 5 \cdot 10^{20}$  больше, а именно  $I_{\text{in}} \sim 4 \cdot 10^{-7} \text{ μW}$ , если условно принять для оценки по порядку величины, что все капли имеют одинаковый размер  $R = 3 \text{ μm}$ .

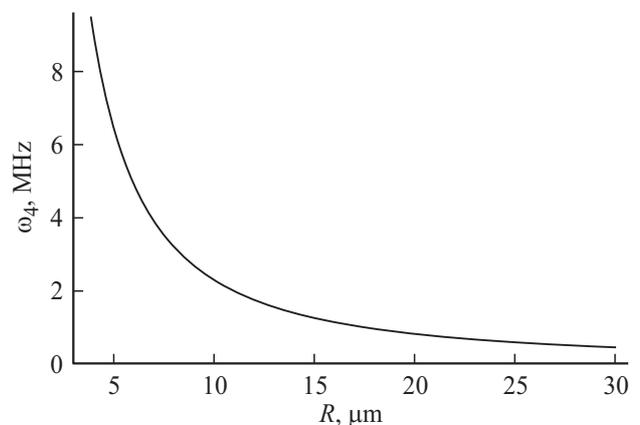
На рис. 3 приведены характеристики излучения в зависимости от величины заряда осциллирующей капли. Видно, что с увеличением заряда интенсивность излучения быстро увеличивается: при увеличении заряда в 4 раза интенсивность излучения увеличивается на порядок.

На рис. 4 приведены зависимости частоты излучения (частоты осцилляций капли) от радиуса капли. Видно, что с увеличением размера капли частота излучения быстро снижается.

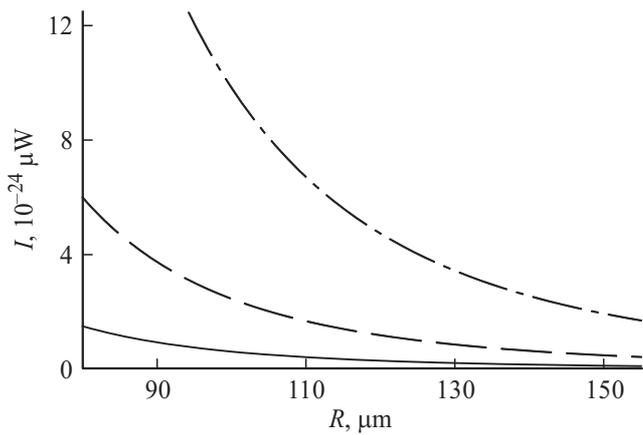
Для второго возможного источника излучения, если возбуждение трансляционной моды связано с возбуждением двух соседних мод с  $m - 1 = 20$  и  $m = 21$  гидрометеора с характеристиками  $R = 100 \text{ μm}$  и зарядом  $Q = 5 \cdot 10^{-4} \text{ CGSE}$  ( $\sim 8 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$ ). Тогда ин-



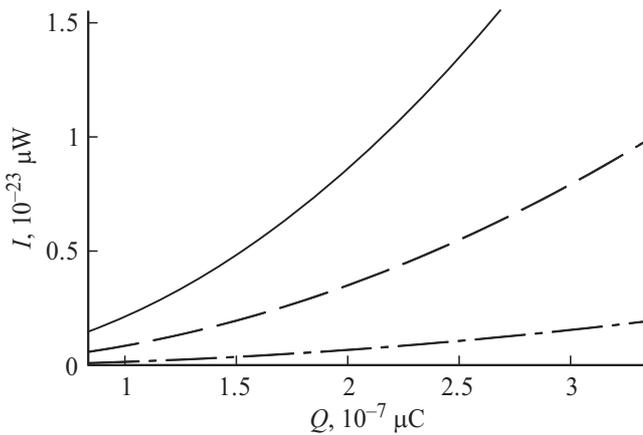
**Рис. 3.** Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной заряженной капли от ее заряда, при различных радиусах, рассчитанные при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1. Сплошная линия соответствует  $R = 5 \text{ μm}$ , штриховая —  $R = 8 \text{ μm}$ , штрихпунктирная —  $R = 10 \text{ μm}$ .



**Рис. 4.** Зависимости частоты электромагнитного излучения единичной заряженной капли от радиуса капли, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что на рис. 1 и  $Q = 8.3 \cdot 10^{-10} \text{ μC}$  ( $\sim 8 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 3 \text{ μm}$  и  $\sim 3 \cdot 10^{-4} W_{\text{cr}}$  при  $R = 30 \text{ μm}$ ).



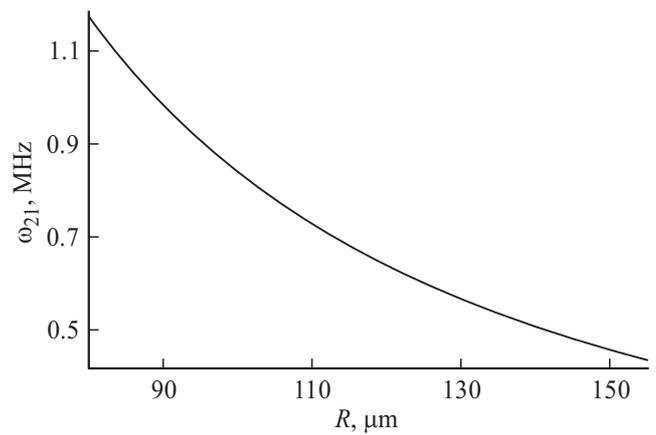
**Рис. 5.** Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичного заряженного гидрометеора от его радиуса, рассчитанные при  $j = 21$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $h_{20} = h_{21} = 0.5$ ,  $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$ ,  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ . Сплошная линия соответствует  $Q = 8.3 \cdot 10^{-8} \mu\text{C}$  ( $\sim 6 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 80 \mu\text{m}$  и  $\sim 2 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 150 \mu\text{m}$ ), штриховая —  $Q = 1.6 \cdot 10^{-7} \mu\text{C}$  ( $\sim 1 \cdot 10^{-2} W_{\text{cr}}$  при  $R = 80 \mu\text{m}$  и  $\sim 4 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 150 \mu\text{m}$ ), штрихпунктирная —  $Q = 3.3 \cdot 10^{-7} \mu\text{C}$  ( $\sim 2 \cdot 10^{-2} W_{\text{cr}}$  при  $R = 80 \mu\text{m}$  и  $\sim 9 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 150 \mu\text{m}$ ).



**Рис. 6.** Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичного заряженного гидрометеора от его заряда, рассчитанные при  $j = 21$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $h_{20} = h_{21} = 0.5$ ,  $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$ ,  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ . Сплошная линия —  $R = 80 \mu\text{m}$ , штриховая —  $R = 100 \mu\text{m}$ , штрихпунктирная —  $R = 150 \mu\text{m}$ .

тенсивность дипольного электромагнитного излучения составит  $I \sim 2 \cdot 10^{-24} \mu\text{W}$  на частоте около 800 kHz. Интегральная интенсивность электромагнитного излучения от всех гидрометеоров из грозового облака диаметром 10 km будет в  $\approx 5 \cdot 10^{14}$  раз больше:  $I_{\text{in}} \sim 1 \cdot 10^{-9} \mu\text{W}$ .

На рис. 5–7 приведены графики, связанные со вторым источником излучения, аналогичные приведенным на рис. 2–4. Из сравнения данных, приведенных на рис. 5, 6 с данными рис. 2, 3 несложно видеть, что электромагнитное излучение осциллирующей поверхности слабо заря-



**Рис. 7.** Зависимость частоты электромагнитного излучения единичного заряженного гидрометеора от радиуса равновеликой сферы, рассчитанная при  $j = 21$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $h_{20} = h_{21} = 0.5$ ,  $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$ ,  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ;  $Q = 1.6 \cdot 10^{-7} \mu\text{C}$  ( $\sim 1 \cdot 10^{-2} W_{\text{cr}}$  при  $R = 80 \mu\text{m}$  и  $\sim 4 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 150 \mu\text{m}$ ).

женных гидрометеоров ( $\sim 1 \cdot 10^{-2} W_{\text{cr}}$  при  $R = 80 \mu\text{m}$  и  $\sim 4 \cdot 10^{-3} W_{\text{cr}}$  при  $R = 150 \mu\text{m}$ ) существенно больше (на четыре-пять порядков) по сравнению с излучением мелких капелек. Но если брать интегральное излучение из облака следует учесть, что концентрация гидрометеоров с  $R \approx 100 \mu\text{m}$  ниже на шесть порядков чем концентрация мелких капелек с  $R \approx 3 \mu\text{m}$ . В итоге по порядку величины интегральная интенсивность излучения облака определится именно мелкими каплями.

Если возбуждены не две соседние моды, а целый диапазон соседних мод от  $m$  до  $m + j$ , то интегральная интенсивность излучения увеличится примерно в  $j$  раз.

На рис. 7 приведена зависимость частоты электромагнитного излучения единичного заряженного гидрометеора от радиуса равновеликой сферы. Видно, что тенденция изменения частоты, отмеченная для капли на рис. 4, сохраняется с увеличением размера гидрометеора частота излучения быстро снижается.

## Заключение

Дипольное электромагнитное излучение заряженных облаков естественного и искусственного происхождения может быть связано с нелинейным эффектом: возбуждением во втором порядке малости трансляционной моды осциллирующей заряженной капли, реализующимся, когда в спектре колебательных мод, определяющих начальную деформацию капли, имеются две моды с последовательными номерами. Интенсивность дипольного электромагнитного излучения существенно больше (на много порядков) чем интенсивность квадрупольного излучения, фиксируемого в расчетах первого порядка.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

## Список литературы

- [1] *Габович М.Д.* // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромылов В.А.* // Электромагнитная обработка материалов. 2005. № 4. С. 24–35.
- [3] *Кацурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 463 с.
- [4] *Beard K.V., Tokay A.A.* // Geophys. Res. Lett. E. 1991. Vol. 1. N 12. P. 2257–2260
- [5] *Богатов Н.А.* // VI International Conference. Petropavlovsk-Kamchatsky, 9 September 2013. Collection of the reports. P. 22–26.
- [6] *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
- [7] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 74–80.
- [8] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Голованов А.С.* // Письма в ЖТФ. 2001. Вып. 20. С. 65–71.
- [9] *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
- [10] *Naufel A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. N 3. P. 463–475.
- [11] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
- [12] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
- [13] *Мазин И.П., Шмистер С.М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 280 с.
- [14] *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера. Справочник / Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
- [15] *Beard K.V.* // Rev. Geophys. 1987. Vol. 25. N 3. P. 357–370.