

Параметрический генератор хаоса на варакторном диоде с распадным механизмом ограничения неустойчивости

© С.П. Кузнецов

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал,
410019 Саратов, Россия
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия
Университет Потсдама,
14469 Potsdam, Germany
e-mail: spkuz@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 5 мая 2015 г.)

Получены уравнения параметрического генератора хаоса, схема которого содержит три колебательных контура и варакторный диод, и выполнена их редукция к уравнениям для медленных амплитуд параметрически взаимодействующих мод. При учете только квадратичной нелинейности задача сводится к системе трех дифференциальных уравнений первого порядка для действительных амплитуд Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца с аттрактором типа Лоренца. При более аккуратном описании нелинейности варакторного диода уравнения для медленных амплитуд комплексные, и существенным оказывается изменение во времени фаз колебательных мод, что ведет к потере характерного для аттрактора Лоренца свойства грубости (робастности) хаотической динамики. Сопоставлены результаты численного исследования (портреты аттракторов, показатели Ляпунова) для моделей разного уровня аппроксимации.

Введение

Распадный механизм ограничения параметрической неустойчивости, приводящий к возникновению хаоса, относится к ситуации, когда две моды возбуждаются благодаря накачке на суммарной частоте, а отбор энергии осуществляет низкочастотная третья мода на разностной частоте. В свое время такая задача была рассмотрена Пиковским, Рабиновичем и Трахтенгерцем применительно к взаимодействию волн в магнитоактивной плазме [1]. Принимая во внимание только квадратичную нелинейность, авторы сформулировали систему уравнений для медленных комплексных амплитуд, которая в случае фиксированного соотношения фаз сводилась к системе трех дифференциальных уравнений первого порядка для действительных амплитуд с аттрактором типа Лоренца.¹

Аттрактор Лоренца — популярный и хорошо изученный пример странного хаотического аттрактора в модельной системе трех дифференциальных уравнений первого порядка [6–8]. Первоначально эта модель была рассмотрена для задачи о конвекции жидкости в подогреваемом снизу слое, но в дальнейшем оказалась применима к описанию множества систем различной физической природы. Сюда относятся односторонний лазер [9–11], водяное колесо Малкуса [12], задача о динамике гиростата [13,14], задача о движении тела эллипти-

¹ Ряд аспектов динамики модели Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца проанализирован позднее другими авторами. В частности, рассмотрена возможность динамики, сопровождающейся нарушением захвата фаз [2], проведено сопоставление модели с 10-мерной системой, относящейся к задаче о взаимодействии волн в плазме [3], принят математический анализ глобальной динамики [4], предложено обобщение модели, приводящее к появлению гиперхаоса [5].

ческого профиля в жидкости при действии вращающего момента [15] и другие [16–20]. Аттрактор Лоренца принадлежит к классу сингулярно гиперболических (квазигиперболических) аттракторов [21,22] и соответствует грубому (robust) хаосу [23,24] в том смысле, что хаос не разрушается при малом смещении по параметрам.² Математическое доказательство хаотической природы динамики на аттракторе Лоренца на основе сочетания аналитических и компьютерных методик представлено в 2002 г. Такером [26].

Помимо собственно модели Лоренца, во многих случаях представляют интерес ситуации хаотической динамики, отвечающие тем или иным ее обобщениям. Например, речь может идти об уравнениях с дополнительными нелинейными членами, системах большей размерности, в том числе об уравнениях в комплексных переменных, где при рассмотрении динамического поведения модель Лоренца привлекается как объект для сравнения. В частности, уравнения Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца [1] отличаются от модели Лоренца дополнительным нелинейным членом, хотя это не меняет качественно природу хаотической динамики и аттрактора, по крайней мере, в определенной области параметров задачи. Очевидно, такой же механизм генерации хаоса может реализоваться при параметрическом взаимодействии волновых или колебательных мод в системах различной физической природы,

² Аттрактор Лоренца, однако, не является структурно устойчивым в том смысле, что для него не имеет места эквивалентность топологического устройства при смещении по параметрам, свойственная равномерно гиперболическим аттракторам, таким как солениод Смейла–Вильямса и аттрактор Пльскина [22,25].

например, механических, радиотехнических, оптических, акустических [27–30].

В настоящей работе рассматривается радиотехнический параметрический генератор хаоса, функционирование которого обусловлено механизмом распадного ограничения неустойчивости. Схема очень проста и строится на основе трех колебательных контуров, где параметрическое возбуждение и взаимодействие мод обеспечивается присутствием варакторного диода с поданным на него переменным напряжением от внешнего генератора периодического сигнала накачки и постоянным напряжением смещения. Если учитывать только квадратичную нелинейность, то задача сводится к системе уравнений Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца с аттрактором типа Лоренца. Однако в реалистичных условиях функционирования схемы при более аккуратном описании, как выясняется, необходим учет членов, отвечающих за нелинейность варакторного диода, по крайней мере, до третьего порядка. При этом уравнения для медленных амплитуд получаются принципиально комплексными, так что динамика фаз возбуждающихся в параметрическом генераторе колебательных мод оказывается существенной.

Исследуемая модель и основные уравнения

Рассмотрим схему на рис. 1, составленную из трех колебательных контуров L_1-C_1 , L_2-C_2 и L_3-C_3 . Нелинейность и параметрическое возбуждение обеспечивается присутствием варакторного диода D_1 при подключении источника переменного напряжения накачки V_2 и постоянного напряжения смещения V_1 . Для аппроксимации нелинейной характеристики диода как зависимости дифференциальной емкости от напряжения полагаем

$$C(E) = \frac{C_0}{1 + E}, \quad (1)$$

где C_0 — константа с размерностью емкости, E — обратное напряжение в вольтах. Запасенный заряд определяется тогда выражением $Q(E) = C_0 \ln(1 + E) \approx C_0 E - \frac{1}{2} C_0 E^2 + \frac{1}{3} C_0 E^3$, а ток через диод — соотношением $I = \frac{dQ(E)}{dt}$.

Пусть U_1, U_2, U_3 — напряжения на конденсаторах C_1, C_2, C_3 , а I_1, I_2, I_3 — токи через катушки индуктивности L_1, L_2, L_3 . Уравнения Кирхгофа записываются в виде

$$\begin{aligned} L_1 \dot{I}_1 &= U_1, \\ L_2 \dot{I}_2 &= U_2, \\ L_3 \dot{I}_3 &= U_3, \\ C_1 \dot{U}_1 + U_1/R_1 + I_1 &= -I, \\ C_2 \dot{U}_2 + U_2/R_2 + I_2 &= -I, \\ C_3 \dot{U}_3 + U_3/R_3 + I_3 &= -I, \end{aligned} \quad (2)$$

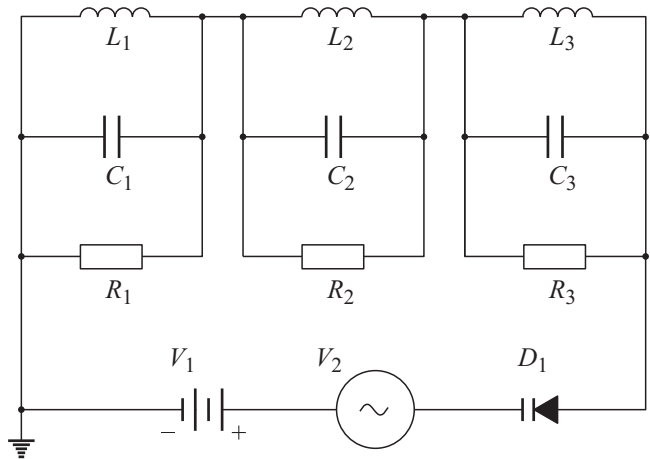


Рис. 1. Схема параметрического генератора хаоса. Анализ схемы в основной части работы проводится при номиналах $C_1 = C_2 = C_3 = 10 \text{ nF}$, $L_1 = 61.478 \mu\text{H}$, $L_2 = 151.113 \mu\text{H}$, $L_3 = 435.668 \mu\text{H}$. При напряжении смещения $V_1 = E_0 = 6 \text{ V}$ и емкости варакторного диода $C_D = C_0/(1 + V_1)$, где $C_0 = 2300 \text{ pF}$, это соответствует частотам нормальных мод $f_1 = 200 \text{ kHz}$, $f_2 = 125 \text{ kHz}$, $f_3 = 75 \text{ kHz}$. Сопротивления резисторов $R_1 = 981 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 242 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 968 \text{ k}\Omega$. Накачка осуществляется на частоте $f_0 = 325 \text{ kHz}$ при амплитуде напряжения источника $V_2 = \kappa = 0.33 \text{ V}$.

где I — ток через варакторный диод, определяемый выражением

$$I = \frac{C_0 \dot{U}}{1 + E_0 + U}, \quad U = U_1 + U_2 + U_3 + \kappa \sin 2\pi f_0 t, \quad (3)$$

E_0 — напряжение смещения, κ и f_0 — амплитуда и частота сигнала накачки. Условия параметрического резонанса, выполнение которых далее предполагается, имеют вид

$$f_3 = f_1 - f_2, \quad f_0 = f_1 + f_2, \quad (4)$$

где $f_{1,2,3}$ частоты нормальных мод в линейном приближении и без учета диссипации.

На рис. 2 показаны типичные временные зависимости напряжений на конденсаторах C_1, C_2, C_3 , полученные путем численного решения уравнений (2) при задании параметров в соответствии с указанными в подписи к рис. 1 номиналами элементов схемы. В приведенном масштабе неразличимо высокочастотное заполнение реализаций, но хорошо видна нерегулярная, очевидно, хаотическая, динамика амплитуд. Аналогичные зависимости получаются при схемотехническом моделировании параметрического генератора в программной среде Multisim при использовании в качестве нелинейного элемента варакторного диода ВВ112, причем соответствие имеет место при выборе константы $C_0 = 2300 \text{ pF}$.

Для получения уравнений в форме, допускающей сравнение с моделями Лоренца и Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца, нужно использовать метод медленных комплексных амплитуд. Сначала уместно перейти

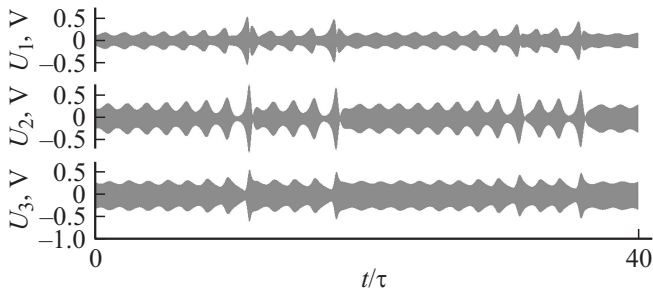


Рис. 2. Типичный вид временных зависимостей напряжений на конденсаторах C_1, C_2, C_3 при численном решении уравнений (2) для схемы на рис. 1 с указанными там номиналами компонентов. По горизонтальной оси отложено время, нормированное на константу $\tau = 2R_3C_3$.

к представлению динамики в нормальных модах линеаризованной системы согласно процедуре, известной в теории колебаний со многими степенями свободы [31]. Для этого выделим линейную часть тока через диод

$$I = \frac{C_0 \dot{U}}{1 + E_0} + C_0 \tilde{I}, \quad \tilde{I} = -\frac{U \dot{U}}{(1 + E_0)(1 + E_0 + U)} = \dot{W}(U),$$

$$W(U) = \ln\left(1 + \frac{U}{1 + E_0}\right) - \frac{U}{1 + E_0} \quad (5)$$

и перепишем уравнения в матричной форме

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = -\mathbf{J}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \tilde{I} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} C_1 C_0^{-1} + \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & C_2 C_0^{-1} + \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & C_3 C_0^{-1} + \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} L_1^{-1} C_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & L_2^{-1} C_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & L_3^{-1} C_0^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1^{-1} C_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} C_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} C_0^{-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

и

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + E_0},$$

$$\tilde{I} = -\dot{W}(U) = -\frac{\varepsilon \dot{U} U}{1 + \varepsilon U}, \quad U = U_1 + U_2 + U_3 + \kappa \sin \omega_0 t. \quad (8)$$

Далее, игнорируя пока диссипацию и нелинейность, имеем задачу на собственные векторы и собственные значения

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{U} = 0. \quad (9)$$

Введем для собственных чисел обозначения ω_s , где s принимает значения 1, 2, 3, и пусть $\mathbf{U}_s = (G_{1s}, G_{2s}, G_{3s})^T$ — соответствующие собственные векторы, нормированные на единицу при определении скалярного произведения $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v}$. Тогда преобразование посредством матрицы

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \quad (10)$$

обеспечивает одновременную диагонализацию матриц \mathbf{M} и \mathbf{K} :

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{G}^T \mathbf{K} \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Подстановка $\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{x}$ с умножением соотношения (6) слева на транспонированную матрицу \mathbf{G}^T приводит к уравнению

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{R}_0 \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{x} = -\mathbf{G}^T \mathbf{J}, \quad (12)$$

где $\mathbf{R}_0 = \mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{G}$. Далее, распишем матричное уравнение по компонентам, имея в виду, что сумма напряжений выражается через нормальные координаты $x_{1,2,3}$ как

$$U_1 + U_2 + U_3 = g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3, \quad (13)$$

где

$$g_1 = G_{11} + G_{21} + G_{31}, \quad g_2 = G_{12} + G_{22} + G_{32},$$

$$g_3 = G_{13} + G_{23} + G_{33}. \quad (14)$$

Используя обозначения $X_{1,2,3} = g_{1,2,3} x_{1,2,3}$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 &= \alpha_{11} \dot{X}_1 + \alpha_{12} \dot{X}_2 + \alpha_{13} \dot{X}_3 + \omega_1^2 X_1 \\ &= g_1^2 \ddot{W}(X_1 + X_2 + X_3 + \kappa \sin \Omega_0 t), \\ \ddot{X}_2 &= \alpha_{21} \dot{X}_1 + \alpha_{22} \dot{X}_2 + \alpha_{23} \dot{X}_3 + \omega_2^2 X_2 \\ &= g_2^2 \ddot{W}(X_1 + X_2 + X_3 + \kappa \sin \Omega_0 t), \\ \ddot{X}_3 &= \alpha_{31} \dot{X}_1 + \alpha_{32} \dot{X}_2 + \alpha_{33} \dot{X}_3 + \omega_3^2 X_3 \\ &= g_3^2 \ddot{W}(X_1 + X_2 + X_3 + \kappa \sin \Omega_0 t), \end{aligned} \quad (15)$$

где α_{ij} — элементы матрицы \mathbf{R}_0 .

Следующий шаг в упрощении задачи состоит в том, чтобы оставить в уравнениях только те члены, которые могут давать резонансный вклад при взаимодействии мод с учетом соотношения частот $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

Помимо колебаний с частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ переменные X_1, X_2, X_3 содержат относительно небольшую составляющую на частоте ω_0 , которую можно исключить, скорректировав напряжение накачки

на варакторном диоде с учетом падения напряжения этой частоты на трех колебательных контурах. Определив импеданс колебательных контуров как $Z = \sum_{k=1}^3 [i\omega_0 L_k + (i\omega_0 C_k)^{-1} + R_k]$, а для варакторного диода при малом сигнале как $Z_D \approx (i\omega_0 C_D)^{-1}$, $C_D = C_0/(1 + V_1)$ найдем модифицированный параметр интенсивности накачки $\bar{\kappa} = \kappa |Z_D \parallel Z + Z_D|^{-1}$. При заданных номиналах компонентов схемы импеданс, как легко проверить, определяется емкостным сопротивлением, и, учитывая, что $C_{1,2,3} = C$, имеем $\bar{\kappa} \approx \kappa(1 + 3C_D C^{-1}) \approx 0.91\kappa$.

В рассматриваемом приближении исключим перекрестные диссипативные члены в левой части уравнений (15), оставив диагональные элементы диссипативной матрицы:

$$\alpha_{11} = \frac{G_{11}^2}{R_1} + \frac{G_{21}^2}{R_2} + \frac{G_{31}^2}{R_3}, \quad \alpha_{22} = \frac{G_{12}^2}{R_1} + \frac{G_{22}^2}{R_2} + \frac{G_{32}^2}{R_3},$$

$$\alpha_{33} = \frac{G_{13}^2}{R_1} + \frac{G_{23}^2}{R_2} + \frac{G_{33}^2}{R_3}, \quad (16)$$

а в правой части используем разложение функции в ряд с учетом квадратичной и кубической нелинейностей:

$$W(U) = \ln(1 + \varepsilon U) - \varepsilon U \approx -\frac{1}{2} \varepsilon^2 U^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 U^3, \quad (17)$$

так что для членов, вносящих резонансный вклад в первом, втором и третьем уравнениях имеем соответственно

$$\begin{aligned} \dot{W} &\approx -\omega_1^2 W_1 \approx -\varepsilon^2 \omega_1^2 (X_2 X_3 + X_4 X_2) \\ &\quad + \varepsilon^3 \omega_1^2 \left[\frac{1}{3} X_1^3 + (X_2^2 + X_3^2 + X_4^2) X_1 + 2X_1 X_3 X_4 \right], \\ \dot{W} &\approx -\omega_2^2 W_2 \approx -\varepsilon^2 \omega_2^2 (X_1 X_3 + X_4 X_1) \\ &\quad + \varepsilon^3 \omega_2^2 \left[\frac{1}{3} X_2^3 + (X_1^2 + X_3^2 + X_4^2) X_2 + 2X_2 X_3 X_4 \right], \\ \dot{W} &\approx -\omega_3^2 W_3 \approx -\varepsilon^2 \omega_3^2 X_1 X_2 \\ &\quad + \varepsilon^3 \omega_3^2 \left[\frac{1}{3} X_3^3 + (X_1^2 + X_2^2 + X_4^2) X_3 \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где $X_4 = \bar{\kappa} \sin \omega_0 t = \bar{\kappa} (\frac{1}{2} i e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2} i e^{-i\omega_0 t})$. Таким образом, устранение членов, заведомо не дающих резонансного вклада, сводит задачу к системе

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 + \alpha_{11} \dot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 &= \omega_1^2 g_1^2 \varepsilon^2 \left[-X_2 X_4 - X_2 X_3 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left(\frac{1}{3} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + 2X_3 X_4 \right) X_1 \right], \\ \dot{X}_2 + \alpha_{22} \dot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 &= \omega_2^2 g_2^2 \varepsilon^2 \left[-X_1 X_4 - X_1 X_3 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left(X_1^2 + \frac{1}{3} X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + 2X_3 X_4 \right) X_2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_3 + \alpha_{33} \dot{X}_3 + \omega_3^2 X_3 &= \omega_3^2 g_3^2 \varepsilon^2 \\ &\quad \times \left[-X_1 X_2 + \varepsilon \left(X_1^2 + X_2^2 + \frac{1}{3} X_3^2 + X_4^2 \right) X_3 \right]. \end{aligned}$$

Перейдем к выводу уравнений для комплексных амплитуд и представим обобщенные координаты и скорости в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1 e^{i\omega_1 t} + a_1^* e^{-i\omega_1 t}, \quad \dot{X}_1 = i\omega_1 a_1 e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 a_1^* e^{-i\omega_1 t}, \\ X_2 &= a_2 e^{i\omega_2 t} + a_2^* e^{-i\omega_2 t}, \quad \dot{X}_2 = i\omega_2 a_2 e^{i\omega_2 t} - i\omega_2 a_2^* e^{-i\omega_2 t}, \\ X_3 &= i a_3 e^{i\omega_3 t} - i a_3^* e^{-i\omega_3 t}, \quad \dot{X}_3 = -\omega_3 a_3 e^{i\omega_3 t} - \omega_3 a_3^* e^{-i\omega_3 t}. \end{aligned} \quad (20)$$

Это подразумевает выполнение дополнительных условий на введенные амплитудные переменные

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 e^{i\omega_1 t} + \dot{a}_1^* e^{-i\omega_1 t} &= 0, \quad \dot{a}_2 e^{i\omega_2 t} + \dot{a}_2^* e^{-i\omega_2 t} = 0, \\ \dot{a}_3 e^{i\omega_3 t} + \dot{a}_3^* e^{-i\omega_3 t} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

При подстановке (20) в уравнения (19), принимая во внимание формулы (21) и выражения для переменной X_4 , после усреднения по быстрым колебаниям с учетом соотношения частот $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ получим систему уравнений для медленных амплитуд

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + \frac{1}{2} \alpha_{11} a_1 &= \frac{1}{2} \omega_1 g_1^2 \varepsilon^2 \left[-a_2 a_3 + \frac{1}{2} \bar{\kappa} a_2^* \right. \\ &\quad \left. - i \varepsilon \left(|a_1|^2 + 2|a_2|^2 + 2|a_3|^2 + \frac{1}{2} \bar{\kappa}^2 \right) a_1 - i \varepsilon \bar{\kappa} a_1^* a_3 \right], \\ \dot{a}_2 + \frac{1}{2} \alpha_{22} a_2 &= \frac{1}{2} \omega_2 g_2^2 \varepsilon^2 \left[a_1 a_3^* + \frac{1}{2} \bar{\kappa} a_1^* \right. \\ &\quad \left. - i \varepsilon \left(2|a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_3|^2 + \frac{1}{2} \bar{\kappa}^2 \right) a_2 + i \varepsilon \bar{\kappa} a_2^* a_3^* \right], \\ \dot{a}_3 + \frac{1}{2} \alpha_{33} a_3 &= \frac{1}{2} \omega_3 g_3^2 \varepsilon^2 \\ &\quad \times \left[a_1 a_2^* + i \varepsilon \left(2|a_1|^2 + 2|a_2|^2 + |a_3|^2 + \frac{1}{2} \bar{\kappa}^2 \right) a_3 \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Для приведения к безразмерной форме введем нормированное время $\bar{t} = 2\alpha_{33}^{-1} t$, а также новые переменные

$$\begin{aligned} A_1 &= \varepsilon^2 \alpha_{33}^{-1} g_2 g_3 (\omega_2 \omega_3)^{1/2} a_1, \\ A_2 &= \varepsilon^2 \alpha_{33}^{-1} g_3 g_1 (\omega_3 \omega_1)^{1/2} a_2, \\ A_3 &= \varepsilon^2 \alpha_{33}^{-1} g_1 g_2 (\omega_1 \omega_2)^{1/2} a_3 \end{aligned} \quad (23)$$

и параметры

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{33}}, \quad v_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{33}}, \quad h = \frac{\bar{\kappa} \varepsilon^2 g_1 g_2 \sqrt{\omega_1 \omega_2}}{2\alpha_{33}}, \\ \beta_{ij} &= \frac{2\alpha_{33} \omega_i \omega_j g_i^2 g_j^2}{\varepsilon \omega_1 \omega_2 \omega_3 g_1^2 g_2^2 g_3^2}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (24)$$

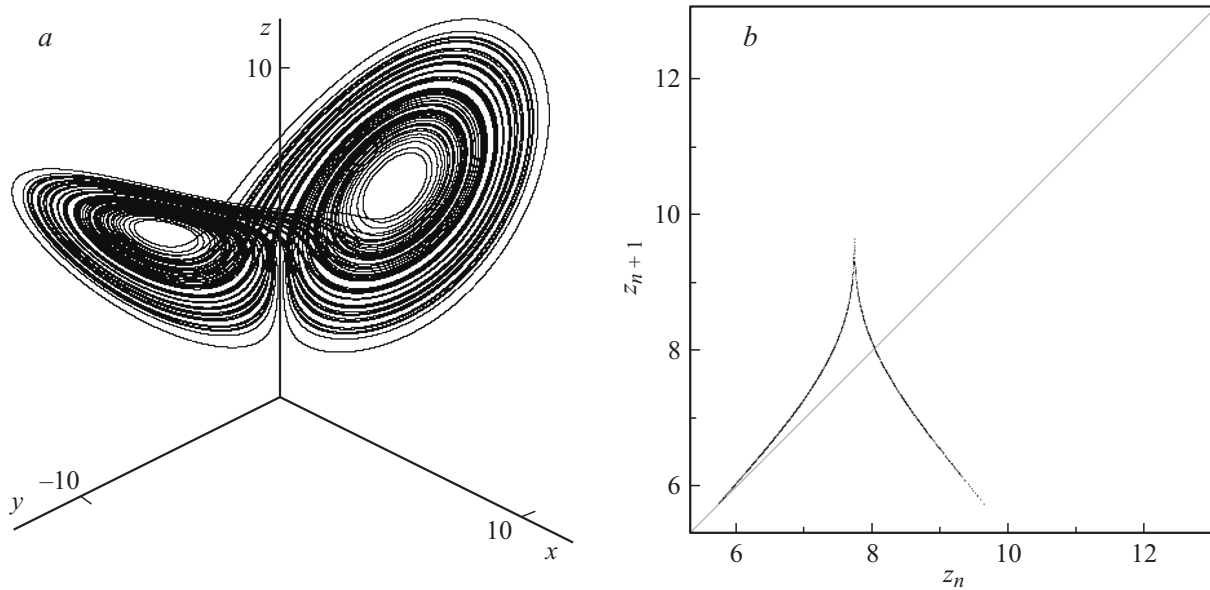


Рис. 3. Портрет аттрактора Лоренца в трехмерном пространстве состояний системы (29) (а) и отображение для последовательных максимумов переменной z в процессе временной эволюции (б). Графики построены по результатам численного решения уравнений с параметрами $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $h = 6.0017$.

В итоге приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \nu_1 A_1 &= -A_2 A_3 + h A_2^* + i \left(\frac{1}{2} \beta_{11} |A_1|^2 + \beta_{12} |A_2|^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta_{13} |A_3|^2 \right) A_1 + i \beta_{13} (h A_1^* A_3 + h^2 A_1), \\ \dot{A}_2 + \nu_2 A_2 &= A_2 A_3^* + h A_1^* + i \left(\beta_{12} |A_1|^2 + \frac{1}{2} \beta_{22} |A_2|^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta_{23} |A_3|^2 \right) A_2 + i \beta_{23} (-h A_2^* A_3^* + h^2 A_2), \\ \dot{A}_3 + A_3 &= A_1 A_2^* + i \left(\beta_{13} |A_1|^2 + \beta_{23} |A_2|^2 + \frac{1}{2} \beta_{33} |A_3|^2 \right) A_3 \\ &\quad + i \beta_{33} h^2 A_3. \end{aligned} \quad (25)$$

Аттрактор Лоренца в модели с квадратичной нелинейностью

Если не учитывать кубическую нелинейность, то система (19) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 + \alpha_{11} \dot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 &= -\omega_1^2 g_1^2 \varepsilon^2 (\bar{\kappa} X_2 \sin \omega_0 t + X_2 X_3), \\ \dot{X}_2 + \alpha_{22} \dot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 &= -\omega_2^2 g_2^2 \varepsilon^2 (\bar{\kappa} X_1 \sin \omega_0 t + X_1 X_3), \\ \dot{X}_3 + \alpha_{33} \dot{X}_3 + \omega_3^2 X_3 &= -\omega_3^2 g_3^2 \varepsilon^2 X_1 X_2. \end{aligned} \quad (26)$$

В амплитудных уравнениях (25) это соответствует $\beta_{ij} \equiv 0$, и они тогда оказываются совпадающими

с уравнениями работы Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца [1]:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + \nu_1 A_1 &= -A_2 A_3 + h A_2^*, & \dot{A}_2 + \nu_2 A_2 &= A_1 A_3^* + h A_1^*, \\ \dot{A}_3 + A_3 &= A_1 A_2^*. \end{aligned} \quad (27)$$

Подстановкой

$$A_1 = x e^{i\varphi}, \quad A_2 = y e^{-i\varphi}, \quad A_3 = z e^{2i\varphi} \quad (28)$$

в предположении $\varphi = \text{const}$ отсюда получаем уравнения

$$\dot{x} = h y - \nu_1 x - y z, \quad \dot{y} = h x - \nu_2 y + x z, \quad \dot{z} = -z + x y. \quad (29)$$

Согласно [1], модель (29) имеет аттрактор типа Лоренца в трехмерном фазовом пространстве действительных переменных x, y, z , что, в частности, справедливо в случае $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $h = 6.0017$, отвечающем номиналам компонентов исходной схемы в подписи к рис. 1. На рис. 3 показан портрет аттрактора в трехмерном фазовом пространстве системы (29), построенный по результатам численного решения уравнений. Также приводится график отображения, полученный в соответствии с процедурой, примененной в работе Лоренца [6], где по осям координат отложены значения максимумов переменной z , достигаемых по ходу временной эволюции состояния системы. Вид графика с острым максимумом, напоминающий классическое отображение „зуб пилы“ [1,6–8], свидетельствует, что аттрактор квазигиперболический, как и классический аттрактор Лоренца.

Расчет показателей Ляпунова путем совместного численного решения уравнений (29) и соответствующих

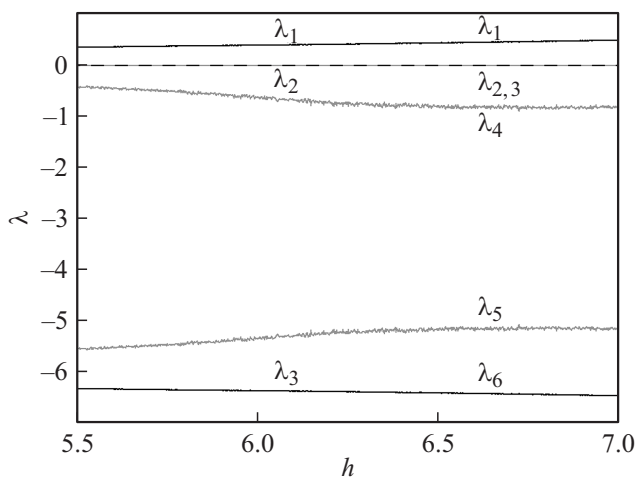


Рис. 4. Зависимость показателей Ляпунова модели (29), помеченных как λ_{1-3} в левой части рисунка, и показателей модели (27), помеченных как λ_{1-6} в правой части рисунка, от параметра h . Остальные параметры: $\nu_1 = 1, \nu_2 = 4$.

уравнений в вариациях с применением алгоритма Беннеттина и ортогонализацией векторов возмущения по Граму–Шмидту [32,8] дает³

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.397 \pm 0.001, & \lambda_2 &= 0.0000 \pm 0.0001, \\ \lambda_3 &= -6.397 \pm 0.001. \end{aligned} \quad (30)$$

Присутствие положительного показателя говорит о наличии хаоса, характеризуемого экспоненциальным ростом отклонения от опорной траектории при динамике на аттракторе с малым возмущением начальных условий. Второй показатель, равный нулю с точностью до ошибки вычисления, ассоциируется, очевидно, с возмущением типа сдвига вдоль траектории. Третий показатель отрицательный и отвечает за приближение траекторий к аттрактору. Тот факт, что сумма показателей отрицательна, свидетельствует о сжатии фазового объема в трехмерном пространстве. Ее величина согласуется с аналитическим вычислением дивергенции векторного поля, заданного правыми частями (29):

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \partial_x f_x + \partial_y f_y + \partial_z f_z = -\nu_1 - \nu_2 - 1 = -6.$$

Оценка размерности аттрактора по формуле Капана–Йорке [8,33] дает $D = 2 + \lambda_1/|\lambda_3| \approx 2.12$.

На рис. 4 приведена зависимость трех показателей Ляпунова модели (29) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ от параметра h . Плавный характер зависимости и отсутствие на графике старшего показателя провалов (окоп регулярности) подтверждают робастность хаоса в трехмерной системе (29) и соответствуют заключению о квазигиперболической природе

³ Вычисления показателя Ляпунова проводились на интервалах нормированного времени длительности 50 000 с подсчетом среднего значения и среднеквадратичного отклонения по 20 реализациям. В качестве погрешности указывается оценка среднеквадратичного отклонения.

аттрактора, сделанному на основе характерной формы графика отображения на рис. 3, b.

Для сравнения приведем результаты численного решения уравнений, отвечающих системе трех осцилляторов, связанных через посредство квадратичной нелинейности, без редукции к медленным амплитудам. На рис. 5 показаны портрет аттрактора и график отображения для системы (26). Масштаб выбран таким образом, чтобы можно было провести визуальное сопоставление с рис. 3. Отметим, что портреты аттракторов и графики отображений на обоих рисунках находятся в отличном соответствии, т. е. метод медленных амплитуд в данном режиме функционирования системы работает очень хорошо.

Интересно сравнить показатели Ляпунова, вычисленные при одних и тех же параметрах $\nu_1 = 1, \nu_2 = 4, h = 6.0017$ для уравнений с действительными и с комплексными амплитудами. Для системы (27) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.397 \pm 0.001, & \lambda_2 &= 0.0000 \pm 0.0002, \\ \lambda_3 &= 0.0000 \pm 0.0003, & \lambda_4 &= -0.631 \pm 0.05, \\ \lambda_5 &= -5.369 \pm 0.05, & \lambda_6 &= -6.397 \pm 0.003. \end{aligned}$$

В списке присутствует два нулевых показателя, один из которых связан с возмущением сдвига вдоль траектории, а второй — со сдвигом по фазовой переменной φ (см. (28)). Показатели $\lambda_{1,2,6}$ находятся в хорошем соответствии с показателями $\lambda_{1,2,3}$ из списка (30). Дополнительные показатели $\lambda_{4,5}$ отвечают, очевидно, за релаксацию фаз к ситуации, описываемой уравнениями для действительных амплитуд. На рис. 4 приводится зависимость от параметра h шести показателей Ляпунова модели (27), три из которых неотличимы от показателей модели (29).

Если говорить о системе осцилляторов с квадратичной нелинейностью без редукции к медленным амплитудам (26) и о модели с комплексными амплитудами (27), то безоговорочно переносить на них вывод о грубости аттрактора Лоренца трехмерной модели (29) некорректно. В самом деле, в шестимерной системе изменение правых частей, нарушающее фазовые соотношения (28), может вести к изменению природы аттрактора. (Это будет продемонстрировано в следующем разделе.) Формальным признаком, указывающим на возможное нарушение грубости в этом смысле, служит наличие у комплексной системы (27) дополнительного нулевого показателя Ляпунова. Тем не менее вид отображения на рис. 5 и характер зависимости показателей Ляпунова системы (27) от параметра соответствуют робастному хаосу. Это объясняется тем, что в моделях с чисто квадратичной нелинейностью, по крайней мере, в рассматриваемой области параметров имеет место обусловленная отрицательными показателями Ляпунова $\lambda_{4,5}$ релаксация фаз к ситуации, отвечающей (28), и редукция к упрощенным уравнениям (29) правомерна.

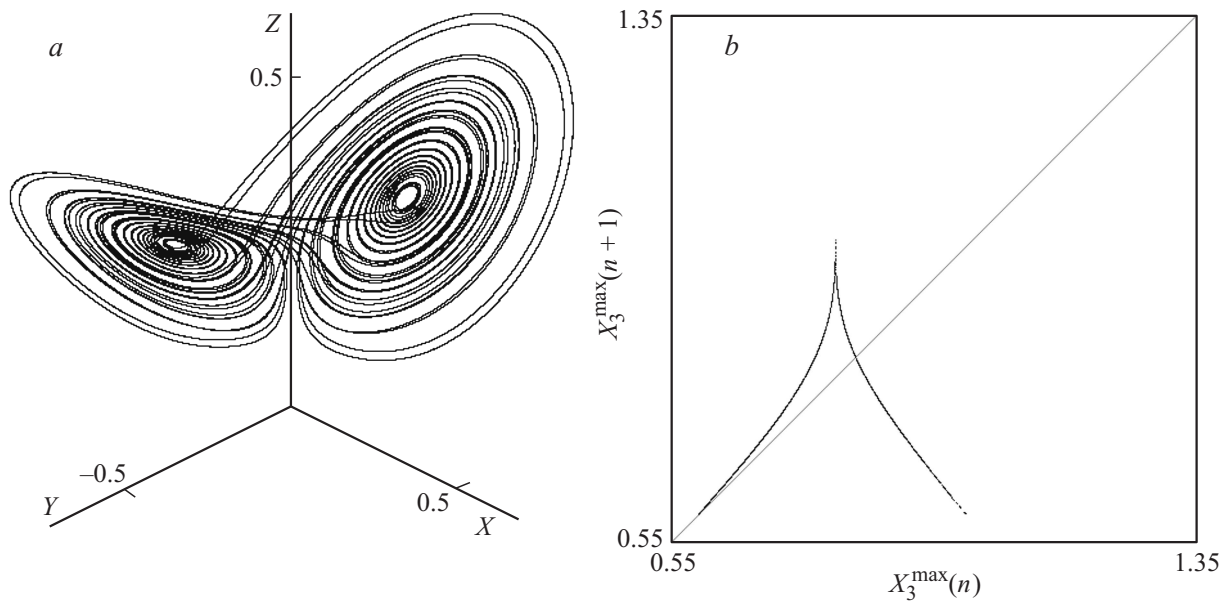


Рис. 5. Портрет аттрактора типа Лоренца для системы (26) (а) и отображение для последовательных максимумов переменной X_3 в процессе временной эволюции (б). Параметры: $\bar{\kappa} = 0.3$, $\varepsilon = \frac{1}{7}$, $\alpha_{11} = \alpha_{33} = 1.9354$, $\alpha_{22} = 7.7415$, $\omega_1 = 24320.650$, $\omega_2 = 15200.406$, $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, $g_1 = -0.4319$, $g_2 = -0.4569$, $g_3 = 0.4825$. На диаграмме (а) по осям координат отложены амплитуды трех осцилляторов, вычисленные по формулам $X = \pm\sqrt{X_1^2 + \omega_1^{-2}\dot{X}_1^2}$, $Y = \pm\sqrt{X_1^2 + \omega_1^{-2}\dot{X}_1^2}$, $Z = \pm\sqrt{X_3^2 + \omega_3^{-2}\dot{X}_3^2}$. При построении диаграммы (б) учитываются только максимумы, определенные как глобальные на последовательных интервалах времени, превышающих эмпирически подобранную константу $t_0 = 1.25$.

Хаотическая динамика уточненной модели

При более точном учете вида нелинейной характеристики варакторного диода для описания параметрического генератора нужно использовать комплексные уравнения (25), которые в трехмерную систему для действительных амплитуд не редуцируются. В связи с этим возникает проблема представления портретов аттракторов в виде, допускающем наглядное сравнение с обсуждавшимся выше аттрактором типа Лоренца.⁴ Будем исходить из того, что приблизительное соответствие мгновенной фазы комплексных переменных A_1 и A_2 формулам (28) сохранится, хотя величина φ останется постоянной во времени теперь, вообще говоря, не будет. Тогда для графического представления естественно использовать переменные $x = \text{Re } A_1 e^{-i\varphi}$, $y = \text{Re } A_2 e^{i\varphi}$, где φ выбирается каждый раз при выводе точки на график по методу наименьших квадратов так, чтобы минимизировать величину $S = (\text{Im } A_1 e^{-i\varphi})^2 + (\text{Im } A_2 e^{i\varphi})^2$. В качестве третьей переменной используем $z = |A_3|$.

На рис. 6, а показан портрет аттрактора, построенный по этой методике по результатам численного решения уравнений (25) при параметрах, отвечающих номиналам исходной схемы (рис. 1). Аттрактор выглядит похожим

⁴ Простейший вариант отложить по осям координат в трехмерном пространстве взятые по модулю амплитудные переменные не представляется удовлетворительным, поскольку не позволяет визуализировать аттрактор как характерного вида объект, имеющий два симметричных „крыла“.

на аттрактор типа Лоренца: имеет два „крыла“, на каждом из которых траектории раскручиваются по спирали от центральной пустой области, с последующими переходами с одного крыла на другое, причем совершаемое число оборотов меняется раз от раза хаотически.

На рис. 6, б приведен график отображения, где по осям координат отложены максимумы переменной $z = |A_3|$, достигаемые по ходу временной эволюции системы. Вид его существенно отличается от отображения, отвечающего аттрактору типа Лоренца на рис. 4. Во-первых, график выглядит составленным не из одной, а из набора кривых, т.е. поперечная фрактальная структура выражена намного сильнее, чем у аттрактора типа Лоренца, где она визуально вообще неразличима. Во-вторых, вместо острия на вершине у представляющих отображение кривых наблюдается гладкий максимум, из-за чего в данном случае не приходится говорить о робастном квазигиперболическом аттракторе. Скорее, свойства хаотической динамики должны быть сходными с ситуациями типа аттракторов в отображении Эно [34] и модели Рёсслера [35], которые в математических работах интерпретируются в рамках представлений о квазиаттракторе [36,37].

На рис. 7 для сравнения приводятся портрет аттрактора и график отображения, полученные путем обработки результатов численного решения исходных уравнений Кирхгофа (2). Для этого вектор, определенный напряжениями на конденсаторах $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$ для каждой выводимой на график точки, пересчитывается к нормаль-

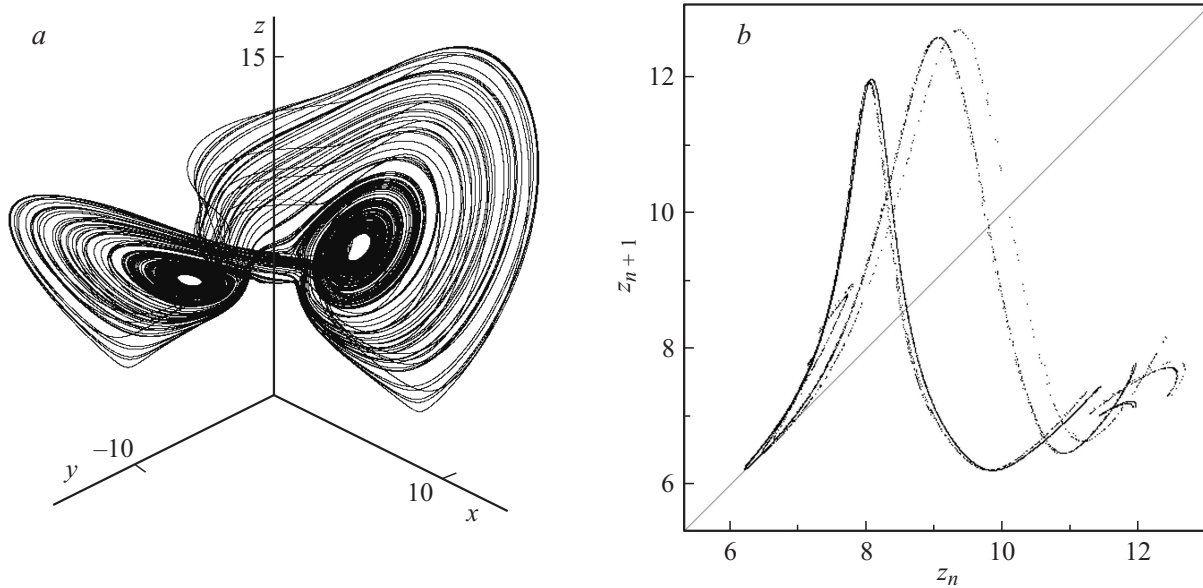


Рис. 6. Трехмерный портрет аттрактора, построенный с использованием описанной в тексте методики (а), и отображение для последовательных максимумов переменной $z = |A_3|$ (b) для системы (25) при $h = 6.0017$ и остальных параметрах $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\beta_{11} = 0.01824$, $\beta_{12} = 0.01276$, $\beta_{13} = 0.00854$, $\beta_{22} = 0.00597$, $\beta_{23} = 0.00893$, $\beta_{33} = 0.00400$, что соответствует номиналам компонентов исходной схемы (рис. 1).

ным модам посредством преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{U}$, после чего определяются величины $X_{1,2,3} = g_{1,2,3} x_{1,2,3}$ и используется метод графического представления, описанный в начале раздела, для переменных

$$a_{1,2,3} = \frac{1}{2} (X_{1,2,3} - i\omega_{1,2,3}^{-1} \dot{X}_{1,2,3}). \quad (32)$$

Портрет аттрактора исходных уравнений Кирхгофа демонстрирует очевидное сходство с рис. 6 с той разницей, что траектория на аттракторе выглядит „распушенной“, что связано, очевидно, с наличием относительно малых по амплитуде нерезонансных составляющих, которые вносят вклад в мгновенные значения динамических переменных, но исключаются при усреднении и переходе к амплитудным уравнениям.

Графики отображений для максимумов переменной X_3 на рис. 6 и 7 хорошо согласуются друг с другом, но, как уже отмечалось, их вид свидетельствует, что в отличие от аттрактора Лоренца в данном случае аттрактор не может быть классифицирован как квазигиперболический (сингулярно гиперболический).

Вычисление показателей Ляпунова на основе алгоритма Бенеттина путем совместного численного решения уравнений (25) и шести комплектов соответствующих уравнений в вариациях с ортогонализацией векторов возмущения по Граму–Шмидту [32,8] дает

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.437 \pm 0.001, & \lambda_2 &= 0.0000 \pm 0.0004, \\ \lambda_3 &= 0.0000 \pm 0.0004, & \lambda_4 &= -1.999 \pm 0.02, \\ \lambda_5 &= -4.335 \pm 0.03, & \lambda_6 &= -6.102 \pm 0.006. \end{aligned} \quad (33)$$

Присутствие положительного показателя свидетельствует о наличии хаоса. Два показателя нулевые с точностью до ошибки вычислений. Остальные показатели отрицательные. Обратим внимание на заметное отличие показателей от величин, приведенных в списке (31) для модели, не учитывающей кубическую нелинейность.

На рис. 8 показана зависимость шести показателей Ляпунова системы (25) от параметра h . В отличие от модели с квадратичной нелинейностью на графике старшего показателя можно видеть провалы (окна регулярности), которые сопровождаются также выбросами или провалами на графиках остальных показателей. Как проверено в численных расчетах, этим окнам соответствует появление притягивающих предельных циклов в фазовом пространстве системы (25), т.е. вместо хаоса здесь реализуются режимы периодических колебаний амплитудных переменных. Именно такой вид графиков показателей Ляпунова в зависимости от параметра характерен для одномерных отображений с квадратичным экстремумом и многих других диссипативных систем, включая отображение Эно и модель Ресслера, динамика которых трактуется с привлечением концепции квазиаттрактора [36,37].

Заключение

В настоящей работе рассмотрена схема параметрического генератора хаоса на базе трех связанных колебательных контуров с накачкой, обеспечиваемой периодическим изменением напряжения на варакторном диоде. Такого рода системы могут представлять интерес

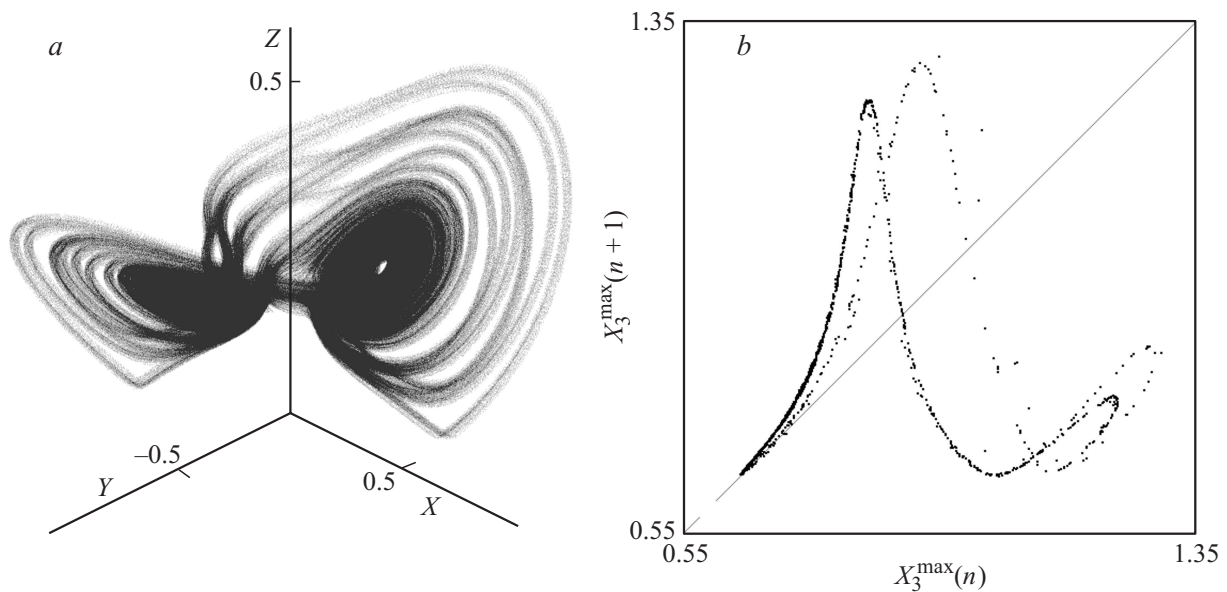


Рис. 7. Трехмерный портрет аттрактора (а) и отображение для последовательных максимумов переменной X_3 (b) исходной системы уравнений Кирхгофа (2) для схемы на рис. 1 при $\kappa = 0.33$. На диаграмме (b) учитываются максимумы, определенные как глобальные на последовательных интервалах времени, превышающих $t_0 = 1.25$. Диаграммы отвечают режиму, для которого временные зависимости переменных представлены на рис. 2.

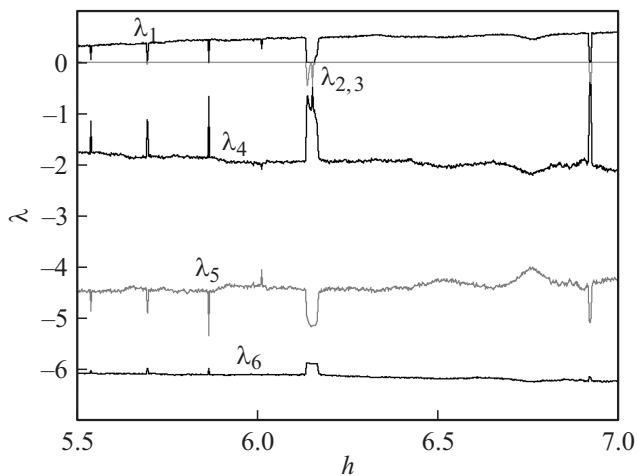


Рис. 8. Зависимость показателей Ляпунова модели (25) от параметра h при остальных параметрах $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 4$, $\beta_{11} = 0.01824$, $\beta_{12} = 0.01276$, $\beta_{13} = 0.00854$, $\beta_{22} = 0.00597$, $\beta_{23} = 0.00893$, $\beta_{33} = 0.00400$.

как генераторы хаоса, в том числе для применения в схемах скрытой коммуникации [38–40].

Хаотическая динамика при функционировании схемы обеспечивается распадным механизмом ограничения неустойчивости при параметрической генерации колебательных мод, когда две моды возбуждаются в присутствии накачки на суммарной частоте, а отбор энергии осуществляется модой на разностной частоте. Если ограничиться учетом квадратичной нелинейности варакторного диода, то в рамках метода медленных амплитуд задача сводится к уравне-

ниям третьего порядка для действительных амплитуд Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца, имеющим аттрактор типа Лоренца. Однако при учете нелинейности более высокого порядка амплитудные уравнения оказываются комплексными, и существенной становится динамика фаз возбуждающихся колебательных мод. Для хаотических режимов вместо квазигиперболического аттрактора типа Лоренца реализуются аттракторы, обладающие с ним внешним сходством, но отличающиеся отсутствием робастности — при вариации параметров возможно разрушение хаоса с возникновением регулярных (периодических или квазипериодических) режимов.

Автор выражает благодарность профессору университета Потсдама А. Пиковскому за полезное обсуждение и замечания. Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 15-02-02893.

Список литературы

- [1] Пиковский А.С., Рабинович М.И., Трахтенгерц В.Ю. // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 1366–1374.
- [2] Wang P.K.C., Masui K. // Phys. Lett. A. 1981. Vol. 81. N 2. P. 97–101.
- [3] Letellier C., Aguirre L.A., Maquet J., Lefebvre B. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2003. Vol. 179. N 1. P. 33–52.
- [4] Llibre J., Messias M., da Silva P.R. // J. Physics A: Mathematical and Theoretical. 2008. Vol. 41. N 27. P. 275210.
- [5] Liu Y., Yang Q., Pang G. // J. Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234. N 1. P. 101–113.
- [6] Lorenz E.N. // J. Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. N 2. P. 130–141.

- [7] *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. NY, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1982. 270 p.
- [8] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001. 296 с.
- [9] *Ораевский А.Н.* // Квант. электрон. 1981. Т. 8. № 1. С. 130–142.
- [10] *Ораевский А.Н.* // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4. № 1. С. 3–13.
- [11] *Haken H.* // Phys. Lett. A. 1975. Vol. 53. N 1. P. 77–78.
- [12] *Kolář M., Gumbs G.* // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. N 2. P. 626–637.
- [13] *Глуховский А.Б.* // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 4. С. 816–820.
- [14] *Doroshin A.V.* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. Vol. 16. N 8. P. 3188–3202.
- [15] *Kuznetsov S.P.* // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20. N 3. P. 345–382.
- [16] *Poland D.* // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 65. N 1. P. 86–99.
- [17] *Cuomo K.M., Oppenheim A.V.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. N 1. P. 65–68.
- [18] *Peters F., Lobry L., Lemaire E.* // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2005. Vol. 15. N 1. P. 013102.
- [19] *Rucklidge A.M.* // Nonlinearity. 1994. Vol. 7. N 6. P. 1565–1591.
- [20] *Hemail N.* // IEEE Transactions on Circuits and System-I: Fundamental Theory and Application. 1994. Vol. 41. N 1. P. 40–45.
- [21] *Анищенко В.С.* // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 1. С. 109–127.
- [22] *Bonatti C., Diaz L.J., Viana M.* Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity. A Global Geometric and Probabilistic Perspective. Encyclopedia of Mathematical Sciences. Vol.102. Berlin, Heidelberg, NY: Springer, 2005. 384 p.
- [23] *Banerjee S., Yorke J.A., Grebogi C.* // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80. P. 3049–3052.
- [24] *Elhadj Z., Sprott J.C.* Robust Chaos and its Applications. Singapore: World Scientific, 2011. 454 p.
- [25] *Кузнецов С.П.* // УФН. 2014. Т. 181. № 2. С. 121–149.
- [26] *Tucker W.* // Foundations of Computational Mathematics. 2002. Vol. 2. P. 53–117.
- [27] *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963. 352 с.
- [28] *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* // УФН. 1966. Т. 88. № 3. С. 439–460.
- [29] *Островский Л.А., Папилова И.А., Сутин А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 15. Вып. 8. С. 456–458.
- [30] *Акуленко Л.Д.* // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 82–91.
- [31] *Трубецков Д.И., Рожнев А.Г.* Линейные колебания и волны. М.: Физматлит, 2001. С. 168–173.
- [32] *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9–20.
- [33] *Kaplan J.L., Yorke J.A.* // Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Mathematics / Ed. by H.O. Peitgen, H.O. Walther. Vol. 730, Berlin, N.Y.: Springer, 1979. P. 204–227.
- [34] *Hénon M.* // Commun. Math. Phys. 1976. Vol. 50. P. 69–77.
- [35] *Rössler O.E.* // Ann. New York Academy of Sciences. 1979. Vol. 316. P. 376–392.
- [36] *Afraimovich V.S., Shilnikov L.P.* // Nonlinear dynamics and turbulence / Ed. by G.I. Barenblatt, G. Iooss, D.D. Joseph. Boston: Pitman, 1983. P. 1–34.
- [37] *Шильников Л.П.* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (2). С. 364–366.
- [38] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
- [39] *Argyris A., Syvridis D., Larger L., Annovazzi-Lodi V., Colet P., Fischer I., García-Ojalvo J., Mirasso C.R., Pesquera L., Shore K.A.* // Nature. 2005. Vol. 438. P. 343–346.
- [40] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // УФН. 2009. Т. 179. С. 1281–1310.