Журнал технической физики, 2016, том 86, вып. 4

01

Обобщение условия равновесия Беннета для релятивистского электронного пучка, распространяющегося в омическом плазменном канале и режиме ионной фокусировки продольно внешнему магнитному полю

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет,
198504, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: man06@mail.ru

(Поступило в Редакцию 19 декабря 2013 г. В окончательной редакции 8 июля 2015 г.)

Рассмотрена задача о формулировке обобщения условия равновесия Беннета для релятивистского электронного пучка, распространяющегося как вдоль омического плазменного канала, так и в режиме ионной фокусировки в случае наличия внешнего продольного однородного магнитного поля. При этом полагается, что электронная компонента фоновой плазмы не полностью удалена из области, занятой пучком. Для вывода указанного условия равновесия были использованы уравнения переноса массы и импульса, полученные для параксиального моноэнергетического пучка из кинетического уравнения Фоккера–Планка.

Введение

Для характеристики радиальной эволюции параксиальных азимутально-симметричных релятивистских электронных пучков (РЭП), распространяющихся в плотных и разреженных газоплазменных средах, необходим численный и качественный анализ соответствующего уравнения огибающей пучка [1–10]. При выводе указанного уравнения используется уравнение для средней кинетической энергии поперечного движения $E_\perp$ электронов пучка в тонком фиксированном сегменте РЭП.

В настоящей работе получено уравнение для рассматриваемой энергии $E_\perp$ и сформулировано выражение для среднего вириала V частиц в сегменте пучка в ситуации, когда РЭП распространяется или вдоль омического плазменного канала в плотной газоплазменной среде, или в режиме ионной фокусировки (ИФ) (в ситуации разреженной фоновой газоплазменной среды) параллельно внешнему однородному магнитному полю при частичном выбросе электронной компоненты фоновой плазмы из области пучка. Отметим, что режим ИФ возникает в случае, когда РЭП распространяется по предварительно созданному плазменному каналу в сильно разреженном газе. При этом под действием радиальной компоненты электрического поля РЭП происходит выталкивание электронной составляющей плазменного канала из области, занятой пучком. В этой ситуации основная часть РЭП будет распространяться под действием радиального фокусирующего электрического поля ионной компоненты рассматриваемого плазменного канала. В качестве основного результата настоящей работы найдено обобщение известного условия равновесия Беннета в случае учета обоих режимов транспортировки при наличии продольного внешнего магнитного поля.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим азимутально-симметричный параксиальный моноэнергетический РЭП, распространяющийся вдоль оси z цилиндрической системы координат r, θ, z, которая совпадает с осью симметрии предварительно созданного цилиндрического омического плазменного канала (в случае плотной фоновой газоплазменной среды) или с соответствующей осью ионного канала (в ситуации режима ИФ). Предполагается, что в последнем случае электронная компонента фона еще не полностью удалена из области пучка. Кроме того, считается, что внешнее однородное стационарное магнитное поле также направлено вдоль оси z.

Аналогично работе [6] под параксиальностью пучка будем понимать условие, когда поперечная компонента скорости произвольного электрона пучка много меньше его продольной составляющей, что эквивалентно условию, когда полный ток РЭП много меньше предельного тока Альфвена. Как и в [6], будем пренебрегать синхротронным излучением, столкновением между электронами пучка, маловероятным отклонением электрона РЭП на большие углы при многократном кулоновском рассеянии.

Аналогично работам [6,8] представим пучок в виде совокупности тонких поперечных сегментов S^τ, каждый из которых формируется электронами пучка внутри пространства, ограниченного двумя близкорасположенными на расстоянии $\Delta\xi$ поперечными к оси z плоскостями. Момент времени инжекции сегмента S^τ полагается равным $t = \tau$. В силу того, что РЭП предполагается моноэнергетическим, продольная скорость частиц v_z полагается одинаковой. Поэтому сегменты пучка в процессе распространения не пересекаются.

Для фиксированного сегмента S^τ в работах [6,8] была введена функция распределения частиц сегмента

$f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ по поперечным (к оси z) координатам $\mathbf{r}_\perp$ и импульсам $\mathbf{p}_\perp$, эволюция которой будет описываться кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \mathbf{v}_\perp \cdot \nabla_{\mathbf{r}_\perp} f^\tau + \mathbf{F}_\perp \cdot \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = I_{\text{sc}}, \quad (1)$$

где $\mathbf{v}_\perp = d\mathbf{r}_\perp/dt = \mathbf{p}_\perp/m\gamma$, m и γ — масса и лоренц-фактор электрона, $\mathbf{F}_\perp$ — поперечная компонента силы, действующая на электрон пучка со стороны самосогласованного электромагнитного поля системы плазма–пучок, I_{sc} — интеграл столкновений.

Отметим, что в рассматриваемом случае выражение для силы $\mathbf{F}_\perp$ в режиме ИФ может быть представлено в виде

$$\mathbf{F}_\perp = -e\nabla_\perp\Phi + \Omega_b \mathbf{p}_\perp \times \mathbf{i}_z, \quad (2)$$

где $\nabla_\perp$ — оператор градиента по поперечным к оси z координатам, e — заряд электрона,

$$\Phi = \Phi^{(i)} + \Phi^{(e)} - \beta\mu_0 A_z^{(b)}, \quad (3)$$

$\Phi^{(i)}$ и $\Phi^{(e)}$ — скалярные потенциалы электрического поля, созданного соответственно ионным каналом и электронной компонентой фоновой плазмы, $\beta = v_z/c$ (v_z — продольная компонента скорости электронов пучка, которая для моноэнергетичного параксиального РЭП полагается одинаковой для всех частиц пучка, c — скорость света, $\mu_0 = -1/(\beta\gamma)^2$, $A_z^{(b)}$ — аксиальная компонента векторного потенциала электромагнитного поля, созданного пучком. В случае распространения по омическому каналу в выражении (2) следует $\nabla_\perp\Phi$ заменить на $\nabla_\perp\Psi$, где

$$\Psi = \Phi^{(b)} + \Phi^{(p)} - \beta\left[A_z^{(b)} + A_z^{(p)}\right], \quad (4)$$

где $\Phi^{(b)}$, $\Phi^{(p)}$ — скалярные потенциалы электрических полей, созданных пучком и фоновой плазмой в омическом случае, $A_z^{(p)}$ — продольная компонента векторного потенциала поля, созданного обратным плазменным током в указанном случае, $\Omega_c = |e|B_0/(\gamma mc)$ — циклотронная частота электрона пучка во внешнем продольном магнитном поле с индукцией B_0, $\mathbf{i}_z$ — орт оси z.

В работах [6,8] показано, что в предположении об изотропности и упругом характере многократного кулоновского рассеяния электронов пучка на малые углы на частицах фонового газа интеграл столкновений в уравнениии (1) принимает вид интеграла столкновений Фоккера–Планка

$$I_{\text{sc}} = \frac{m\gamma S}{2}\,\Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau, \quad (5)$$

где величина S представляет скорость закачки энергии из продольного движения в поперечное в результате процесса многократного кулоновского рассеяния. Для того чтобы наличие продольного внешнего магнитного поля не существенно влияло на процесс рассеяния, необходимо потребовать выполнения условия

$$\tau_B \geq \tau_S, \quad (6)$$

где

$$\tau_B = \frac{2\pi}{\Omega_c}, \quad \tau_S = \frac{\gamma mc^2\beta^2}{2S}\,(1-\alpha_m)\,\frac{I_b}{I_A} \quad (7)$$

— соответственно ларморовский период электрона пучка во внешнем продольном магнитном поле и характерное время изменения среднеквадратичного радиуса пучка за счет многократного рассеяния. Здесь α_m — коэффициент токовой нейтрализации, I_b — полный ток пучка, $I_A = 17\beta\gamma$ [kA] — предельный ток Альфвена.

В этом случае находим условие слабого воздействия внешнего продольного магнитного поля на процесс рассеяния

$$\Omega_c \leq \frac{4\pi S}{\gamma mc^2\beta^2}\,\frac{I_A}{(1-\alpha_m)I_b}. \quad (8)$$

В частности, для РЭП, распространяющегося в воздухе при нормальных атмосферных условиях с параметрами $I_b = 10\,\text{kA}$, $\gamma = 10$, $\alpha_m = 0.5$, $\beta = 0.4$, получим следующую оценку для индукции: $B_0 \leq 3.4\,\text{kGs}$.

Необходимо отметить, что в случае режима ИФ необходимо оценить влияние продольного внешнего магнитного поля на процесс „выброса“ фоновых электронов из области плазменного канала под действием радиальной составляющей электрического поля пучка. Указанное магнитное поле будет слабо влиять на процесс удаления фоновых электронов при выполнении условия

$$\tau_B \geq \tau_{\text{ch}}, \quad (9)$$

где τ_B — указанный выше ларморовский период, τ_{ch} — характерное время вытеснения фонового электрона под действием электрического поля пучка, которое может быть оценено в следующем виде:

$$\tau_{\text{ch}} = \sqrt{\frac{2mR_{\text{ch}}}{\langle F_\perp\rangle}}. \quad (10)$$

Здесь $\langle F_\perp\rangle = 4eI_b/(R_b/\beta c)$ — средняя кулоновская сила, действующая на плазменный электрон в радиальном направлении, R_b — характерный радиус пучка, R_{ch} — соответствующий характерный радиус плазменного канала. В частности, для РЭП с параметрами $R_b = R_{\text{ch}} = 2\,\text{cm}$, $I_b = 10\,\text{kA}$, $\gamma = 10$ получим ограничение на индукцию внешнего магнитного поля: $B_0 \leq 4.5\,\text{kGs}$.

Далее рассмотрим уравнение переноса импульса для частиц сегмента пучка. Данное уравнение в режиме ИФ получается из кинетического уравнения (1) с интегралом столкновения (5) по аналогии с работами [6,10] и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_\perp\right) + \nabla_\perp\left(\chi_b\,\widetilde{\frac{\mathbf{p}_\perp\mathbf{p}_\perp}{\gamma m}}\right) + \chi_b e\nabla_\perp\Phi + \chi_b\Omega_c\left(\mathbf{i}_z\times\tilde{\mathbf{p}}_\perp\right) = 0, \quad (11)$$

где $\chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) = \int f^\tau d\mathbf{p}_\perp$, $\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_\perp = \int \mathbf{p}_\perp f^\tau d\mathbf{p}_\perp$. Здесь $\mathbf{p}_\perp$ — вектор импульса частицы пучка в поперечной к оси z плоскости, $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ — функция распределения частиц пучка по поперечным координатам и импульсам в сегменте РЭП с временем инжекции τ,

$$\widetilde{\mathbf{p}_\perp\mathbf{p}_\perp} = \frac{1}{\chi_b}\int \mathbf{p}_\perp\mathbf{p}_\perp f^\tau d\mathbf{p}_\perp. \tag{12}$$

В случае распространения РЭП в омическом плазменном канале уравнение переноса импульса совпадает с (11), за исключением того, что $\nabla_\perp\Phi$ надо заменить на $\nabla_\perp\Psi$.

С помощью уравнений Пуассона и Ампера для РЭП и фоновой плазмы можно показать, что в случае, когда коэффициенты зарядовой и токовой (магнитной) нейтрализаций не зависят от поперечных координат, имеет место следующее соотношение:

$$\Psi = -(1-\alpha_m)\mu\beta A_z^{(b)}, \quad \mu = 1 - \frac{(1-\alpha_c)}{\beta^2(1-\alpha_m)}. \tag{13}$$

Здесь $\alpha_m = J_{\mathrm{pz}}/J_{\mathrm{bz}}$ — коэффициент токовой нейтрализации, $J_{\mathrm{pz}}, J_{\mathrm{bz}}$ — продольные компоненты плотности тока плазмы и пучка соответственно, $\alpha_c = \rho_p/\rho_b$ — коэффициент зарядовой нейтрализации, ρ_p, ρ_b — объемные плотности заряда фоновой плазмы и пучка.

Умножим уравнение переноса импульса (11) скалярно на $\mathbf{r}_\perp$ и проинтегрируем полученное выражение по пространству поперечных координат. Тогда получим

$$\int \mathbf{r}_\perp \frac{\partial}{\partial t}(\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_\perp)d\mathbf{r}_\perp + \int \mathbf{r}_\perp\nabla_\perp\left(\chi_b\frac{\widetilde{\mathbf{p}_\perp\mathbf{p}_\perp}}{\gamma m}\right)d\mathbf{r}_\perp$$
$$+ e\int \chi_b\mathbf{r}_\perp\nabla_\perp\Phi d\mathbf{r}_\perp + \int \chi_b\Omega_c\mathbf{r}_\perp(\mathbf{i}_z\times\mathbf{p}_\perp)d\mathbf{r}_\perp = 0. \tag{14}$$

В ситуации распространения в омическом канале в третьем интеграле необходимо заменить $\nabla_\perp\Phi$ на $\nabla_\perp\Psi$. В силу того, что интегрирование ведется по всему поперечному пространству и $\mathbf{r}_\perp, t$ — независимые переменные, первое слагаемое в левой части (14) принимает вид

$$\int \mathbf{r}_\perp\frac{\partial}{\partial t}(\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_\perp)d\mathbf{r}_\perp = \frac{d}{dt}\left[\int \mathbf{r}_\perp(\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_\perp)d\mathbf{r}_\perp\right]. \tag{15}$$

Нетрудно показать, что второе слагаемое в (14) может быть представлено в виде

$$\int \mathbf{r}_\perp\nabla_\perp\left(\chi_b\frac{\widetilde{\mathbf{p}_\perp\mathbf{p}_\perp}}{\gamma m}\right)d\mathbf{r}_\perp = -\int \chi_b\frac{\widetilde{p_\perp^2}}{\gamma m}d\mathbf{r}_\perp. \tag{16}$$

Далее рассмотрим выражение в квадратных скобках в (15)

$$G^* \equiv \int \mathbf{r}_\perp(\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_\perp)d\mathbf{r}_\perp = \frac{\gamma m}{2}\int \nabla_\perp r^2\left(\frac{\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{\gamma m}\right)d\mathbf{r}_\perp. \tag{17}$$

Здесь было учтено, что лоренц-фактор частиц пучка не зависит от $\mathbf{r}_\perp$ и выполнено следующее тождество: $1/2\nabla_\perp r^2 \equiv \mathbf{r}_\perp$.

Далее интегрируем (17) по частям. С помощью уравнения неразрывности [5,6–9]

$$\frac{\partial\chi_b}{\partial t} + \nabla_\perp\frac{\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{m\gamma} = 0 \tag{18}$$

получим

$$G^* \equiv -\frac{\gamma m}{2}\int r^2\nabla_\perp\left(\frac{\chi_b\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{\gamma m}\right)d\mathbf{r}_\perp$$
$$= \frac{\gamma m}{2}\int r^2\frac{\partial\chi_b}{\partial t}d\mathbf{r}_\perp = \frac{\gamma m}{2}\frac{d}{dt}\left(\int r^2\chi_b d\mathbf{r}_\perp\right). \tag{19}$$

Таким образом, с учетом (15), (16) и (19) из (14) для режима ИФ получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\gamma m}{2}\frac{d}{dt}\left(\int r^2\chi_b d\mathbf{r}_\perp\right)\right] - \int \chi_b\frac{\widetilde{p_\perp^2}}{\gamma m}d\mathbf{r}_\perp$$
$$+ e\int \chi_b\mathbf{r}_\perp\nabla_\perp\Phi d\mathbf{r}_\perp + \int \chi_b\Omega_c\mathbf{r}_\perp(\mathbf{i}_z\times\tilde{\mathbf{p}}_\perp)d\mathbf{r}_\perp = 0. \tag{20}$$

Для омического случая опять следует заменить $\nabla_\perp\Phi$ на $\nabla_\perp\Psi$.

Определим далее удвоенный среднеквадратичный радиус пучка и среднюю кинетическую энергию поперечного движения частиц пучка соответственно в виде

$$\Re^2 \equiv 2\int \chi_b r^2 d\mathbf{r}_\perp, \tag{21}$$

$$E_\perp = \int \chi_b\frac{p_\perp^2}{2m\gamma}d\mathbf{r}_\perp. \tag{22}$$

Тогда (20) можно переписать как

$$E_\perp - \frac{d}{dt}\left(\frac{m\gamma}{8}\frac{d\Re^2}{dt}\right) = V, \tag{23}$$

где

$$V = -\frac{1}{2}\int \chi_b\mathbf{r}_\perp\cdot\left[-e\nabla_\perp\Phi + \Omega_b(\mathbf{p}_\perp\times\mathbf{i}_z)\right]d\mathbf{r}_\perp \tag{24}$$

— средний вириал в случае режима ИФ, а для омического случая в (24) снова следует заменить $\nabla_\perp\Phi$ на $\nabla_\perp\Psi$.

Далее рассмотрим выражение для части вириала, определяемой в режиме ИФ в отсутствие внешнего магнитного поля, а именно

$$V_1 = \frac{e}{2}\int \chi_b\mathbf{r}_\perp\nabla_\perp\Phi d\mathbf{r}_\perp, \tag{25}$$

При этом будем использовать уравнение Ампера для $A_z^{(b)}$ и уравнения Пуассона для потенциалов $\Phi^{(i)}$ и $\Phi^{(e)}$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_z^{(b)}}{dr}\right) = -4\pi e\beta N_b\chi_b(r), \tag{26}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi^{(i)}}{dr}\right) = +4\pi e\beta N^{(i)}\chi^{(i)}(r), \tag{27}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi^{(e)}}{dr}\right) = -4\pi e\beta N^{(e)}\chi^{(e)}(r), \tag{28}$$

где N_b, $N^{(i)}$, $N^{(e)}$ — характерные линейные концентрации частиц пучка, ионов и электронов фоновой плазмы (в случае режима ИФ), $\chi^{(i)}(r)$, $\chi^{(e)}(r)$ — функции, характеризующие радиальные профили плазменных ионов и электронов.

Указанные уравнения будем решать с краевыми условиями вида

$$r\left.\frac{dA_z^{(b)}}{dr}\right|_{r=0} = 0, \tag{29}$$

$$r\left.\frac{d\Phi^{(i)}}{dr}\right|_{r=0} = 0, \quad r\left.\frac{d\Phi^{(e)}}{dr}\right|_{r=0} = 0. \tag{30}$$

Тогда из (26)–(30) имеем

$$\frac{dA_z^{(b)}}{dr} = -2e\beta\frac{N_b(r)}{r}, \tag{31}$$

$$\frac{d\Phi^{(i)}}{dr} = +2e\frac{N^{(i)}(r)}{r}, \tag{32}$$

$$\frac{d\Phi^{(e)}}{dr} = -2e\frac{N^{(e)}(r)}{r}, \tag{33}$$

где

$$N_b(r) = N_b 2\pi\int_0^r r'\chi_b(r')dr', \tag{34}$$

$$N^{(i)}(r) = N^{(i)}2\pi\int_0^r r'\chi^{(i)}(r')dr', \tag{35}$$

$$N^{(e)}(r) = N^{(e)}2\pi\int_0^r r'\chi^{(e)}(r')dr' \tag{36}$$

— линейные концентрации соответственно частиц пучка, ионов и электронов плазменного канала в трубке радиуса r, N_b, $N^{(i)}$, $N^{(e)}$ — соответственно характерные линейные концентрации электронов пучка, ионов и электронов фоновой плазмы.

Рассмотрим часть вириала (25), обусловленную электромагнитным полем РЭП в режиме ИФ, а именно

$$V_1^{(b)} = -\frac{e}{2}\int\chi_b\mathbf{r}_\perp\nabla_\perp\left(\beta\mu_0A_z^{(b)}\right)d\mathbf{r}_\perp. \tag{37}$$

Очевидно, что

$$V_1^{(b)} = -e\beta\mu_0\pi\int_0^\infty\chi_b r^2\frac{dA_z^{(b)}}{dr}dr. \tag{38}$$

С учетом (31) и (34) находим

$$V_1^{(b)} = e^2\beta^2\mu_0\int\chi_b(\mathbf{r}_\perp)N_b(\mathbf{r}_\perp)d\mathbf{r}_\perp = e^2\beta^2\mu_0\left\langle N_b(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b, \tag{39}$$

где угловые скобки означают следующий оператор:

$$\left\langle G(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b = \int\chi_b(\mathbf{r}_\perp)G(\mathbf{r}_\perp)d\mathbf{r}_\perp. \tag{40}$$

Здесь $G(\mathbf{r}_\perp)$ — некоторая интегрируемая функция.

Нетрудно проверить, что

$$\left\langle N_b(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b = \frac{1}{2}. \tag{41}$$

Тогда

$$V_1^{(b)} = \frac{e^2\beta^2\mu_0}{2}. \tag{42}$$

Аналогично части вириала (25), связанные с электрическим полем ионной и электронной компонент плазменного канала, соответственно имеют вид

$$V_1^{(i)} = \frac{e}{2}\int\chi_b\mathbf{r}_\perp\nabla_\perp\left(\Phi^{(i)}\right)d\mathbf{r}_\perp, \tag{43}$$

$$V_1^{(e)} = \frac{e}{2}\int\chi_b\mathbf{r}_\perp\nabla_\perp\left(\Phi^{(e)}\right)d\mathbf{r}_\perp. \tag{44}$$

Тогда с учетом (32) и (33) имеем

$$V_1^{(i)} = e^2\left\langle N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b, \tag{45}$$

$$V_1^{(e)} = -e^2\left\langle N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b. \tag{46}$$

Подставляя (42), (45) и (46) в (25), получим значение вириала в случае режима ИФ при отсутствии продольного внешнего магнитного поля

$$V_1 = e^2\left(\frac{\beta^2\mu_0N_b}{2} + \left\langle N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b - \left\langle N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b\right). \tag{47}$$

Аналогично можно показать, что часть вириала, связанная с омическим случаем (в отсутствие внешнего магнитного поля) упрощается к виду

$$V_2 = \frac{e}{2}\int\chi_b\mathbf{r}_\perp\nabla_\perp\Psi d\mathbf{r}_\perp = \kappa T_B, \tag{48}$$

где

$$\kappa = (1-\alpha_m)\mu = 1-\alpha_m-(1-\alpha_c)/\beta^2,$$

$T_B = I_b|e|\beta/(2c)$ — эффективная температура Беннета, I_b — полный ток пучка.

Далее рассмотрим последнее слагаемое в левой части (24). Можно записать

$$\int\chi_b\Omega_c\mathbf{r}_\perp(\mathbf{i}_z\times\mathbf{p}_\perp)d\mathbf{r}_\perp = -\Omega_c\int\chi_b(\mathbf{r}_\perp\times\mathbf{p}_\perp)\,\mathbf{i}_z\,d\mathbf{r}_\perp = -\Omega_cL, \tag{49}$$

где

$$L = \Omega_c\int\chi_b(\mathbf{r}_\perp\times\mathbf{p}_\perp)\,\mathbf{i}_z\,d\mathbf{r}_\perp = \int\chi_b r\tilde{p}_\theta d\mathbf{r}_\perp = \langle rp_\theta\rangle, \tag{50}$$

— величина среднего углового момента частицы рассматриваемого сегмента пучка.

Подставляя (47) и (49) в (24), находим полный вириал в случае режима ИФ

$$V_i = \Gamma_i T_B - \frac{\Omega_c L}{2}. \quad (51)$$

Здесь

$$\Gamma_i = \mu_0 + \frac{2f_n^{(i)}}{\beta^2}\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\rangle_b - \frac{2f_n^{(e)}}{\beta^2}\langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\rangle_b, \quad (52)$$

$$f_n^{(i)} = \frac{N^{(i)}}{N_b}, \quad f_n^{(e)} = \frac{N^{(e)}}{N_b}, \quad (53)$$

$$\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\rangle_b = \frac{\langle N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\rangle_b}{N^{(i)}}, \quad \langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\rangle_b = \frac{\langle N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\rangle_b}{N^{(e)}}. \quad (54)$$

Далее подставим (48) и (49) в аналог уравнения (24) для омического случая (при замене в (24) $\nabla_\perp\Phi$ на $\nabla_\perp\Psi$). Тогда в случае омического плазменного канала получим

$$V_{\text{oh}} = \Gamma_{\text{oh}} T_B - \frac{\Omega_c L}{2}, \quad (55)$$

где $\Gamma_{\text{oh}} = \kappa$.

Тогда из уравнения (23) при квазиравновесии, когда выполнено условие $d\Re^2/dt \approx 0$, для режима ИФ следует уравнение

$$E_\perp = T_B\left(\mu_0 + \frac{2f_n^{(i)}}{\beta^2}\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\rangle_b - \frac{2f_n^{(e)}}{\beta^2}\langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\rangle_b\right) - \frac{\Omega_c L}{2}, \quad (56)$$

а для омического случая

$$E_\perp = \kappa T_B - \frac{\Omega_c L}{2}. \quad (57)$$

Заметим, что (56) обобщает результат работы [9] на случай ИФ с частичным вытеснением канальных электронов из области пучка, причем в режиме ИФ коэффициент κ сводится к значению $\mu_0 = 1 - 1/\beta^2 = -(1-\beta^2)/\beta^2 = -1/(\gamma^2\beta^2)$. В случае ультрарелятивистского РЭП, когда $\gamma \gg 1$, этим членом можно пренебречь. Условие (57) обобщает условие равновесия Беннета для омического случая, полученное в [6], на случай присутствия однородного продольного внешнего магнитного поля.

Отметим, что аналогично работе [6] параметр S, характеризующий влияние процесса многократного рассеяния электронов пучка на частицах фоновой газоплазменной среды, не входит в условие динамического равновесия.

Это объясняется тем, что уравнение вириала получается путем скалярного умножения уравнения переноса импульса (11) (или его аналога для омического случая) на $\mathbf{r}_\perp$ и интегрирования по всему пространству поперечных координат. Уже в уравнении переноса импульса (см. (25) из [10]) отсутствует параметр S. Это следует из (22) работы [10] и обусловлено видом оператора Фоккера–Планка.

Однако при выводе уравнения огибающей при выполнении условия Беннета (или его обобщения) (данное уравнение носит название уравнения Нордсика) влияние параметра S будет учитываться.

Заключение

Таким образом, рассмотрена задача о формулировке обобщения условия равновесия Беннета для релятивистского электронного пучка, распространяющегося как вдоль омического плазменного канала, так и в разреженной газоплазменной среде в режиме ионной фокусировки в случае наличия внешнего продольного однородного магнитного поля. При этом в случае режима ионной фокусировки полагается, что электронная компонента фоновой плазмы не полностью удалена из области, занятой пучком. Для вывода указанного условия равновесия были использованы уравнения переноса массы и импульса, полученные для параксиального моноэнергетического РЭП из соответствующего кинетического уравнения Фоккера–Планка.

Работа выполнена в рамках Тематического плана фундаментальных НИР, выполняемых СПбГУ по заказу Министерства образования и науки Российской Федерации № 6.0.10.2010.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 167 с.
[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М.: Атомиздат, 1977. 277 с.
[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме М.: Физматлит, 1990. 336 с.
[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.
[5] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С., Филиппов Б.В.* Динамика пучков заряженных частиц в газоплазменных средах. СПб.: Изд. СПбГУ, 2002. 98 с.
[6] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[7] *Buchanan H.L.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 1. P. 221–231.
[8] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 9. С. 103–107.
[9] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 4. С. 103–108.
[10] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 7. С. 119–125.