

03

## Об устойчивости тангенциального скачка поля скоростей в трехслойной стратифицированной по плотности жидкости при движении среднего слоя

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 16 сентября 2015 г.)

В аналитических расчетах получено дисперсионное уравнение для гравитационных волн в трехслойной идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью при наличии тангенциального скачка поля скоростей между слоями за счет поступательного движения среднего слоя. Показано, что неустойчивость тангенциального разрыва поля скоростей реализуется при скорости относительного движения слоев, зависящей от отношения их плотностей. Чем ближе к единице отношение плотностей контактирующих жидкостей, тем при меньшем значении скорости движущегося слоя имеет место неустойчивость. Сама неустойчивость реализуется в рассмотренном случае для внутренних волн, возникающих на второй и третьей границах раздела слоев, согласно закономерностям развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. При рассмотрении волн с длинами, много большими толщины среднего слоя, имеет место взаимодействие внутренних волн. Поверхностные волны при этом меняют только частоту.

### Введение

Распределение морской воды с глубиной по плотности неоднородно ввиду того, что непостоянна соленость воды и ее температура, которые изменяются по весьма сложным законам даже для одного и того же моря. Особенно ярко проявляется это для северных морей, где сезонное таяние льда приводит к образованию на поверхности медленно рассасывающихся опресненных слоев. В проливах, связывающих моря с различной соленостью и температурой, могут возникать многослойные структуры с движущимися отдельными слоями. В этой связи возникает проблема исследования гравитационного волнового движения, генерируемого границами раздела. Граница раздела слоев воды с различной плотностью может быть и нечетко очерченной, главное, чтобы степень ее размытости была меньше длины гравитационной волны. Поэтому исследуем на модельной задаче поверхностные и внутренние волны в трехслойной жидкости, при наличии поступательного движения среднего слоя.

В последние годы сходное явление неоднократно становилось предметом исследования как в линейной, так и в нелинейной постановках в связи с изучением особенностей реализации эффекта „мертвой воды“ [1–4]. Рассматривались и волны в трехслойной „неподвижной“ жидкости [5], а также проводилось исследование неустойчивости волн при наличии тангенциального скачка поля скоростей на границе раздела двух несмешивающихся идеальных сред [6,7].

Следует отметить, что изменение плотности воды из-за вариаций температуры и солености составляет тысячные доли величины [8,9], а ее изменения в проливах, между водами морей и океанов разной солености или

при таянии льда в морях и океанах составляют сотые доли величины [10,11].

Особенностям реализации неустойчивости тангенциального скачка поля скоростей в трехслойной жидкости и посвящена настоящая работа.

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу о неустойчивости тангенциального скачка поля скоростей в гравитационном поле  $\mathbf{g}$  по отношению к гравитационным волнам на плоских поверхностях раздела трех идеальных несжимаемых жидкостей. Нижняя из жидкостей имеет бесконечную глубину и плотность  $\rho_3$ , средняя — толщину  $h_2$  и плотность  $\rho_2$ , верхняя — толщину  $h_1$  и плотность  $\rho_1$ . Введем декартову систему координат, ось  $OZ$  которой направлена вертикально вверх, противоположно ускорению силы тяжести:  $\mathbf{e}_z \parallel -\mathbf{g}$  (где  $\mathbf{e}_z$  — орт декартовой оси  $OZ$ ), а координатная плоскость  $z = 0$  совпадает с невозмущенной поверхностью раздела нижней и средней жидкостей. Примем, что средний слой как целое движется в положительном направлении оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $U$ .

Проведем анализ устойчивости плоских волн на границах раздела сред, формы поверхностей которых будут описываться уравнениями

$$z = h_1 + h_2 + \xi_1(x, t), \quad z = h_2 + \xi_2(x, t), \quad z = \xi_3(x, t),$$

где  $\xi_j(x, t)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — вертикальные отклонения границ раздела от равновесных поверхностей  $z = h_1 + h_2$ ,  $z = h_2$ ,  $z = 0$  соответственно. Отношение максимальной из амплитуд функций  $\xi_j(x, t)$  к длине волны будем считать малым параметром.

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений непрерывности жидкости и уравнений Эйлера (внутри каждого из слоев) [12,13]

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_j(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (j = 1, 2, 3);$$

$$\partial_t \mathbf{v}_j(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{v}_j(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}_j(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j(\mathbf{r}, t) + \mathbf{g},$$

с граничными условиями:  
кинематическими

$$z = \xi_3(x, t): \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_3(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2(\mathbf{r}, t) = \partial_t \xi_3(x, t),$$

$$z = h_2 + \xi_2(x, t): \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \partial_t \xi_2(x, t),$$

$$z = h_1 + h_2 + \xi_1(x, t): \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \partial_t \xi_1(x, t),$$

естественным условием ограниченности решения для  $\mathbf{v}_3(\mathbf{r}, t)$ :

$$z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{v}_3(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

динамическими граничными условиями:

$$z = \xi_3(x, t): \quad P_2(\mathbf{r}, t) = P_3(\mathbf{r}, t),$$

$$z = h_2 + \xi_2: \quad P_1(\mathbf{r}, t) = P_2(\mathbf{r}, t),$$

$$z = h_1 + h_2 + \xi_1(x, t): \quad P_1(\mathbf{r}, t) = P_{\text{atm}}.$$

$\mathbf{v}_j(\mathbf{r}, t)$  и  $P_j(\mathbf{r}, t)$  — поля скоростей и давлений в  $j$ -й среде,  $P_{\text{atm}}$  — постоянное внешнее (по отношению к верхнему слою) давление.

## Скаляризация и линеаризация задачи

Будем полагать, что поля скоростей представляются как градиенты скалярных функций — гидродинамических потенциалов [12,13]

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{r}, t) = \nabla \Phi_j(\mathbf{r}, t); \quad (j = 1, 2, 3),$$

причем

$$\Phi_2(\mathbf{r}, t) = (Ux + \varphi_2(\mathbf{r}, t)),$$

где  $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$ ,  $\Phi_3(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi_2(\mathbf{r}, t)$  — гидродинамические потенциалы, имеющие в безразмерных переменных (например, при  $g = 1$ ,  $\rho_1 = 1$ ,  $h_1 = 1$ ) тот же порядок малости, что и возмущения поверхностей  $\xi_j(x, t)$ .

При подстановке этих выражений в уравнения непрерывности получим уравнения Лапласа для гидродинамических потенциалов

$$\Delta \Phi_j(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Линеаризуя и интегрируя уравнения Эйлера, получим выражения для давлений в средах

$$P_1(\mathbf{r}, t) = P_1^{(0)} - \rho_1 \partial_t \Phi_1(\mathbf{r}, t) - \rho_1 g z,$$

$$P_2(\mathbf{r}, t) = P_2^{(0)} - \rho_2 \partial_t \varphi_2(\mathbf{r}, t) - \rho_2 U \partial_x \varphi_2(\mathbf{r}, t) - \rho_2 g z,$$

$$P_3(\mathbf{r}, t) = P_3^{(0)} - \rho_3 \partial_t \Phi_3(\mathbf{r}, t) - \rho_3 g z,$$

где  $P_j^{(0)}$  — константы интегрирования.

Запишем в первом порядке малости граничные условия. Естественное условие ограниченности для  $\mathbf{v}_3(\mathbf{r}, t)$  запишется в виде

$$z \rightarrow -\infty: \quad \Phi_3(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0.$$

Кинематические граничные условия примут вид [13]

$$z = 0: \quad \frac{\partial \Phi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial z} = \frac{\partial \xi_3(x, t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial z} - U \frac{\partial \xi_3(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \xi_3(x, t)}{\partial t},$$

$$z = h_2: \quad \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial z} - U \frac{\partial \xi_2(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \xi_2(x, t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} = \frac{\partial \xi_2(x, t)}{\partial t},$$

$$z = h_1 + h_2: \quad \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} = \frac{\partial \xi_1(x, t)}{\partial t}.$$

Полученные выражения для давлений подставим в динамические граничные условия, выделяя слагаемые первого порядка малости. В итоге будем иметь

$$z = 0: \quad \rho_2 [\partial_t \varphi_2(\mathbf{r}, t) + U \partial_x \varphi_2(\mathbf{r}, t) + g \xi_3(x, t)] = \rho_3 [\partial_t \Phi_3(\mathbf{r}, t) + g \xi_3(x, t)],$$

$$z = h_2: \quad \rho_2 [\partial_t \varphi_2(\mathbf{r}, t) + U \partial_x \varphi_2(\mathbf{r}, t) + g \xi_2(x, t)] = \rho_1 [\partial_t \Phi_1(\mathbf{r}, t) + g \xi_2(x, t)],$$

$$z = h_1 + h_2: \quad \rho_1 [\partial_t \Phi_1(\mathbf{r}, t) + g \xi_1(x, t)] = 0.$$

Выражения для  $\xi_j(x, t)$  будем искать в виде гармонических функций по координате  $x$ :

$$\xi_j(x, t) = \alpha_j(t) \exp(ikx),$$

где  $\alpha_j(t)$  — зависящие от времени коэффициенты.

Решения уравнений Лапласа для потенциалов, удовлетворяющие граничным условиям и выраженные с их помощью через  $\alpha_j(t)$ , запишем в виде

$$\Phi_1(x, z, t) = \frac{\exp(ikx)}{k \operatorname{sh}(kh_1)} \{ \alpha_1'(t) \operatorname{ch}[k(z - h_2)] - \alpha_2'(t) \operatorname{ch}[k(z - h_2 - h_1)] \},$$

$$\varphi_2(x, z, t) = \frac{\exp(ikx)}{k \operatorname{sh}(kh_2)} \{ \alpha_2'(t) \operatorname{ch}(kz) - \alpha_3'(t) \operatorname{ch}[k(z - h_2)] + iUk\alpha_3(t) \operatorname{sh}[k(z + h_2)] - iUk\alpha_2(t) \operatorname{ch}(kz) \},$$

$$\Phi_3(x, z, t) = \frac{\alpha_3'(t)}{k} \exp(kz) \exp(ikx).$$

Используя выписанные выражения для гидродинамических потенциалов и для возмущений  $\xi_j(x, t)$ , из динамических граничных условий получим систему трех связанных эволюционных уравнений относительно  $\alpha_j(t)$ :

$$\alpha_1''(t) \operatorname{ch}(kh_1) + \alpha_1(t) g k \operatorname{sh}(kh_1) - \alpha_2''(t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1''(t)\rho_1 \operatorname{sh}(kh_2) - \alpha_2''(t)[\rho_1 \operatorname{sh}(kh_2) \operatorname{ch}(kh_1) \\
& + \rho_2 \operatorname{sh}(kh_1) \operatorname{ch}(kh_2)] - 2i\alpha_2'(t)\rho_2 k U \operatorname{sh}(kh_1) \operatorname{ch}(kh_2) \\
& + \alpha_2(t)[gk(\rho_1 - \rho_2) \operatorname{sh}(kh_2) + \rho_2 k^2 U^2 \operatorname{ch}(kh_2)] \operatorname{sh}(kh_1) \\
& + \alpha_3''(t)\rho_2 \operatorname{sh}(kh_1) + 2i\alpha_3'(t)\rho_2 k U \operatorname{sh}(kh_1) \\
& - \alpha_3(t)\rho_2 k^2 U^2 \operatorname{sh}(kh_1) = 0, \\
& \alpha_3''(t)[\rho_2 \operatorname{ch}(kh_2) + \rho_3 \operatorname{sh}(kh_2)] + 2i\alpha_3'(t)\rho_2 k U \operatorname{ch}(kh_2) \\
& + \alpha_3(t)[gk(\rho_3 - \rho_2) \operatorname{sh}(kh_2) - \rho_2 k^2 U^2 \operatorname{ch}(kh_2)] \\
& - \alpha_2''(t)\rho_2 - 2i\alpha_2'(t)\rho_2 k U + \alpha_2(t)\rho_2 U^2 k^2 = 0. \quad (1)
\end{aligned}$$

Так как нас интересуют волновые движения будем искать решения системы (2) в виде гармонических функций времени

$$a_j(t) = a_j \exp(-i\omega t). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_j$ :

$$\begin{aligned}
& a_1[\omega^2 \operatorname{ch}(kh_1) - gk \operatorname{sh}(kh_1)] - a_2 \omega^2 = 0, \\
& a_1 \rho_1 \omega^2 \operatorname{sh}(kh_2) - a_2 \{\omega^2 [\rho_1 \operatorname{sh}(kh_2) \operatorname{ch}(kh_1) \\
& + \rho_2 \operatorname{sh}(kh_1) \operatorname{ch}(kh_2)] - 2\omega \rho_2 k U \operatorname{sh}(kh_1) \operatorname{ch}(kh_2) \\
& + gk(\rho_1 - \rho_2) \operatorname{sh}(kh_2) \operatorname{sh}(kh_1) + \rho_2 k^2 U^2 \operatorname{sh}(kh_1) \operatorname{ch}(kh_2)\} \\
& + a_3 \rho_2 (\omega - kU)^2 \operatorname{sh}(kh_1) = 0, \\
& a_2 \rho_2 (\omega - kU)^2 - a_3 \{\omega^2 [\rho_2 \operatorname{ch}(kh_2) + \rho_3 \operatorname{sh}(kh_2)] \\
& - 2\omega \rho_2 k U \operatorname{ch}(kh_2) - gk(\rho_3 - \rho_2) \operatorname{sh}(kh_2) \\
& + \rho_2 k^2 U^2 \operatorname{ch}(kh_2)\} = 0. \quad (3)
\end{aligned}$$

Условием существования нетривиальных решений системы (3) является обращение в нуль определителя матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных  $a_j$ , что позволяет получить дисперсионное уравнение задачи:  $\sum_{n=0}^6 \omega^n A_n = 0$ ,

$$\begin{aligned}
A_6 & \equiv \rho_1 [\rho_2 \operatorname{ch}(h_2 k) + \rho_3 \operatorname{sh}(h_2 k)] \operatorname{sh}(h_1 k) \\
& + \rho_2 [\rho_2 \operatorname{sh}(h_2 k) + \rho_3 \operatorname{ch}(h_2 k)] \operatorname{ch}(h_1 k), \\
A_5 & \equiv -2\rho_2 k U [\rho_1 \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k) \\
& + 2\rho_2 \operatorname{sh}(h_2 k)] \operatorname{ch}(h_1 k) + \rho_3 \operatorname{ch}(h_2 k) \operatorname{ch}(h_1 k), \\
A_4 & \equiv \{gk[(\rho_1 \rho_2 - \rho_2^2 - \rho_1 \rho_3) \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k) \\
& - \rho_2 \rho_3 (\operatorname{ch}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k) + \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k) \\
& + \operatorname{sh}(h_2 k) \operatorname{ch}(h_1 k))] + \rho_2 k^2 U^2 [\rho_1 \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k) \\
& + 6\rho_2 \operatorname{sh}(h_2 k) \operatorname{ch}(h_1 k) + \rho_3 \operatorname{ch}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k)]\},
\end{aligned}$$

$$A_3 \equiv 2\rho_2 k U \{gk [2\rho_2 \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k) + \rho_3 (\operatorname{sh}(h_1 k) + \operatorname{ch}(h_1 k)) \operatorname{ch}(h_2 k)] - 2\rho_2 k^2 U^2 \operatorname{sh}(kh_2) \operatorname{ch}(kh_1)\},$$

$$\begin{aligned}
A_2 & \equiv -\{g^2 k^2 [\rho_2 (\rho_1 - \rho_3) \operatorname{sh}(h_2 k) \operatorname{ch}(h_1 k) \\
& + \rho_2 (\rho_2 - \rho_3) \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k) + \rho_3 (\rho_1 - \rho_2) \\
& \times \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k)] - \rho_2^2 k^4 U^4 \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k) \\
& + \rho_2 g k^3 U^2 (6\rho_2 \operatorname{sh}(h_2 k) \operatorname{sh}(h_1 k) \\
& + \rho_3 [\operatorname{sh}(h_1 k) + \operatorname{ch}(h_1 k)] \operatorname{ch}(h_2 k))\},
\end{aligned}$$

$$A_1 \equiv 2g\rho_2 k^2 U \operatorname{sh}(h_1 k) [2\rho_2 k^2 U^2 \operatorname{sh}(h_2 k) + gk(\rho_1 - \rho_3) \operatorname{ch}(h_2 k)],$$

$$\begin{aligned}
A_0 & \equiv -gk^3 \operatorname{sh}(h_1 k) [g^2 \operatorname{sh}(h_2 k) (\rho_1 - \rho_2) (\rho_2 - \rho_3) \\
& + gk U^2 \operatorname{ch}(h_2 k) \rho_2 (\rho_1 - \rho_3) + \rho_2^2 k^2 U^4 \operatorname{sh}(h_2 k)] = 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение нашей задачи является обыкновенным полиномиальным уравнением шестого порядка. Выражения для корней этого уравнения аналитически не выписываются. Поэтому в нижеследующем изложении решения уравнения (4) будем исследовать численно.

В частном случае  $U = 0$  дисперсионное уравнение (4) сводится к дисперсионному уравнению для гравитационных волн в трехслойной неподвижной жидкости, полученному в [5] и являющемуся бикубическим, решения которого формально легко выписываются в аналитическом виде

$$\omega_1^2 = gk, \quad \omega_2^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \omega_3^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (5)$$

где  $a, b, c$  — формальные обозначения коэффициентов квадратного алгебраического уравнения.

Из полученных при  $U = 0$  решений (5) несложно получить, что в безразмерных переменных (например, при  $g = 1, \rho_1 = 1, h_2 = 1$ ) корни дисперсионного уравнения распределяются по величинам следующим образом:

$$U = 0: \quad \omega_1^2(U) \gg \omega_2^2(U) > \omega_3^2(U). \quad (6)$$

Как видно из приведенных ниже графиков, такое соотношение между корнями на плоскости  $\{U; \omega\}$ , справедливое на оси ординат (т.е. при  $U = 0$ ), сохранится и при  $U > 0$ , что позволяет идентифицировать корни дисперсионного уравнения, получаемые в численных расчетах по (4).

## Предельные переходы

Для того, чтобы проверить предельный переход к случаю двуслойной жидкости — к неустойчивости тангенциального разрыва поля скоростей, устремим толщину верхнего слоя к нулю:  $h_1 \rightarrow 0$ , а толщину среднего —

к бесконечности:  $h_2 \rightarrow \infty$ . В результате получим дисперсионное уравнение, характерное для „классической“ неустойчивости тангенциального разрыва поля скоростей и имеющее аналитические решения

$$\omega \rightarrow \frac{kU\rho_2}{\rho_2 + \rho_3} \pm \sqrt{gk \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2} - \frac{k^2 U^2 \rho_2 \rho_3}{(\rho_2 + \rho_3)^2}}, \quad (7)$$

что полностью совпадает с известным результатом [12,13].

### Отношения амплитуд

Из системы уравнений (3) можно получить отношения амплитуд волн, распространяющихся по разным границам раздела сред:

$$\eta_{21} \equiv \frac{a_2}{a_1}, \quad \eta_{31} \equiv \frac{a_3}{a_1}, \quad \eta_{32} \equiv \frac{a_3}{a_2},$$

$$\eta_{21} = \frac{1}{\omega^2} [\omega^2 \operatorname{ch}(kh_1) - gk \operatorname{sh}(kh_1)],$$

$$\eta_{31} = \frac{\rho_2(\omega - kU)^2 [\omega^2 \operatorname{ch}(kh_1) - gk \operatorname{sh}(kh_1)]}{\{\omega^2 \operatorname{sh}(kh_2)\rho_3 + \rho_2(\omega - kU)^2 \operatorname{sh}(kh_2) - gk \operatorname{sh}(kh_2)(\rho_3 - \rho_2)\}\omega^2},$$

$$\eta_{32} = \frac{\rho_2(\omega - kU)^2}{\omega^2 \operatorname{sh}(kh_2)\rho_3 + \rho_2(\omega - kU)^2 \operatorname{ch}(kh_2) - gk \operatorname{sh}(kh_2)(\rho_3 - \rho_2)},$$

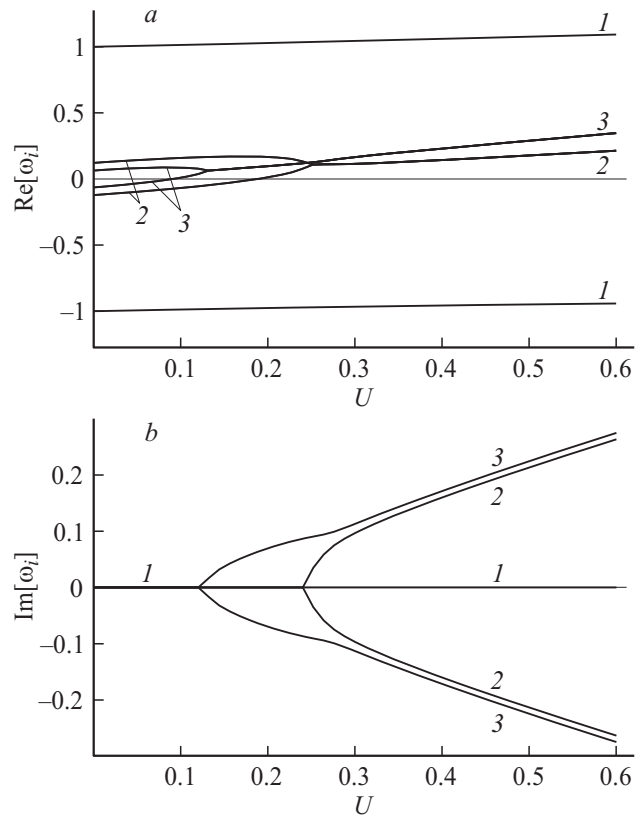
что полностью совпадает при  $U \rightarrow 0$  с результатом, полученным в [5].

Несложно видеть, что отношения амплитуд неявно (через частоту) и явно зависят от скорости движения среднего слоя. Следует отметить, что в общем случае частоты (решения дисперсионного уравнения) получаются комплексными, и об отношениях амплитуд волн, порожденных различными поверхностями раздела, можно говорить лишь в той области, где все частоты вещественны (при малых значениях скорости  $U$ ). Верхняя граница этой области зависит от длины волны.

### Анализ

Корни дисперсионного уравнения (4) будем искать численно. На рис. 1,  $a-b$  (и на всех последующих) приведены зависимости вещественной  $\operatorname{Re} \omega_j$  (действительной частоты) и мнимой  $\operatorname{Im} \omega_j$  (инкрементов-декрементов) частей комплексной в общем случае частоты волн  $\omega$  от величины скорости движения среднего слоя  $U$ . Рисунки рассчитывались в безразмерных переменных, в которых принято  $g = 1, \rho_1 = 1, h_1 = 1$ . Значения остальных параметров задачи приняты следующими:  $\rho_2 = 1.01, \rho_3 = 1.04, h_2 = 1.5, k = 1$ .

На рис. 1,  $a$  линии 1 соответствуют частотам поверхностных волн. Эти линии имеют слабый наклон по отношению к оси скоростей и при малых  $U$  почти параллельны ей. Расчеты показывают, что от скорости движения среднего слоя  $U$  эти частоты зависят слабо. Инкременты-декременты для них практически нулевые,



**Рис. 1.** Зависимость частот от скорости движения среднего слоя. На этом графике и всех нижеследующих:  $a$  — вещественная часть частоты,  $b$  — мнимая часть частоты. Кривая 1 на рисунках с литерой  $a$  — частоты волн на свободной поверхности (поверхностных волн), на рисунках с литерой  $b$  — инкременты-декременты; кривая 2 — частоты и инкременты-декременты внутренних волн, порожденных второй сверху поверхностью раздела; кривая 3 — частоты и инкременты-декременты внутренних волн, порожденных третьей сверху поверхностью раздела. Рассчитано при  $g = 1, \rho_1 = 1, h_1 = 1, \rho_2 = 1.01, \rho_3 = 1.04, h_2 = 1.5, k = 1$ .

что видно из рис. 1,  $b$ : соответствующие линии практически совпадают с осью  $U$ . Линии 2 и 3 соответствуют частотам внутренних волн, порожденных верхней поверхностью среднего слоя (поверхностью раздела  $z = h_2 + \xi_2(x, t)$ ) и нижней (поверхностью раздела  $z = \xi_3(x, t)$ ) соответственно. Видно, что при малых значениях скорости  $U$  инкременты внутренних волн, порожденных третьей (нижней) поверхностью раздела, превышают инкременты волн, порожденных второй (средней) поверхностью раздела. Но, как показывают расчеты, при больших значениях скорости  $U$  они сближаются и инкременты волн, порожденных второй (средней) поверхностью раздела, могут превысить инкременты волн, порожденных третьей (нижней) поверхностью раздела.

На рис. 1,  $a$  линии 3 обозначены одной цифрой из-за нехватки места. Формы линий 2 и 3 отличаются от формы линий 1, что связано с влиянием скорости движения среднего слоя, от которой линии 2 и 3 в

отличие от  $I$  сильно зависят. Несложно видеть, что решения (линии)  $1-3$  при  $U = 0$  расположены симметрично относительно оси абсцисс (согласно корням  $\pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3$  соотношений (6)). С увеличением скорости  $U$  решение (линии)  $1$  меняются слабо, а обе ветви решений (линии)  $2$  и  $3$  сближаются, качественно подобно решениям (6). Причем обе ветви каждого из решений  $2$  и  $3$  сливаются между собой, формируя по одной ветви, которые, в свою очередь, раздваиваются по мнимой части: одна ветвь соответствует периодическому экспоненциальному возрастанию амплитуды волнового движения (инкременту), другая — его экспоненциальному периодическому убыванию (декременту).

Линии  $2$  и  $3$  в отличие от линий  $1$  (которые почти симметричны относительно оси  $U$ ) располагаются на рис. 1,  $a$  заметно несимметрично относительно оси абсцисс. Симметрия пар линий  $2$  и  $3$  имеет место только при  $U = 0$ , с ростом скорости  $U$ , при закритических значениях скорости  $U_{2,3} \geq U_{2^*,3^*}$ , каждая пара сливается в одну линию, увеличивающуюся с ростом  $U$  (подобно тому, как ведут себя с ростом  $U$  решения (7)). На рис. 1,  $b$  именно при  $U_{2,3} = U_{2^*,3^*}$  появляется мнимая часть решений (из качественного сходства с (6), (7) следует, что при  $U_{2,3} = U_{2^*,3^*}$  выражение под радикалом становится отрицательным). Первыми (при меньшем значении скорости  $U_{3^*}$ ) претерпевают неустойчивость внутренние волны, порожденные третьей поверхностью раздела.

На рис. 1,  $b$  линии, соответствующие решениям  $1-3$ , обозначаются теми же цифрами, но характеризуют инкременты–декременты волновых движений. Линии, лежащие выше оси абсцисс, соответствуют инкрементам, лежащие ниже оси абсцисс — декрементам, так что общее число корней дисперсионного уравнения равно шести. Отметим, что появление отличной от нуля мнимой части частоты означает, что решение, соответствующее данному корню, становится неустойчивым, т.е. его амплитуда экспоненциально нарастает (или убывает) со временем. Это приводит к неустойчивости границы раздела сред. Из рис. 1,  $b$  видно, что дисперсионное уравнение имеет две пары комплексных корней. Естественно предположить, что источниками возникновения каждой из этих пар корней являются внутренние границы раздела сред, на которых имеется тангенциальный скачок скорости. С ростом скорости движения среднего слоя эти границы раздела претерпевают неустойчивость. Сравнивая рис. 1,  $b$  и 2,  $b$ , можно заметить, что волны с большим значением волнового числа  $k$  (т.е. с меньшей длиной волны) претерпевают неустойчивость тангенциального разрыва поля скоростей при меньшем значении скорости поступательного движения  $U$ . Видно, что частоты поверхностных и внутренних волн при  $k = 10$  больше, чем для  $k = 1$  (примерно в  $\sqrt{k}$  раз). Качественно сказанное касается и инкрементов. Более того, при  $k = 10$  частоты внутренних волн, порожденных разными поверхностями раздела, совпадают по величине

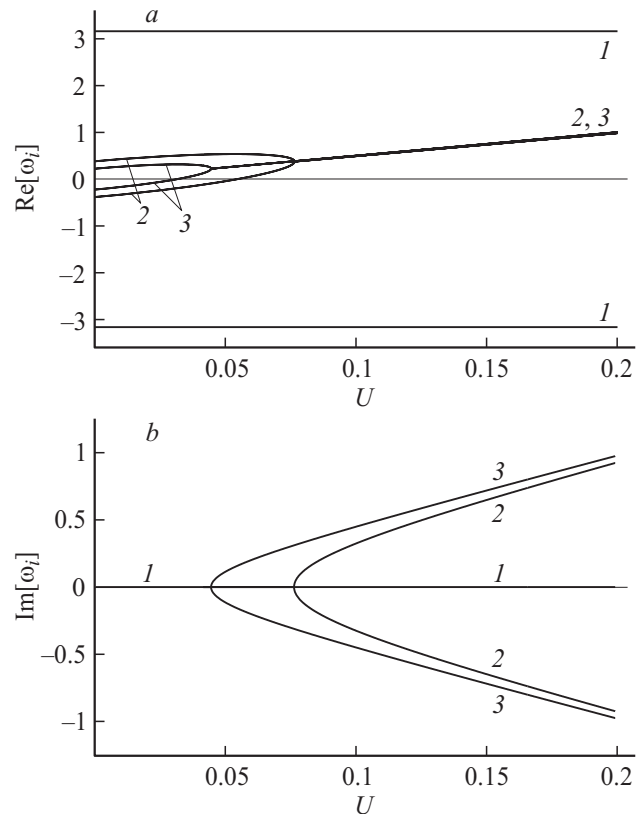
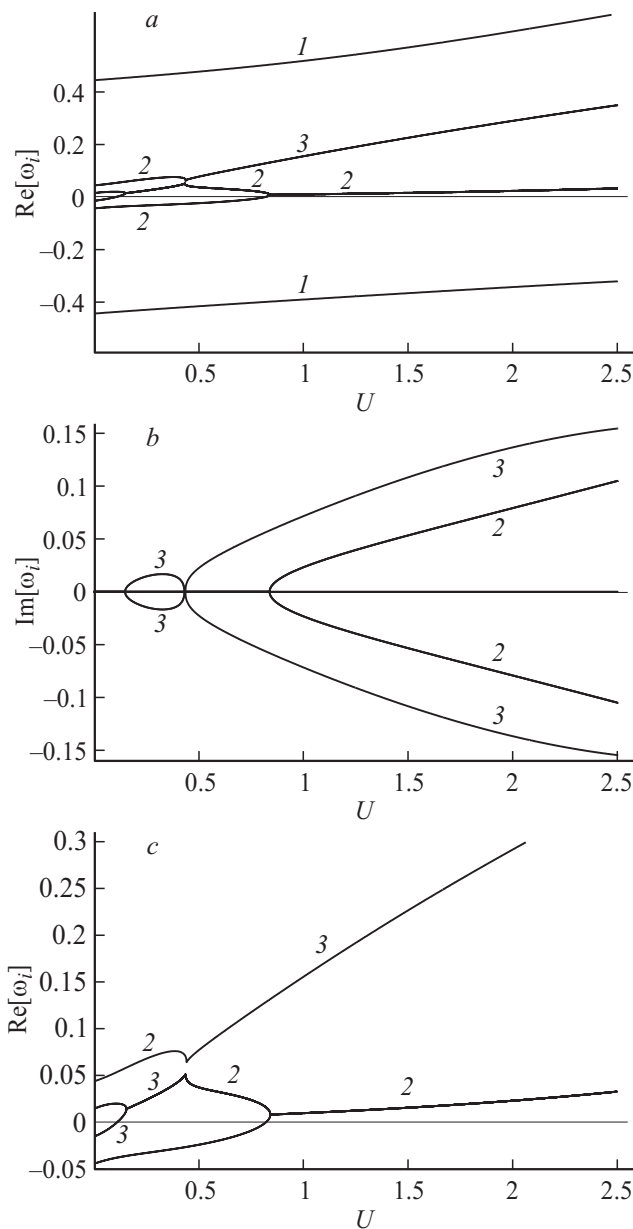


Рис. 2. Зависимость частот от скорости движения среднего слоя. Рассчитано при тех же значениях физических параметров, что на рис. 1, для волн с  $k = 10$ .

в области скоростей, где обе внутренние волны становятся колебательно неустойчивыми.

Из рис. 1, 2 видно, что в отсутствие движения среднего слоя частоты поверхностных волн больше частот внутренних примерно в пять–десять раз в зависимости от длины волны. С ростом  $U$  эти соотношения меняются. Частоты внутренних волн, порожденных третьей поверхностью раздела (при малых скоростях), меньше частот волн, порожденных второй поверхностью раздела, до появления инкрементов–декрементов, а затем соотношение частот меняется на противоположное.

Решения  $1$ , при длинах волн меньших толщины слоя, на которую ведется обезразмеривание (при  $k = 10$ ), от скорости  $U$  зависят слабо, но такая зависимость появляется для волн, превышающих толщину слоя (для  $k \approx 0.2-0.1$ ), рис. 3, 4. С ростом  $U$  появляется линейная или слабо нелинейная зависимость от  $U$  решения  $1$  (рис. 3,  $a$ ) и нелинейная зависимость решений  $2$  и  $3$  (рис. 3,  $c$ , 4,  $a$ ). Следует отметить, что в области длинных волн (когда длина волны превышает толщину слоя) имеет место взаимодействие внутренних волн (рис. 3,  $c$ , 4,  $a$ ) с делением ранее существовавших ветвей на части. Так, из рис. 3 видно, что уже при  $k = 0.2$  ветвь  $3$  делится на две части. Как показывают расчеты, при  $k = 0.1$  этот эффект еще заметнее, на рис. 4 две



**Рис. 3.** Зависимость частот от скорости движения среднего слоя. Рассчитано при тех же значениях физических параметров, что на рис. 1, для волн с  $k = 0.2$ . *c* — средняя часть рис. 3, *a* приведенная в увеличенном масштабе.

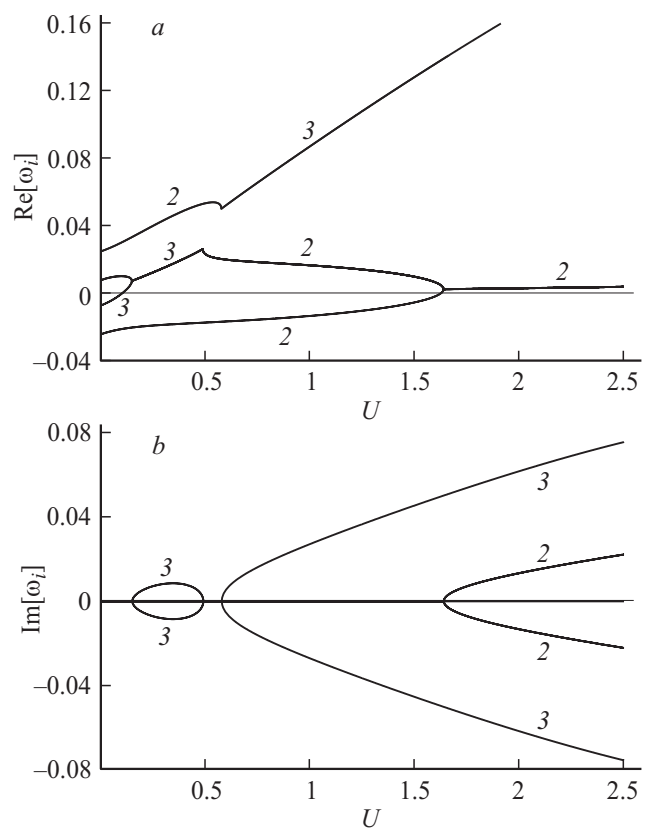
части решения 3 разделяются участком аperiodических волновых движений.

Все вышесказанное относится к разности плотностей слоев в пределах сотых долей от плотности верхней среды, что характерно для вод проливов, соединяющих моря и океаны разной солености и температуры [10,11]. Для естественной стратификации по плотности в пределах одного моря характерны изменения плотности в пределах тысячных долей от плотности верхней среды [8,9]. Расчеты показывают, что при указанных значениях плотностей общая картина остается прежней. Различие в

том, что если частоты поверхностных волн не меняются, то частоты и инкременты внутренних волн снижаются на порядок, как и значения скоростей, при которых происходит появление мнимых компонент частоты. Общая тенденция сводится к уменьшению критических значений реализации неустойчивости тангенциального разрыва при уменьшении разности плотностей сред на разрыве.

Для правильной интерпретации полученных результатов отметим, что на приведенных графиках все величины обезразмерены на  $\rho, g, h$ . Например, скорость  $U$  обезразмеривается на  $\sqrt{gh}$ , что при  $h \sim 10\,000$  см составит  $U_* \approx 3 \cdot 10^3$  см/с. Это обстоятельство следует принимать во внимание, и если для некоторой волны неустойчивость реализуется при безразмерной скорости порядка десятой доли единицы, в реальности это означает скорость течения порядка метров в секунду. Частота волны и инкремент неустойчивости обезразмериваются на  $\sqrt{g/h}$ , что равно  $\approx 0.3$  с. Волновое число обезразмеривается на  $h$ .

В [6] показано, что в зависимости от величины скорости при  $U > U_{cr}$  претерпевают неустойчивость все волны с волновыми числами из некоторого диапазона в ближайшей окрестности наиболее неустойчивой волны,



**Рис. 4.** Зависимость частот внутренних волн от скорости движения среднего слоя. Рассчитано при тех же значениях физических параметров, что на рис. 1, для волн с  $k = 0.1$ . *a* — реальная часть внутренних волн. *b* — мнимая часть внутренних волн.

волновое число  $k$  которой (в используемых обозначениях) пропорционально  $\sqrt{\rho_3 - \rho_2}$ . Поскольку разность плотностей контактирующих сред в нашем случае мала, это будут волны из диапазона гравитационных.

Следует отметить, что волновое движение в движущемся (среднем) слое будет суперпозицией волн, генерируемых нижней и верхней поверхностями раздела, ограничивающими движущийся слой.

Расчеты показывают, что от вида обезразмеривания основные зависимости не меняются. В частности, если вместо обезразмеривания на  $\rho_1$  использовать обезразмеривание на  $\rho_2$ , или обезразмеривание на  $h_1$  заменить обезразмериванием на  $h_2$ , основные закономерности останутся прежними. При варьировании  $\rho_j$  смещаются одновременно оба критических значения скорости, при которых реализуется неустойчивость нижней и средней поверхностей раздела.

В области неустойчивости волн, где частоты комплексны, отношения амплитуд строить не имеет смысла, так как они будут меняться со временем. В области устойчивости волн (при  $U < 0.1$  для  $k = 1$ , рис. 1, а) графики для отношения амплитуд  $\eta_j$ , (см. (7)), можно построить (численно). В общем случае при задании граничных условий форма поверхности раздела будет суперпозицией всех трех решений, но в области неустойчивости картина будет аперриодической функцией времени.

Можно указать, что частоты внутренних волн уменьшаются по мере роста номера генерирующей их поверхности, а инкременты неустойчивости, наоборот, увеличиваются.

## Заключение

Для трехслойной идеальной несжимаемой жидкости, средний слой которой движется поступательно с постоянной скоростью, получено дисперсионное уравнение шестого порядка относительно частоты. Его численный анализ показал, что при увеличении скорости движения среднего слоя жидкости поверхности раздела сред претерпевают неустойчивость по отношению к тангенциальному разрыву поля скоростей (каждая граница при своей скорости). Когда плотности слоев имеют близкие по величине значения, неустойчивость наступает при меньших значениях скорости среднего слоя  $U$ , чем когда плотности слоев существенно различаются, но при этом неустойчивость развивается медленнее, так как инкременты меньше. В случае когда толщина слоев много меньше длины распространяющейся волны, развитие неустойчивости имеет место при довольно малых скоростях движения среднего слоя.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00170-а.

## Список литературы

- [1] *Hanyang Gu, Liejin Guo* // Progress in Natural Science. 2005. Vol. 15. N 11. P. 1026–1034.
- [2] *Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 5. С. 130–140.
- [3] *Mercier M.J., Vasseur R., Dauxois T.* // Nonlinear Processes in Geophysics. 2011. Vol. 18. N 2. P. 193–208.
- [4] *Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Григорьев А.И., Фёдоров М.С.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 9. С. 31–38.
- [5] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Яковлева Л.С.* // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 12. С. 40–44.
- [6] *Григорьев А.И., Суханов С.А., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 4. С. 99–109.
- [7] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Суханов С.А.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 3. С. 48–53.
- [8] *Федоров К.Н.* Тонкая термохалинная структура вод океана // Л.: Гидрометеиздат, 1976. 185 с.
- [9] *Архипкин В.С., Добролюбов С.А.* Океанология (Физические свойства морской воды) // М.: Изд. МАКС-ПРЕСС, 2005. 215 с.
- [10] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. акад. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
- [11] Физические величины. Справочник / А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский и др. Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
- [12] *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
- [13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.