05,11

Магнитные состояния изотропного магнетика с „высоким“ $S = 3/2$ спином ионов

© Е.В. Орленко, Ф.Е. Орленко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: eorlenko@mail.ru

(Поступила в Редакцию 5 октября 2015 г.
В окончательной редакции 15 января 2016 г.)

На основе полученного спинового гамильтониана исследовано магнитное состояние системы частиц с „высоким“ спином, равным 3/2, при наличии в системе изотропного обменного взаимодействия. Показано, что при положительном значении вклада обменного взаимодействия реализуется неустойчивое нематическое состояние, которое переходит в устойчивое ферромагнитное состояние $\left(\text{со средним значением спина } \frac{3}{2}\right)$. Спектр возбуждений в ферромагнитной фазе представляет собой трехкратно вырожденную бесщелевую магнонную моду голдстоуновского типа. При отрицательном знаке обменного вклада антинематическое состояние является устойчивым по отношению к переходу в ферромагнитное состояние, который является запрещенным. При этом антинематик всегда находится в состоянии фазового перехода в неустойчивое антиферромагнитное состояние, спектр возбуждений которого характеризуется одной невырожденной модой голдстуоновского типа.

1. Введение

Системы частиц со спинами, отличными от 1/2, или с так называемыми „высокими“ спинами, интенсивно изучаются с начала 90-х годов и составляют целый пласт теоретических исследований в области квантовых газов и статистической физики. Эти системы обладают целым рядом свойств, принципиально отличных от свойств аналогичным образом устроенных систем локализованных 1/2-спинов. Структура основного состояния, спектр возбуждений, поведение в критических точках — все носит характер, совершенно непохожий на поведение магнитных систем с половинным спином. Теоретические исследования анизотропных антиферромагнетиков со спином частиц, равным 1 [1,2], было стимулировано экспериментами над конденсатом Бозе–Эйнштейна, удерживаемом оптическими ловушками, которые не разрушают степени свободы, обусловленной спином атомов, что позволяло наблюдать макроскопические квантовые явления, связанные с соориентацией спинов [1]. Были обнаружены такие явления как фрагментация основного состояния, когда наблюдается не одно, а несколько основных состояний с различным магнитным упорядочением фазы [2,3]. Так, для систем со спинами $j = 1$ основным состоянием является синглетное, хотя очень сильны магнитные флуктуации с возникновением так называемой магнитной или циклической [3]. Для систем со спинами $j = 2$ основным состоянием является ферромагнитное [4,5]. После успешного охлаждения атомных Бозе-систем и их теоретического описания [6–8] были проведены эксперименты по охлаждению Ферми-системы, в частности K^{40}, когда $7 \cdot 10^5$ атомов было охлаждено до температуры вырождения ниже 300 nK [9–12]. В Ферми-системе обнаружены новые явления, такие как чешуйчатая структура пространственного распределения [13,14], подавление упругих и неупругих соударений [15,16], существование нуль-звука при низкой температуре [17,18].

Модельный гамильтониан, описывающий всю систему попарно взаимодействующих бозонов, обычно содержит слагаемое, введенное феноменологически, которое содержит сумму скалярных произведений спиновых операторов в высоких степенях (биквадратное, бикубическое и так далее) и зависящее от парного спина атомов. Именно благодаря этим слагаемым удается объяснить наличие в системе атомов нелинейных эффектов, которые являются причиной магнитных флуктуаций основного состояния.

В теории конденсированных сред начало исследованиям магнитных свойств систем частиц с высоким спином задолго до экспериментального получения конденсата Бозе–Эйнштейна в 1995 году положили работы Халдейна [19,20]. Для описания антиферромагнитной цепочки Халдэйн [19,20], а позже и его последователи Аффлек, Кеннеди, Либ и Тасаки [21–23] использовали подобный гамильтониан в рамках расширенной $S = 1$ — модели с учетом биквадратного члена в обменном взаимодействии с неопределенными коэффициентами, с помощью которого анализировали промежуточные фазы. Численным путем были получены различные фазовые диаграммы переходов вблизи критической точки с разными возможными сценариями развития событий, которые напрямую зависят от соотношения коэффициентов в исходном гамильтониане. В полуклассическом приближении было найдено солитонное решение для возбуждений, анализировались также промежуточные фазы путем изучения расширенной $S = 1$-модели резонирующих валентных связей с учетом биквадратного члена в обменном взаимодействии

$$H_{AKLT} = J \sum_i \left\{ (\hat{s}_i \hat{s}_{i+1}) + \beta (\hat{s}_i \hat{s}_{i+1})^2 \right\}.$$

Так в [21] показано, что такой гамильтониан допускает существование решений при значении коэффициента $\beta = 1/3$, в этом случае основное состояние представляет собой устойчивую простую валентную связь (VBS), которое отделено от возбуждений щелью. Так как основное состояние при $\beta = 0$ (как было показано в работе Халдэйна [20]) проявляет линейную корреляцию дальнего порядка и адиабатически связано с состоянием $\beta = 1/3$, то в работе Шолльвека [23] делается заключение о том, что фаза Халдэйна носит VBS-характер.

Все разнообразие фаз, теоретически предсказываемых для спин-1-цепочки, напрямую связано со значениями коэффициентов при билинейном и биквадратном членах в гамильтониане обменного взаимодействия, записанном в спиновом представлении. Поэтому знание точного вида гамильтониана, описывающего поведение спин-1-системы, является принципиальным моментом для статистического описания систем с „высоким“ спином и анализа критических явлений, происходящих в таких системах. В работе [24–26] из первых принципов был получен гамильтониан системы частиц с отличным от $1/2$ спином, здесь же были описаны возбуждения, которые могут носить как линейный характер с спектром возбуждений, отделенном щелью от основного состояния, так и нелинейный характер с возможным формированием иак называемого магнитного dark-bright солитона [25,26], веденного и описанного Макановым в работе „О полной интегрируемости и стохастизации вдискретных динамических системах“ [27]. При этом основное состояние описывается макроскопической волновой функцией, выстроенной в соответствие с правилами сложения угловых моментов, а точное значение суммарного спина цепочки атомов равно единице, что приводит к намагниченности, стремящейся к нулю.

Цель настоящей работы — изучение магнитных состояний изотропного магнетика со спином магнитного иона или атома, равного 3/2.

2. Спиновый гамильтониан тождественных частиц с произвольным спином

Универсальный вид гамильтониана обменного взаимодействия в спиновом представлении для системы тождественных частиц, обладающих произвольным спином s, подробно был получен в работе [24], который использовался в работе [27] и в работе [28] для описания магнитных состояний магнитных состояний системы тяжелых дырок, характеризующихся спином 3/2 и интерпретации эффекта гигантского отрицательного магнетосопротивления (ОМС) в немагнитном кристалле, и в [29] для описания магнитного состояния магнитных комплексов со спином 3/2 в манганитах. В компактном изложении эти рассуждения сводятся к следующим утверждениям:

1. Наличие перестановочной симметрии в системе двух тождественных частиц с произвольным спином s приводит к $(2s+1)$-кратному вырождению по величине суммарного спина S собственного состояния, описываемого функцией $\Psi_{kl}(r_1, \xi_1, r_2, \xi_2)$, и отвечающего гамильтониану $\widehat{H}^0(r_1, r_2)$ системы невзаимодействующих частиц с энергией $E^0 = \varepsilon_k + \varepsilon_l$. Полная функция $\Psi_{kl}(r_1, \xi_1, r_2, \xi_2)$ обладает свойством симметрии по отношению к операции перестановки:

$$\widehat{P}_{1,2}\Psi_{kl}(r_1, \xi_1, r_2, \xi_2) = \Psi_{kl}(r_2, \xi_2, r_1, \xi_1) = (-1)^{2s}\Psi_{kl}(r_1, \xi_1, r_2, \xi_2). \quad (1)$$

Здесь операция полной перестановки индексов 1 и 2 включает в себя перестановку координат частиц 1 и 2 и значений проекций спинов на ось Z отдельных частиц: $\widehat{P}_{1,2} = \widehat{P}_{r_1,r_2}\widehat{P}_{s_{z1},s_{z2}}$.

2. Двухчастичная функция всегда может быть представлена в виде простого произведения ее координатной и спиновой частей

$$\Psi_{kl}(r_1, \xi_1, r_2, \xi_2) = \Phi_{kl}(r_1, r_2) \cdot X_{kl}(\xi_1, \xi_2), \quad (2)$$

свойства симметрии которых по отношению к операции перестановки следующие:

1) симметрия спиновой части определяется симметрией коэффициентов Клебша–Гордана (см. [30]):

$$X(\xi_1, \xi_2) = |S, S_z\rangle = \sum_{s_{1z}s_{2z}} C^{SS_z}_{s_1s_{1z}s_2s_{2z}} |s, s_{1z}\rangle |s, s_{2z}\rangle,$$

где

$$C^{SS_z}_{ss_{1z}ss_{2z}} = (-1)^{2s-S} C^{SS_z}_{ss_{2z}ss_{1z}}$$

или

$$\widehat{P}_{s_{z1},s_{z2}} X(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{2s-S} X(\xi_1, \xi_2), \quad (3)$$

где S — величина суммарного спина двух частиц, S_Z — его проекция на ось z, $s_1 = s_2 = s$, $s_{1z} = s_{2z}$ — величина спина и его проекция на ось z 1-ой и 2-й частицы соответственно.

2) симметрия координатной части двухчастичной функции (2) определяется как результат действия оператора перестановки на функцию (2) с учетом (1) и (3)

$$\widehat{P}_{1,2}\Psi_{kl}(r_1, \xi_1; r_2, \xi_2) = \widehat{P}_{r_1,r_2}\Phi_{kl}(r_1, r_2)\widehat{P}_{s_{z1},s_{z2}}X(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{2S}\Psi_{kl}(r_1, \xi_1; r_2, \xi_2),$$

$$\widehat{P}_{r_1,r_2}\Phi_{kl}(r_1, r_2) \cdot (-1)^{2s-S} X(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{2S}\Psi_{kl}(r_1, \xi_1; r_2, \xi_2),$$

следовательно

$$\widehat{P}_{r_1,r_2}\Phi_{kl}(r_1, r_2) = (-1)^{S}\Phi_{kl}(r_1, r_2). \quad (4)$$

3. Первая поправка к энергии, обусловленная взаимодействием $\widehat{V}(r_1, r_2)$, заданном в координатном представлении, однозначно определяется величиной суммарного спина

$$E^{(1)} = K + (-1)^S A,$$
$$K = \langle \phi_k(r_1)\phi_l(r_2)|\widehat{V}(r_1, r_2)|\phi_l(r_2)\phi_k(r_1)\rangle, \qquad (5)$$
$$A = \langle \phi_l(r_1)\phi_k(r_2)|\widehat{V}(r_1, r_2)|\phi_l(r_2)\phi_k(r_1)\rangle,$$

где S — величина суммарного спина взаимодействующих частиц, K — „прямой" и A — обменный вклад, при этом знак перед обменным вкладом определяется свойством симметрии координатной части функции (2), установленном в соотношении (4).

4. Гамильтониан строится в спиновом представлении системы тождественных частиц, взаимодействие которых определено в координатном представлении. Для этого выбирается оператор четности перестановки $\hat{\rho}_{ij}$, который, действуя в спиновом представлении непосредственно на спиновую часть функции (2), имел бы собственное значение, соответствующее четности перестановки координатной части волновой функции (4)

$$\hat{\rho}_{12} X(\xi_1, \xi_2) = (-1)^S X(\xi_1, \xi_2),$$
$$\hat{\rho}_{12}|S, S_z; s1s2\rangle = \hat{\rho}_{12} \sum_{s_{z1}s_{2z}} C^{SS_z}_{s_1 s_{1z} s_2 s_{2z}} |s_1, s_{1z}\rangle |s_2, s_{2z}\rangle$$
$$= (-1)^S |S, S_z; s1s2\rangle. \qquad (6)$$

Таким образом, для системы $(2s + 1)$ уравнений (6), допускающей однозначное определение $(2s + 1)$ свободных коэффициентов, оператор $\hat{\rho}_{12}$ выбирался в виде ряда по степеням скалярных произведений операторов спина взаимодействующих частиц

$$\hat{\rho}_{12} = c_{2s}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^{2s} + c_{2s-1}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^{2s-1} + \ldots$$
$$+ c_1(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^1 + c_0, \qquad (7)$$

где $\hat{s}_1, \hat{s}_2$ — операторы спина 1-й и 2-й частицы соответственно. При подстановке (7) система (6) сводится к системе $(2s + 1)$ алгебраических уравнений, которая однозначно определяет искомые коэффициенты в разложении (7)

$$\left\{\begin{array}{l} c_{2s}\Big(S(S+1) - 2s(s+1)\Big)^{2s} + c_{2s-1}\Big(S(S+1) \\ -2s(s+1)\Big)^{2s-1} + \ldots c_1\Big(S(S+1) - 2s(s+1)\Big) + c_0 \\ \ldots \end{array}\right|_S$$
$$= (-1)^S. \qquad (8)$$

Таким образом, гамильтониан пары тождественных частиц 1 и 2, действующий в спиновом пространстве, определяется как

$$\widehat{H}_{12} = E^0_{12} + K_{12} + A_1 \hat{\rho}_{12}. \qquad (9)$$

Обобщая на случай системы частиц, обладающих произвольным спином s, полный гамильтониан, учитывающий парные взаимодействия, будет иметь вид: $\widehat{H} = \sum_{k<l}(E^0_{kl} + K_{kl} + A_{kl}\widehat{P}) = \sum_{k<l} E^0_{kl} + \widehat{H}_{int}$, а оператор взаимодействия может быть записан как

$$\widehat{H}_{int} = \sum_{k<l}(K_{kl} + A_{kl}\hat{\rho}_{kl}), \qquad (10)$$

где оператор четности однозначно определен выражением (7) с учетом решений (8).

Для системы частиц со спинами $s = 1/2$ оператор четности для пары частиц

$$\hat{\rho}_{12} = \frac{1}{2}(4\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 + 1)$$

гамильтониан (10) принимает известную форму Гейзенберга–Дирака–ван-Флека

$$\widehat{H}_{int1/2} = \sum_{k<l}\left\{K_{kl} - \frac{1}{2}A_{kl}(4\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 + 1)\right\}. \qquad (11)$$

Для частицы с $s = 1$ оператор четности для пары частиц

$$\hat{\rho}_{12} = (\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^2 + (\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^1 - 1. \qquad (12)$$

Для системы частиц со спинами $s = 1$ гамильтониан (10) принимает биквадратную форму [25]

$$\widehat{H}_{int1} = \sum_{k<l}\left\{K_{kl} + A_{kl}\big((\hat{s}_k \cdot \hat{s}_l)^2 + (\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^1 - 1\big)\right\}. \qquad (13)$$

Для системы частиц со спинами $s = 3/2$ оператор четности имеет вид

$$\hat{\rho}_{12} = -\frac{2}{9}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^3 - \frac{11}{18}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^2 + \frac{9}{8}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^1 + \frac{67}{32}, \qquad (14)$$

гамильтониан (10) принимает бикубическую форму

$$\widehat{H}_{int3/2} = \sum_{k<l}\left\{K_{kl} + A_{kl}\left(-\frac{2}{9}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^3 - \frac{11}{18}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^2 + \frac{9}{8}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^1 + \frac{67}{32}\right)\right\}. \qquad (15)$$

Энергия взаимодействия пары частиц

$$E^{exc}_{1,2} = A\left\{-\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\big(S(S+1) - 2s(s+1)\big)\right)^3 - \frac{11}{18}\left(\frac{1}{2}\big(S(S+1) - 2s(s+1)\big)\right)^2 + \frac{9}{8}\left(\frac{1}{2}\big(S(S+1) - 2s(s+1)\big)\right) + \frac{67}{32}\right\}. \qquad (16)$$

Если константа обменного взаимодействия $A > 0$, то выгодным состоянием является вырожденное симметричное состояние с суммарным спином $S = 1, 3$ и поправкой к энергии $E^{exc}_{i,i+1} = -A_{i,i+1}$, тогда как в случае $A < 0$ выгодным состоянием будет антисимметричное вырожденное состояние с $S = 0, 2$ и поправкой к энергии $E^{exc}_{i,i+1} = A_{i,i+1}$.

Для системы частиц со спинами $s = 2$ оператор четности имеет вид

$$\hat{\rho}_{12} = \frac{1}{36}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^4 + \frac{1}{6}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^3 - \frac{13}{6}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^2 - \frac{5}{2}(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2)^1 - 1, \tag{17}$$

тогда гамильтониан (10) принимает битетрическую форму

$$\widehat{H}_{int2} = \sum_{k<l}\left\{K_{kl} + A_{kl}\left(\frac{1}{36}(\hat{s}_k \cdot \hat{s}_l)^4 + \frac{1}{6}(\hat{s}_k \cdot \hat{s}_l)^3 - \frac{13}{6}(\hat{s}_k \cdot \hat{s}_l)^2 - \frac{5}{2}(\hat{s}_k \cdot \hat{s}_l)^1 - 1\right)\right\}. \tag{18}$$

Собственное значение энергии взаимодействия пары частиц будет

$$E^{exc}_{1,2} = \frac{A}{6}\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{S(S+1) - 2s(s+1)}{2}\right)^4 + \left(\frac{S(S+1) - 2s(s+1)}{2}\right)^3 - \frac{13}{6}\left(\frac{S(S+1) - 2s(s+1)}{2}\right)^2 - 15\left(\frac{S(S+1) - 2s(s+1)}{2}\right) - 6\right\}. \tag{19}$$

Если константа обменного взаимодействия $A > 0$, то выгодным состоянием является вырожденное антисимметричное состояние с суммарным спином $S = 3, 1$ и поправкой к энергии $E^{exc}_{i,i+1} = -A_{i,i+1}$, тогда как в случае $A < 0$ выгодным состоянием будет симметричное вырожденное состояние с $S = 0, 2, 4$ и поправкой к энергии $E^{exc}_{i,i+1} = A_{i,i+1}$.

3. Основные состояния изотропного спин-3/2-магнетика

Для изотропного магнетика со спином магнитного иона $S = 3/2$ гамильтониан имеет вид (15) в котором опущен вклад от прямого кулоновского взаимодействия, не содержащего явной зависимости от спиновых операторов

$$\widehat{H}_{int3/2} = \sum_{k<l}\left\{A_{kl}\left(-\frac{2}{9}(\hat{s}_k \cdot \hat{s}_l)^3 - \frac{11}{18}(\hat{s}_k \cdot \hat{s}_l)^2 + \frac{9}{8}(\hat{s}_k \cdot \hat{s}_l)^1 - \frac{67}{32}\right)\right\}, \tag{20}$$

где $\hat{s}_k$ — оператор спина k-го узла, а A_{kl} — обменный интеграл между ближайшими соседями.

Гамильтониан (20) запишем через набор неприводимых комбинаций спиновых операторов Стивенса [31], описывающие мультипольные моменты. Для спина 3/2 эти операторы подробно выписаны в работе [31] (см. Приложение), тогда получим

$$\widehat{H}_{int} = -\frac{1}{2}\sum_{k<l}A_{kl}\left\{-\frac{2}{9}\widehat{Q}_{3k} \cdot \widehat{Q}_{3l} + \frac{1}{12}\widehat{Q}_{2k} \cdot \widehat{Q}_{2l} + \frac{1}{5}\hat{j}_k \cdot \hat{j}_l\right\}. \tag{21}$$

Здесь операторы

$$\widehat{Q}_{3k} \cdot \widehat{Q}_{3l} = \frac{1}{10}\widehat{Q}^0_{3k} \cdot \widehat{Q}^0_{3l} + \frac{3}{20}\left(\widehat{Q}^1_{3k} \cdot \widehat{Q}^1_{3l} + \widehat{\widehat{Q}}{}^1_{3k} \cdot \widehat{\widehat{Q}}{}^1_{3l}\right) + \frac{3}{2}\left(\widehat{Q}^2_{3k} \cdot \widehat{Q}^2_{3l} + \widehat{\widehat{Q}}{}^2_{3k} \cdot \widehat{\widehat{Q}}{}^2_{3l}\right) + \frac{1}{4}\left(\widehat{Q}^3_{3k} \cdot \widehat{Q}^3_{3l} + \widehat{\widehat{Q}}{}^3_{3k} \cdot \widehat{\widehat{Q}}{}^3_{3l}\right),$$

$$\widehat{Q}_{2k} \cdot \widehat{Q}_{2l} = \frac{1}{3}\widehat{Q}^0_{2k} \cdot \widehat{Q}^0_{2l} + \left(\widehat{Q}^1_{2k} \cdot \widehat{Q}^1_{2l} + \widehat{\widehat{Q}}{}^1_{2k} \cdot \widehat{\widehat{Q}}{}^1_{2l}\right) + \left(\widehat{Q}^2_{2k} \cdot \widehat{Q}^2_{2l} + \widehat{\widehat{Q}}{}^2_{2k} \cdot \widehat{\widehat{Q}}{}^2_{2l}\right).$$

Выделяя в гамильтониане (21) средние поля в расчете на один узел и проводя диагонализацию на базисе собственных спиновых состояний операторов проекции моментов $\hat{j}_{zk} \equiv \hat{s}_{zk}$, получим одноузельный гамильтониан в виде

$$\widehat{H}_0 = -A\eta\left(\frac{1}{5}\hat{j}_z + \frac{1}{36}\widehat{Q}^0_2 + \frac{1}{45}\widehat{Q}^0_3 + \frac{1}{18}\widehat{Q}^3_3\right), \tag{22}$$

где η — координационное число (число ближайших соседей), A — обменный интеграл для ближайших соседей. Здесь оператор квадрупольного момента $\widehat{Q}^0_2 = 3\hat{j}^2_z - \hat{j}^2$, оператор мультипольного момента $\widehat{Q}^0_3 = 5\hat{j}^3_z - \frac{41}{4}\hat{j}_z$, оператор квадрупольного перехода $\widehat{Q}^3_3 = \frac{1}{2}\left(\hat{j}^3_+ + \hat{j}^3_-\right)$.

С помощью преобразования Боголюбова, применяемого для набора одночастичных собственных состояний $\{|3/2, j_z\rangle\}$

$$\begin{aligned}
&|\chi_+\rangle = u|3/2, 3/2\rangle + v|3/2, -3/2\rangle,\\
&|\chi_-\rangle = -v|3/2, 3/2\rangle + u|3/2, -3/2\rangle,\\
&|\chi_{1/2}\rangle = |3/2, 1/2\rangle,\\
&|\chi_{-1/2}\rangle = |3/2, -1/2\rangle,\\
&u^2 + v^2 = 1,
\end{aligned} \tag{23}$$

проведем диагонализацию гамильтониана (22), и полагая параметры $u = \cos\phi$, $v = \sin\phi$, где $\operatorname{tg}\phi = v/u$, найдем собственные значения энергии, соответствующие состояниям (23)

$$E_+ = E_{\min} = -\frac{\eta A}{6}\left(\frac{1}{2}\langle Q_2^0\rangle + \frac{1}{5}\left(9\langle j_z\rangle + \langle Q_3^0\rangle\right)(u^2 - v^2)\right.$$
$$\left. + \langle Q_3^3\rangle 2uv\right) = -\frac{\eta A}{6}\left(\frac{1}{2}\langle Q_2^0\rangle + \frac{1}{5}\left(9\langle j_z\rangle + \langle Q_3^0\rangle\right)\cos(2\phi)\right.$$
$$\left. + \langle Q_3^3\rangle \sin(2\phi)\right),$$
$$E_- = E_{\max} = -\frac{\eta A}{6}\left(\frac{1}{2}\langle Q_2^0\rangle - \frac{1}{5}\left(9\langle j_z\rangle + \langle Q_3^0\rangle\right)(u^2 - v^2)\right.$$
$$\left. - \langle Q_3^3\rangle 2uv\right) = -\frac{\eta A}{6}\left(\frac{1}{2}\langle Q_2^0\rangle - \frac{1}{5}\left(9\langle j_z\rangle - \langle Q_3^0\rangle\right)\cos(2\phi)\right.$$
$$\left. - \langle Q_3^3\rangle \sin(2\phi)\right), \tag{24}$$
$$E_{1/2} = \frac{\eta A}{2}\left(\frac{1}{6}\langle Q_2^0\rangle - \frac{1}{5}\left(\langle j_z\rangle - \langle Q_3^0\rangle\right)\right),$$
$$E_{-1/2} = \frac{\eta A}{2}\left(\frac{1}{6}\langle Q_2^0\rangle + \frac{1}{5}\left(\langle j_z\rangle - \langle Q_3^0\rangle\right)\right).$$

Параметры $u = \cos\phi$, $v = \sin\phi$, в преобразованиях Боголюбова будем выбирать так, чтобы состояние $|\chi_+\rangle$ соответствовало нормальному подуровню с минимальным значением энергии, что справедливо при выполнении условия

$$-\frac{3}{5}\eta A\left(\left(\langle j_z\rangle + \frac{1}{9}\langle Q_3^0\rangle\right)\cdot\sin(2\phi) - \frac{5}{9}\langle Q_3^3\rangle\cos(2\phi)\right) = 0. \tag{25}$$

Принимая во внимание соотношения П.3, П.4 (см. приложение 2), имеем усредненные по данному состоянию значения мультипольных моментов

$$\langle Q_3^0\rangle = 5\langle (j_z)^3\rangle - \frac{41}{4}\langle j_z\rangle,$$
$$\langle Q_2^0\rangle = 3\langle (j_z)^2\rangle - \frac{15}{4},$$
$$\langle Q_3^3\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle (j_+)^3\rangle + \langle (j_+^3)\rangle\right), \tag{26}$$

которые для состояния $|\chi_+\rangle$ принимают значения

$$\langle j_z\rangle = \frac{3}{2}(u^2 - v^2) = \frac{3}{2}\cos 2\phi,$$
$$\langle Q_3^0\rangle = 5\langle (j_z)^3\rangle - \frac{41}{4}\langle (j_z)\rangle = \frac{3}{2}(u^2 - v^2) = \frac{3}{2}\cos 2\phi,$$
$$\langle Q_2^0\rangle = 3\langle (j_z)^2\rangle - \frac{15}{4} = 3(u^2 + v^2) = 3,$$
$$\langle Q_3^3\rangle = \frac{uv}{2}\left(\langle 3/2, 3/2|(j_+)^3|3/2, -3/2\rangle\right.$$
$$\left. + \langle 3/2, -3/2|(j_-)^3|3/2, -3/2\rangle\right) = 3uv = 3\sin 2\phi, \tag{27}$$

где $\langle j_z\rangle$ — среднее значение проекции спина на ось z в расчете на одну частицу, $\langle Q_2^0\rangle$ — средний квадрупольный момент, $\langle Q_3^0\rangle$ — средний октупольный момент, $\langle Q_3^3\rangle$ — среднее значение параметра квадрупольного перехода.

Подставляя (27) в (24), получаем выражения для энергий соответствующих состояний

$$E_+ = E_{\min} = -\frac{3\eta A}{4},$$
$$E_+ = E_{\max} = \frac{\eta A}{4},$$
$$E_{\pm\frac{1}{2}} = \frac{\eta A}{4}, \tag{28}$$

которые меняются в соответствии с преобразованием Боголюбова (преобразования поворота с тангенсом угла поворота, определяемым как $\operatorname{tg}\phi = v/u$).

Условие (25) экстремума состояния $|\chi_+\rangle$ с минимальной энергией E преобразуется с учетом (26) к виду

$$E'_+ = \frac{\eta}{5}A\cos(2\phi)\sin(2\phi) = 0, \tag{29}$$

откуда вытекают следующие возможные решения, которые проанализируем для двух принципиально различающихся случаев значений обменного интеграла, $A > 0$ и $A < 0$:

I. $A > 0$.

1) Первое решение определяется уравнением: $\cos(2\phi) = 0$, откуда следует параметр $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$, который определяет среднее значение спина с $\langle j_z\rangle = \frac{3}{2}\cos 2\phi_1 = 0$, средний октупольный момент $\langle Q_3^0\rangle = \frac{3}{2}\cos 2\phi_1 = 0$, средний квадрупольный момент $\langle Q_2^0\rangle = 3$ и среднее значение параметра квадрупольного перехода $\langle Q_3^3\rangle = 3\sin(2\phi_1) = 3$. Таким образом, первое решение соответствует нематическому состоянию.

Для выяснения устойчивости указанного состояния проверим знак второй поизводной по угловому параметру от E_+ (28): $E''_+ = \frac{2\eta}{5}A\cos 4\phi|_{\phi_1} = -\frac{2\eta}{5}A < 0$. Таким образом, указанное нематическое состояние является неустойчивым. Этот вывод согласуется с результатом, полученным тем же методом в недавно опубликованной работе [32], если феноменологические константы, введенные в этой работе, заменить на полученные из первых принципов в работе [24] коэффициенты: параметр при бикубическом члене в (20) $c_3 = \frac{2}{9}$, параметр при биквадратном члене $c_2 = \frac{11}{18}$, параметр при билинейном (гейзенберговском) члене $c_3 = -\frac{9}{8}$. Спектр возбуждений в нематической фазе имеет вид в соответствии с [33]

$$\varepsilon_{1,2}(k) = \frac{3\eta}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\begin{array}{r}\left(A - A(k)\right)\left(c_2 - \frac{5}{4}c_3\right)\Big\{A\left(c_2 - \frac{5}{4}c_3\right) - \\ - \frac{1}{2}A(k)\left(c_1 + \frac{3}{2}c_2 + \frac{63}{16}c_3\right)\Big\}\end{array}}$$
$$= \frac{\eta\,(A - A(k))}{2\sqrt{2}} = \frac{\eta A}{2\sqrt{2}}\left(1 - \operatorname{Re}\sum_v e^{ikb_v}\right),$$

$$\varepsilon_3(k) = \frac{9\eta}{4}\sqrt{c_3\big(A - A(k)\big)\{c_3\big(A - A(k)\big) - A(k)\Delta_1\}}$$

$$= \frac{\eta\big(A - A(k)\big)}{6} = \frac{\eta A}{6}\left(1 - \mathrm{Re}\sum_{v} e^{ikb_v}\right),$$

$$\Delta_1 = c_1 - \frac{c_2}{2} + \frac{103}{16}c_3 = 0, \tag{30}$$

где k — волновой вектор магнона, b_v — вектор решетки по направлению к v-му ближайшему соседу, $A(k)$ — Фурье-образ обменного интеграла, щелевой параметр $\Delta_1 = c_1 - \frac{c_2}{2} + \frac{103}{16}c_3 = \left(-\frac{9}{8} - \frac{11}{36} + \frac{2}{9}\cdot\frac{103}{16}\right) = 0$, что отвечает, в соответствие с полученными в [32,33] общими соотношениями, состоянию фазового перехода в ферромагнитную фазу. В угловой точке зоны Бриллюэна, то есть при $k = 0$, где $A(k) = -A$

$$\varepsilon_3(k) = \frac{9\eta}{4}A\sqrt{c_3\left(c_1 - \frac{c_2}{2} + \frac{135}{16}c_3\right)} = \frac{9\eta}{4}A\sqrt{c_3\Delta_2},$$

$$\Delta_2 = \left(c_1 - \frac{c_2}{2} + \frac{135}{16}c_3\right) = \frac{2}{9}, \tag{31}$$

а условие $c_3\Delta_2 = \left(\frac{2}{9}\right)^2 > 0$ обеспечивает устойчивость нематической фазы по отношению к фазовому переходу в антиферромагнитное состояние. Это условие выполняется всегда, при любом знаке обменного интеграла A.

2) Второе решение (29) отвечает $\sin 2\phi = 0$, тогда $\phi_2 = 0$, которое в соответствие с $E''_+ = \frac{2\eta}{5}A\cos 4\phi\big|_{\phi_2} = \frac{2\eta}{5}A > 0$ является устойчивым. Это решение соответствует ферромагнитному состоянию со средним значением спина, равным $\langle j_z\rangle = \frac{3}{2}\cos 2\phi_2 = \frac{3}{2}$. В этом состоянии средний квадрупольный момент $\langle Q_2^0\rangle = 3$, средний октупольный (мультипольный момент) $\langle Q_3^0\rangle = \frac{3}{2}\cdot\cos 2\phi_2 = \frac{3}{2}$, среднее значение квадрупольного перехода $\langle Q_3^3\rangle = 3\cdot\sin(2\phi_2) = 0$.

Рассмотрим спектр возбуждений в ферромагнитной фазе. В приближении ближайших соседей в случае изотропного магнетика три моды сливаются в одну бесщелевую магнонную моду голдстоуновского типа [33]

$$\varepsilon_1(k) = \frac{3\eta}{4}\big(A - A(k)\big)\left(c_1 + \frac{3}{2}c_2 + \frac{63}{16}c_3\right)$$

$$= \frac{\eta}{2}\big(A - A(k)\big),$$

$$\varepsilon_2(k) = \frac{3\eta}{4}\left\{\big(A - A(k)\big)\left(c_2 - \frac{5}{4}c_3\right) + A\Delta_1\right\}$$

$$= \frac{\eta}{2}\big(A - A(k)\big),$$

$$\varepsilon_3(k) = \frac{9\eta}{4}\left\{\big(A - A(k)\big)c_3 + A\Delta_1\right\} = \frac{\eta}{2}\big(A - A(k)\big)$$

$$= \frac{\eta A}{2}\left(1 - \mathrm{Re}\sum_{v} e^{ikb_v}\right), \tag{32}$$

где параметр Δ_1 в данном случае точно равен нулю, что означает в соответствие с полученными в [32,33] общими соотношениями, где $\Delta_1 = c_1 - \frac{c_2}{2} + \frac{103}{16}c_3 = 0$, состояние фазового перехода из ферромагнитной в нематическую фазу. На краю зоны Бриллюэна, то есть при $k = 0$, где $A(k) = -A$, $\varepsilon_3(k) = \frac{2}{9}A = A\Delta_2 > 0$, что обеспечивает устойчивость по отношению к фазовому переходу из ферромагнитной в антинематическую фазу [32,33]. Переход в антинематическую фазу невозможен, поскольку при ослаблении корреляций, то есть при $A \to 0$, система перейдет в парамагнитную разупорядоченную фазу.

Эти выводы согласуются с оценкой, непосредственно следующей из выражения (16) для точного значения энергии пары частиц. Суммарный механический момент остается максимальным и на фоне ферромагнитного упорядочения могут распространяться спиновые волны со спектром голдстоуновского, бесщелевого типа.

II. $A < 0$.

1) Первое решение $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$, определяющееся уравнением $\cos(2\phi) = 0$, является устойчивым, поскольку $E''_+ = \frac{2\eta}{5}A\cos 4\phi\big|_{\phi_1} = -\frac{2\eta}{5}A > 0$, оно соответствует антинематическому состоянию с учетом двух подрешеток $\langle j_z\rangle_1 = \frac{3}{2}\cos 2\phi_1 = 0$, $\langle Q_2^0\rangle_1 = 3$, $\langle Q_3^0\rangle_1 = \frac{3}{2}\cos 2\phi_1 = 0$, $\langle Q_3^3\rangle_1 = \frac{3}{2}\sin(2\phi_1) = \frac{3}{2}$, $\langle j_z\rangle_2 = \frac{3}{2}\cos 2\phi_1 = 0$, $\langle Q_2^0\rangle_2 = 3$, $\langle Q_3^0\rangle_2 = \frac{3}{2}\cos 2\phi_1 = 0$, $\langle Q_3^3\rangle_1 = \frac{3}{2}\sin(2\phi_1) = -\frac{3}{2}$.

Спектр возбуждений в соответствии с [32] должен составлять три полученные моды. Однако две первые моды исчезают, и остается только одна бесщелевая мода голдстоуновского типа

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{3\eta}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\begin{aligned}&\big(A + A(k)\big)\left(c_2 - \tfrac{11}{4}c_3\right)\left\{A\left(c_2 + \tfrac{11}{4}c_3\right) + \right.\\ &\qquad\left. + \tfrac{1}{2}A(k)\left(c_1 - \tfrac{5}{2}c_2 + \tfrac{191}{16}c_3\right)\right\}\end{aligned}}$$

$$= \frac{3\eta}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\begin{aligned}&\big(A + A(k)\big)\left(\tfrac{11}{8} - \tfrac{11}{18}\right)\times\\ &\qquad\times\left\{\tfrac{11}{9}A + \tfrac{1}{8}A(k)\left(-\tfrac{9}{2} - \tfrac{55}{9} + \tfrac{191}{18}\right)\right\}\end{aligned}}$$

$$= 0,$$

$$\varepsilon_3(k) = \frac{9\eta}{4}$$

$$\times\sqrt{c_3\big(A - A(k)\big)\left\{c_3A - A(k)\left(c_1 - \tfrac{1}{2}c_2 + \tfrac{119}{16}c_3\right)\right\}}$$

$$= \frac{\eta}{\sqrt{2}}\big(A - A(k)\big). \tag{33}$$

Эта мода такая же, как в рассмотренном выше случае ферромагнитной фазы. Кроме того, для устойчивого существования антинематической фазы требуется выполнение двух условий, в соответствие с выводами [32]: $A\Delta_1 > 0$, $A\Delta_2 < 0$. Первое условие не выполняется в принципе, так как $\Delta_1 = 0$, что соответствует фазовому переходу в антиферромагнитное состояние. Второе действительно выполняется, поскольку $A\Delta_2 = \frac{2}{9}A < 0$, и обращается в ноль только при ослаблении корреляций, то есть когда обменный интеграл стремится к нулю. Таким образом, антинематическое состояние соответствует безразличному равновесию по отношению к переходу в антиферромагнитное состояние, в соответствии с параметром $A\Delta_1 = 0$, и абсолютно устойчиво по отношению к переходу в ферромагнитное состояние, который является запрещенным, в соответствии с параметром $A\Delta_2 < 0$.

2) Второе решение $\phi_2 = 0$, отвечающее $\sin 2\phi = 0$, которое в соответствие с $E''_+ = \frac{2\eta}{5} A \cos 4\phi\big|_{\phi_2} = \frac{2\eta}{5} A < 0$ является неустойчивым и соответствует антисимметричному антиферромагнитному состоянию со следующими параметрами для двух подрешеток, средним значением спина, равным $\langle j_z\rangle_I = \frac{3}{2}\cos 2\phi_2 = \frac{3}{2}$ и $\langle j_z\rangle_{II} = -\frac{3}{2}\cos 2\phi_2 = -\frac{3}{2}$, средним квадрупольным моментом $\langle Q_2^0\rangle_I = 3$ и $\langle Q_2^0\rangle_{II} = 3$, средним октупольным (мультипольным) моментом $\langle Q_3^0\rangle_I = \frac{3}{2}\cdot\cos 2\phi_2 = \frac{3}{2}$ и $\langle Q_3^0\rangle_{II} = -\frac{3}{2}\cdot\cos 2\phi_2 = -\frac{3}{2}$, средним значением квадрупольного перехода $\langle Q_3^3\rangle_I = 3\cdot\sin(2\phi_2) = 0$ и $\langle Q_3^3\rangle_{II} = -3\cdot\sin(2\phi_2) = 0$.

Подстановка соответствующих параметров из (20) (параметр при бикубическом члене $c_3 = \frac{2}{9}$, параметр при биквадратном члене $c_2 = \frac{11}{18}$, параметр при билинейном (гейзенберговском) члене $c_1 = -\frac{9}{8}$) в полученные в [32] выражения для трех мод возбуждений антиферромагнитного состояния, дает существование только одной, третьей моды бесщелевого типа.

$$\varepsilon_1 = \frac{3\eta}{4}\sqrt{\left(A^2 - A^2(k)\right)\left(\frac{5}{2}c_2 - c_1 - \frac{191}{16}c_3\right)^2}$$
$$= \frac{3\eta}{4}\sqrt{\left(A^2 - A^2(k)\right)}\cdot 0 = 0,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{3\eta}{4}\sqrt{\left(A^2 - A^2(k)\right)\left(\frac{3}{2}c_2 - c_1 - \frac{147}{16}c_3\right)^2}$$
$$= \frac{3\eta}{4}\sqrt{\left(A^2 - A^2(k)\right)}\cdot 0 = 0,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{9\eta}{4}\sqrt{A^2(k)c_3^2 - A^2\left(\frac{1}{2}c_2 - c_1 - \frac{119}{16}c_3\right)^2}$$
$$= \frac{9\eta}{4}\cdot|A(k)|c_3 = \frac{\eta}{2}\cdot|A(k)|. \tag{34}$$

Условие устойчивости антиферромагнитного состояния $A\Delta_1 < 0$, $A\Delta_2 < 0$, удовлетворяется только наполовину, поскольку $A\Delta_1 = 0$, что соответствует фазовому переходу в антинематическую фазу и $A\Delta_2 < 0$, что свидетельствует об устойчивости системы по отношению к переходу в нематическое состояние.

Фазы 3/2-магнетика

Нематик $A\Delta_1 < 0$, $A\Delta_2 > 0$	Ферромагнетик $A\Delta_2 > 0$, $A\Delta_1 > 0$
Антиферромагнетик $A\Delta_1 < 0$, $A\Delta_2 < 0$	Антинематик $A\Delta_2 < 0$, $A\Delta_1 > 0$

В таблице показаны возможные для данной системы фазовые переходы, где вертикальная линия означает границу раздела фаз при $A\Delta_1 = 0$, условие, которое реализуется всегда и означает размытость границы для фазовых переходов между ферромагнитным и нематическим состояниями, а также антиферромагнитным и антинематическим состояниями. Горизонтальная линия означает непреодолимую границу раздела фаз при $A\Delta_2 = 0$, поскольку в зависимости от знака обменного интеграла этот параметр $A\Delta_2 = \frac{2}{9}A$, либо строго положителен, если обменный интеграл имеет положительный знак, либо строго отрицателен в обратном случае. Таким образом, реализуются только два из возможных фазовых переходов, устойчивый ферромагнетик — неустойчивый нематик, при положительном значении обменного интеграла; и неустойчивый антиферромагнетик — устойчивый антинематик, при отрицательном параметре обменного взаимодействия.

4. Заключение

Обменное взаимодействие, определяющее спиновую конфигурацию, является результатом кулоновского взаимодействия зарядов, перераспределенных в реальном пространстве в соответствие с закономерностями интерференции состояний, определенных в координатном пространстве. В силу однозначной связи четностей перестановок в координатной и спиновых частях волновой функции устанавливается спиновая конфигурация, однозначно соответствующая знаку обменного кулоновского взаимодействия. В этом смысле, основным параметром, определяющим магнитное упорядочение в системах тождественных частиц, является обменный интеграл. Знак, с которым обменный интеграл входит в выражение для полной энергии, определяется четностью перестановки координатной части полной волновой функции, которая, в силу однозначной связи с четностью спиновой части, может быть выражена оператором, включающем в себя скалярные произведения спиновых операторов, взятые в „высоких“ степенях — биквадратные, бикубические вклады и т. д. с соответствующими коэффициентами. При этом обменный интеграл входит общим множителем в результирующий спиновый гамильтониан. Коэффициенты при билинейном, биквадратном, бикубическом и т. д. члене определяются однозначно из соответствующего условия четности. Таким образом, понятие отдельно взятого биквадратного, или бикубического обменного взаимодействия теряет смысл, поскольку определяется обменным взаимодействием, вычисленным в координатном пространстве.

В настоящей работе показано, что в изотропном магнетике со спином 3/2 переходы возможны только между состояниями, относящимися к одному знаку обменного интеграла, то есть ферромагнетик–нематик, либо антиферромагнетик–антинематик, если не существует механизмов, меняющих знак обменного взаимодействия, которое, вообще говоря, сохраняет как параметр, зависимость от расстояния между частицами и при определенных конфигурациях межцентровых перекрытий волновых функций может менять свой знак [34,35]. Данные выводы согласуются с результатами расчетов, выполненных в модели Блюма–Капеля в работе [36], где получен гистерезис для возможного ферромагнитного, либо антиферромагнитного состояния в нанопроволоке.

Приложение 1. Спиновые функции двухчастичной системы

Приведем для справки все возможные спиновые функции состояний, полученные при сложении моментов 3/2.

Симметричные состояния

$$|J=3, J_z=3\rangle = |3/2, 3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle,$$

$$|J=3, J_z=2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3/2, 3/2\rangle|3/2, 1/2\rangle$$
$$+ |3/2, 1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle),$$

$$|J=3, J_z=1\rangle = (|3/2, 3/2\rangle|3/2, -1/2\rangle$$
$$+ |3/2, -1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle)\frac{1}{5} + |3/2, 1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$|J=3, J_z=0\rangle = (|3/2, 1/2\rangle|3/2, -1/2\rangle$$
$$+ |3/2, -1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle)\frac{3}{2\sqrt{5}} + (|3/2, 3/2\rangle|3/2, -3/2\rangle$$
$$+ |3/2, -3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle)\frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

$$|J=1, J_z=1\rangle = -\sqrt{\frac{2}{5}}|3/2, 1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle$$
$$+ \sqrt{\frac{3}{10}}(|3/2, 3/2\rangle|3/2, -1/2\rangle + |3/2, -1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle),$$

$$|J=1, J_z=0\rangle = \frac{3}{2\sqrt{5}}(|3/2, 3/2\rangle|3/2, -3/2\rangle$$
$$+ |3/2, -3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle) - \frac{1}{2\sqrt{5}}(|3/2, 1/2\rangle|3/2, -1/2\rangle$$
$$+|3/2, -1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle). \quad (\Pi 1)$$

Антисимметричные состояния

$$|J=2, J_z=2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3/2, 3/2\rangle|3/2, 1/2\rangle$$
$$- |3/2, 1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle),$$

$$|J=2, J_z=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3/2, 3/2\rangle|3/2, -1/2\rangle$$
$$- |3/2, -1/2\rangle|3/2, 3/2\rangle),$$

$$|J=2, J_z=0\rangle = \frac{1}{2}(|3/2, 1/2\rangle|3/2, -1/2\rangle$$
$$- |3/2, -1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle) + \frac{1}{2}(|3/2, 3/2\rangle|3/2, -3/2\rangle$$
$$- |3/2, -3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle,$$

$$|J=0, J_z=0\rangle = \frac{1}{2}(|3/2, 3/2\rangle|3/2, -3/2\rangle$$
$$- |3/2, -3/2\rangle|3/2, 3/2\rangle) - \frac{1}{2}(|3/2, 1/2\rangle|3/2, -1/2\rangle$$
$$- |3/2, -1/2\rangle|3/2, 1/2\rangle). \quad (\Pi 2)$$

Приложение 2. Операторы Стивенса

Квадрупольные

$$\widehat{Q}_2^0 = 3\hat{j}_z^2 - \hat{j}^2,$$
$$\widehat{Q}_2^1 = \{\hat{j}_z, \hat{j}_x\},$$
$$\widetilde{\widehat{Q}}_2^1 = \{\hat{j}_z, \hat{j}_y\},$$
$$\widehat{Q}_2^2 = \frac{1}{2}(\hat{j}^{+2} + \hat{j}^{-2}),$$
$$\widetilde{\widehat{Q}}_2^2 = \frac{1}{2i}(\hat{j}^{+2} - \hat{j}^{-2}). \quad (\Pi 3)$$

Здесь фигурными скобками обозначены антикоммутаторы операторов, например $\{\hat{j}_z, \hat{j}_x\} = \hat{j}_z\hat{j}_x + \hat{j}_x\hat{j}_z$.

Октупольные

$$\widehat{Q}_3^0 = 5\hat{j}_z^3 - 3\hat{j}^2\hat{j}_z + \hat{j}_z,$$
$$\widehat{Q}_3^1 = \frac{1}{2}\left\{\left(5\hat{j}_z^2 - \hat{j}^2 - \frac{1}{2}\right), \hat{j}_x\right\},$$
$$\widetilde{\widehat{Q}}_3^1 = \frac{1}{2}\left\{\left(5\hat{j}_z^2 - \hat{j}^2 - \frac{1}{2}\right), \hat{j}_y\right\},$$
$$\widehat{Q}_3^2 = \frac{1}{4}\{\hat{j}_z, (\hat{j}_+^2 + \hat{j}_-^2)\},$$
$$\widetilde{\widehat{Q}}_3^2 = \frac{1}{4i}\{\hat{j}_z, (\hat{j}_+^2 + \hat{j}_-^2)\},$$
$$\widehat{Q}_3^3 = \frac{1}{2}(\hat{j}_+^3 + \hat{j}_-^3),$$
$$\widetilde{\widehat{Q}}_3^3 = \frac{1}{2i}(\hat{j}_+^3 - \hat{j}_-^3). \quad (\Pi 4)$$

Список литературы

[1] C.V. Ciobanu, S.-K. Yip, Tin-Lun Ho. Phys. Rev. A **61**, *3*, 1050 (2000).
[2] Tin-Lun Ho. Phys. Rev. Lett., **81**, 742, (1998).
[3] J.-P. Martikainen, K.-A. Suominen. arXiv:cond-mat/0106013, 1 (2001).
[4] Tin Lun Ho, Sung Kit Yip. Phys. Rev. Lett. **84**, 4031 (2000).
[5] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matteus, C.E. Wieman, E.A. Cornell. Science **269**, 198 (1995).
[6] C.C. Bradley, C.A. Sackett, R.G. Hulet. Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
[7] Е.В. Орленко, И.Е. Мазец, Б.Г. Матисов. ЖТФ **73**, *1*, 30, (2003).
[8] Ph. Coureille, R.S. Freeland, D.J. Heinzen, F.A. van Abeelen, B.J. Verhaar. Phys. Rev. Lett. **81**, 69 (1998).
[9] B.De. Marko, D.S. Jin. Science **285**, 1703 (1999).
[10] V. Vuletic, A.J. Kerman, C. Chin, S.Chu. Phys. Rev. Lett. **82**, 1406 (1999).
[11] J.L. Roberts, N.R. Claussen, James P. Burke, Chris H. Green, E.A. Cornell, C.E. Wieman. Phys. Rev. Lett. **81**, 5109 (1998).
[12] E.A. Cornell, J.R. Enscher, C.E. Wieman. http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9903109.
[13] J. Schneider, H. Wallis. Phys. Rev. A **57**, 1253 (1998).
[14] G.M. Bruun, K. Burnet. Phys. Rev. A 58, 2427 (1998).
[15] Е.В. Орленко, Б.Г. Матисов, Г.Т. Кетиладзе. ЖТФ **71**, *12*, 6, (2001).
[16] G. Ferari. Phys. Rev. A **59**, R4125 (1999).
[17] H.T.C. Stoof, M. Houbiers, C.A. Sackett, R.G. Hulet. Phys. Rev. Lett. **76**, 10 (1996).
[18] M. Houbiers, H.T.C. Stoof. Phys. Rev. A **59**,1556 (1999).
[19] F.D.M. Haldane. Phys. Lett. **93** A 464 (1983).
[20] F. D. M. Haldane. Phys. Rev. Lett. **50**, 1153 (1983).
[21] I. Affleck, T. Kennedy, E.H. Lieb, H. Tasaki. Phys. Rev. Lett. **59**, 799 (1987).
[22] A. Fabricio Albuquerque, Chris J. Hamer, Jaan Oitmaa. Phys. Rev. B **79**, 054 412, (2009).
[23] U. Schollwöck, T. Jolicoeur, T. Garel. Phys. Rev. B **53**, 3304 (1996).
[24] E. Orlenko. Int. J. Quantum Chem. (IJQC) **107**, 2838 (2007).
[25] Ф.Е. Орленко, Г.Г. Зегря, Е.В. Орленко. ЖТФ **82**, 10 (2012).
[26] E.V. Orlenko, F.E. Orlenko, G.G. Zegrya. Natur. Sci. **2**, 1287 (2010).
[27] С.В. Манаков. ЖЭТФ **67**, *8*, 543 (1974).
[28] Ф.Е. Орленко, Г.Г. Зегря. НТВ СПбГПУ **116**, 7 (2011).
[29] Е.В. Орленко, Е.В. Ершова, Ф.Е. Орленко. ЖЭТФ **144**, 776 (2013).
[30] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, V.K. Khersonskii. The Quantum Theory of Angular Momentum. World Scientific, Singapore (1978), 513 p.
[31] K. Stevens. Proc. Phys. Soc. A **65** , 209 (1952).
[32] О.А.Космачев, Ю.А. Фридман, Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов. ЖЭТФ **147**, 320 (2015).
[33] С.Л. Гинзбург. ФТТ **12**, 1805 (1970).
[34] Е.В. Орленко, Ф.Е. Орленко, А.В. Евстафьев. ЖЭТФ **147**, 338 (2015).
[35] Е.В. Орленко, Ф.Е. Орленко. Магнитное упорядочение „больших“ спинов. Проявление законов перестановочной симметрии. LAP Lambert Academic Publishing (2012). 127 с.
[36] Y. Kocakaplan, M. Ertas. ЖЭТФ **148**, 696 (2015).