01

К теории теплопереноса в массивных телах

© С.О. Гладков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ),
125993 Москва, Россия
e-mail: sglad@newmail.ru

(Поступило в Редакцию 30 июня 2015 г.)

Показано, что учет взаимодействия квазистатических гравитационных волн с флуктуациями плотности приводит к независимости коэффициента теплопроводности κ от температуры T, и, как показывают численные оценки, является самым эффективным механизмом взаимодействия в массивных телах. Зависимость $\kappa(T)$ вычислена в широкой области изменения аргумента.

Проблемам исследования процесса теплопроводности в различных телах посвящено огромное количество работ (см., например, оригинальные статьи [1–3] и монографии [4,5]). При этом единой отличительной чертой их всех является некоторое модельное представление структуры тела (если это кристаллический диэлектрик, то здесь „работает“ фононная модель Дебая. В случае сложной неоднородной структуры, каковыми, в частности, являются пористые тела, то тут начинают „работать“ и модель Дебая, и газовое приближение), позволяющее не только аналитически корректно описать и уже поставленный эксперимент (это сделано, например, в работе [6]), но и предсказать ряд дополнительных эффектов [7] (что нашло свое отражение в монографии [8], а позднее подтвердилось в экспериментах [9,10]).

В настоящей работе речь пройдет о выяснении влияния на процесс теплопроводности механизмов, связанных с учетом взаимодействия гравитационных сил с длинноволновыми флуктуациями плотности. Как увидим далее, он оказывается чрезвычайно важным только, если речь идет о массивных телах. В случае обычных экспериментальных образцов небольших размеров этот эффект будет просто равен нулю. В качестве объекта модельного описания мы выберем диэлектрик. Заметим, к слову, что в нашей задаче вид материала не слишком важен. Дело в том, что в случае взаимодействия длинноволновых гравитационных волн с массивным веществом основной эффект будет обязан их взаимодействию с длинноволновыми флуктуациями плотности, длина волны которых λ_0 удовлетворяет неравенству $d \ll \lambda_0 \ll R$, где d — линейный размер неоднородности структуры, а R — линейный размер тела. Поэтому в случае массивного объекта вполне очевидно, что взаимодействием гравитационных волн с магнонами или электронами проводимости (если таковые имеются) можно просто пренебречь.

Итак, чтобы определить вклад гравитации в коэффициент теплопроводности, следует вспомнить для начала, что при наличии нескольких механизмов с различной физической природой коэффициент теплопроводности κ в линейном приближении по градиенту температуры является аддитивной функцией и определяется суммой вкладов соответствующих механизмов. Для изучаемого нами диэлектрика такой вклад будет состоять лишь из двух составляющих, а потому коэффициент теплопроводности очень массивного тела можно представить в виде лишь двух слагаемых

$$\kappa = \kappa_{ph} + \kappa_g, \tag{1}$$

где κ_{ph} — коэффициент теплопроводности, обусловленный флуктуациями плотности (в модели Дебая это фононы), а дополнительный вклад κ_g — это коэффициент теплопроводности, обязанный учету гравитационных волн.

Если с температурным поведением κ_{ph} все ясно, а именно его зависимость определяется известным поведением [11]

$$\kappa_{ph} = \begin{cases} AT^3, & \text{если} \quad T \ll \overline{\theta}_D, \\ \frac{B}{T}, & \text{если} \quad T \gg \overline{\theta}_D, \end{cases} \tag{2}$$

где A и B — вполне определенные коэффициенты (за подробностями можно обратиться, например, к работе [12] или к классическим монографиям [11,13]), а $\overline{\theta}_D$ — некоторая средняя энергия тепловых колебаний (для кристаллического тела это просто температура Дебая), то с аддитивной добавкой κ_g не все так просто. Чтобы оценить коэффициент κ_g, мы воспользуемся простейшим газовым приближением и представим его в виде

$$\kappa_g = \frac{1}{3} C_g c^2 \tau_{g-ph}, \tag{3}$$

где c — скорость света, с которой распространяется гравитационная волна, C_g — теплоемкость гравитационных волн, приходящаяся на единицу объема тела, а τ_{g-ph} — время релаксации или иначе время передачи энергии между гравитационной волной и фононами, которое нам и следует найти. Самым эффективным механизмом взаимодействия фононов с гравитационной волной является процесс распада гравитационной волны на два фонона. Этот акт взаимодействия характеризуется двумя законами сохранения: законом сохранения энергии

$$\hbar\omega_g(k) = \hbar[\omega_{ph}(q_1) + \omega_g(q_2)] \tag{4}$$

и законом сохранения импульса

$$\mathbf{k} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \tag{5}$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор гравитационной волны, а $\mathbf{q}_{1,2}$ — волновые векторы фононов. Законы дисперсии в случае бозонов определяются как $\omega_g(k) = ck$, а $\omega_{ph}(q) = c_s q$, где c_s — средняя скорость звука в веществе.

Простейший алгебраический анализ законов сохранения (4)–(5) приводит к выводу, что волновой вектор виртуального фонона q_1 должен быть заключен в узком интервале значений, а именно

$$\frac{k}{2}\left(\frac{c}{c_s} - 1\right) \le q_1 \le \frac{k}{2}\left(\frac{c}{c_s} + 1\right). \tag{6}$$

Поскольку же скорость света значительно превышает скорость звука, то из (6) следует вывод, что $q_1 \approx q_2 \approx \frac{kc}{2c_s}$, т.е. энергия гравитационной волны примерно поровну распределяется между обоими виртуальными фононами.

Чтобы найти формулу для амплитуды статического гравитационного поля, надо вспомнить, что гравитационный потенциал для расстояний $r \ge R$ есть [14]

$$\varphi = \frac{r_g c^2}{2r}, \tag{7}$$

где r_g — гравитационный радиус, определяемый как $r_g = \frac{2GM}{c^2}$, здесь G — универсальная гравитационная постоянная, M — масса тела.

Переход от классического выражения (7) к квантовому представлению осуществляется довольно просто (см., например, [15]), и на языке вторичного квантования в случае квазистатического приближения его можно записать как

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r}, t) = i\sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi G\hbar c}{V_g k}}\,(\hat{c}_k^+ e^{-i\mathbf{kr}+i\omega_g t} + \hat{c}_k e^{-i\mathbf{kr}-i\omega_g t}), \tag{8}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $\hat{c}_{\mathbf{k}}(\hat{c}_{\mathbf{k}}^+)$ — оператор уничтожения (рождения) гравитационной волны, $V_g = \frac{4\pi}{3} r_g^3$ — объем квантования, соответствующий области гравитационного коллапса. Чтобы получить гамильтониан взаимодействия между флуктуациями плотности и гравитационными волнами, следует вспомнить некоторые постулаты дифференциальной геометрии. Действительно, в кривом пространстве интеграл по объему представляется в следующем инвариантном виде:

$$J = \int_V (\ldots)\sqrt{-g}\,dV, \tag{9}$$

где $-g$ — определитель метрического тензора. Знак „минус“ характеризует псевдоевклидовость пространства–времени. В квазистатическом гравитационном поле временная компонента метрического тензора g_{ik} (где индексы i, k пробегают четыре значения: 0, 1, 2, 3, причем индекс $i = k = 0$ соответствует временной координате) [14]:

$$g_{00} \approx 1 - \frac{2\varphi}{c^2}. \tag{10}$$

Поскольку $\sqrt{-g} = \sqrt{-g_0 - \delta g} \approx \sqrt{-g_0}\left(1 + \frac{\delta g}{2g_0}\right)$, где $\delta g \ll g_0$, а в плоском псевдоевклидовом пространстве–времени $g_0 = -1$, то получаем отсюда $\sqrt{-g} = 1 - \frac{\delta g}{2}$. В соответствии же с (10) имеем в результате, что $\sqrt{-g} \approx 1 + \frac{\varphi}{c^2}$.

Это означает, что при переходе к нерелятивистскому приближению взаимодействие чего-либо с почти статическим гравитационным полем должно описываться выражением $H_{int} = \frac{1}{c^2}\int_V (\ldots)\varphi dV$. В операторном виде отсюда будет следовать, что $\hat{H}_{int} = \frac{1}{c^2}\int_V (\ldots)\hat{\varphi} dV$. Таким образом, искомое взаимодействие гравитационных волн с флуктуациями плотности, роль которых на формальном языке фононов играет оператор тензора деформаций $\hat{u}_{\alpha\beta}$, где греческие индексы $\alpha, \beta = x, y, z$, должно определяться выражением

$$\hat{H}_{int} = \frac{\overline{\theta}_D}{Vc^2}\int_V \hat{u}_{\alpha\beta}^2 \hat{\varphi}\,dV, \tag{11}$$

где $\overline{\theta}_D = \frac{\pi\hbar c_s}{\overline{a}}$, а $\overline{a}$ — некоторое среднее расстояние между колеблющимися локализованными узлами структуры рассматриваемого вещества. Тензор деформаций связан с вектором смещения точек континуума u_α соотношением

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right). \tag{12}$$

Вторично-квантованное выражение для оператора вектора смещения можно представит как

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{q},\alpha} \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{\hbar}{2\rho V\omega_{ph}(q)}\right)^{\frac{1}{2}} (\hat{b}_{\mathbf{q}}^+ e^{-i\mathbf{qr}+i\omega_{ph}t} + \hat{b}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{qr}-i\omega_{ph}t}), \tag{13}$$

где ρ — плотность структуры, V — его объем, $\hat{b}_{\mathbf{q}}^+(\hat{b}_{\mathbf{q}})$ — операторы рождения (уничтожения) фонона с волновым вектором $\mathbf{q}$, $\mathbf{e}_\alpha$ — вектор поляризации звуковой волны с поляризацией α.

Если подставить теперь (13) в формулу (12), а ее, в свою очередь, в гамильтониан (11), то с учетом (9) мы находим искомое выражение для энергии взаимодействия флуктуаций плотности с квазистатическим гравитационным полем. Действительно,

$$\hat{H}_{int} = \frac{\pi\overline{\theta}_D\hbar}{2V\rho c_s c^2}\sqrt{\frac{2\pi Gc\hbar}{V_g}} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2} \frac{(\mathbf{e}_1\mathbf{q}_1)(\mathbf{e}_2\mathbf{q}_2)}{\sqrt{kq_1q_2}}$$
$$\times (\hat{b}_{\mathbf{q}_1}^+ - \hat{b}_{-\mathbf{q}_1})(\hat{b}_{\mathbf{q}_2}^+ - \hat{b}_{-\mathbf{q}_2})(\hat{c}_{\mathbf{k}}^+ + \hat{c}_{-\mathbf{k}})\Delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2), \tag{14}$$

где $\Delta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, определяемая правилами: $\Delta(x) = 1$, если $x = 0$, и $\Delta(x) = 0$ при всех $x \ne 0$.

Зная взаимодействие (14), очень легко оценить и время релаксации гравитационной волны τ_{g-ph}, необходимое нам для формулы (3). В соответствии с рецептом, подробно описанным в монографии [15], квазиклассический интеграл столкновений можно записать в виде

$$L\{f_k\} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q}_{1,2}} |\psi(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)|^2 \{(1 + f_{\mathbf{k}}) N_{\mathbf{q}_1} N_{\mathbf{q}_2}$$

$$- f_{\mathbf{k}}(1+N_{\mathbf{q}_1})(1+N_{\mathbf{q}_2})\}\delta(\omega_k - \omega_{sq_1} - \omega_{sq_2})\Delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2), \quad (15)$$

где $f_{\mathbf{k}}$ — функция распределения гравитационных волн, $N_{\mathbf{q}}$ — фононная функция распределения, дельта-функция автоматически учитывает закон сохранения энергии, а ступенчатая функция Хэвисайда $\Delta(x)$ — закон сохранения импульса. Амплитуда процесса, фигурирующая в интеграле столкновений (15) согласно (14), будет

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \frac{\pi \overline{\theta}_D \hbar (\mathbf{e}_1 \mathbf{q}_1)(\mathbf{e}_2 \mathbf{q}_2)}{V \rho c_s c^2} \sqrt{\frac{\pi G c \hbar}{2 k q_1 q_2 V_g}}. \quad (16)$$

Время релаксации определяем по стандартному правилу как

$$\frac{1}{\tau_k} = -\frac{\delta L\{f_{\mathbf{k}}\}}{\delta f_{\mathbf{k}}}\Bigg|_{\substack{f_{\mathbf{k}} = \overline{f}_k \\ N_{\mathbf{q}} = \overline{N}_q}}, \quad (17)$$

где равновесные функции распределения в случае статистики Бозе есть

$$\overline{f}_k = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_k}{T}} - 1}, \quad \overline{N}_q = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{sq}}{T}} - 1}. \quad (18)$$

Поэтому в соответствии с правилом (17) получаем из (15)

$$\frac{1}{\tau_k} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\mathbf{q}_{1,2}} |\psi(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)^2| \{1 + \overline{N}_{\mathbf{q}_2} + \overline{N}_{\mathbf{q}_1}\}$$

$$\times \delta(\omega_k - \omega_{sq_1} - \omega_{sq_2})\Delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \quad (19)$$

После простых по сути выкладок, учитывающих законы сохранения (4) и (5), с помощью (19) получаем самое эффективное время релаксации, обязанное распаду гравитационной волны на два фонона:

$$\frac{1}{\tau_{g-ph}(k)} \approx \frac{\pi^2}{32} \left(\frac{V}{V_g}\right) \frac{G\overline{\theta}_D^2}{\hbar c_s^5} \left(\frac{\hbar}{\rho c_s \overline{a}^4}\right)^2 (\overline{a}k)^2 kc(1 + 2\overline{N}_k), \quad (20)$$

где равновесная функция распределения фононов определена в (18), а $\overline{\theta}_D$ в (11). Постоянную Больцмана здесь и далее мы полагаем равной единице. Заметим также, что в соотношении (20) появляется большой множитель $\frac{V}{V_g}$, обязанный переходу от суммирования к интегрированию по области фазового пространства фононов. Эта процедура осуществляется с помощью правила $\sum\limits_{\mathbf{q}} f(q) = V \int\limits_V f(q) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$.

Чтобы найти среднее время релаксации гравитационной волны, нам следует выражение (20) усреднить по распределению Планка благодаря формуле $\overline{(\ldots)} = \frac{\int_0^\infty k^2 \overline{f}_k (\ldots) dk}{\int_0^\infty k^2 \overline{f}_k dk}$, где $\overline{f}_k$, определено в (18). В результате находим для среднего времени релаксации гравитационной волны

$$\frac{1}{\overline{\tau}_{g-ph}} \approx \frac{\pi^2}{32} \left(\frac{V}{V_g}\right) \frac{G\overline{\theta}_D^2 c}{\hbar c_s^5 \overline{a}} \left(\frac{\hbar}{\rho c_s \overline{a}^4}\right)^2 \left(\frac{\overline{a}T}{\hbar c}\right)^3 (1 + 2\overline{N}(u)), \quad (21)$$

где параметр $u = \frac{c_s}{c}$. Поскольку же $n \ll 1$, то $\overline{N}(u) \approx \frac{1}{u} = \frac{c}{c_s}$. Кроме того, в приближении сферического тела можно положить, что $V = \frac{4\pi}{3} R^3$, и тогда с учетом этих двух обстоятельств из (21) окончательно следует

$$\frac{1}{\overline{\tau}_{g-ph}} \approx \frac{\pi^2}{16} \frac{Gc^2\overline{\theta}_D^2}{\hbar c_s^6 \overline{a}} \left(\frac{\hbar}{\rho c_s \overline{a}^4}\right)^2 \left(\frac{\overline{a}T}{\hbar c_s}\right)^3 \left(\frac{R}{r_g}\right)^3. \quad (22)$$

Далее. Поскольку теплоемкость частиц с линейным по волновому вектору спектром (так же, как и в модели Дебая) пропорциональна T^3, то, согласно (22), интересующую нас зависимость (3) можно привести к виду

$$\kappa_g = \frac{1}{3} C_g c^2 \tau_{g-ph} \sim \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 c^2 \overline{\tau}_{g-ph} = \text{const} = D, \quad (23)$$

где новый коэффициент

$$D \approx \left(\frac{c_s}{c}\right)^3 \left(\frac{\rho \overline{a}^4 c_s}{\hbar}\right)^2 \frac{\hbar c_s^6}{G \overline{a}^2 \overline{\theta}_D^2} \left(\frac{r_g}{R}\right)^3. \quad (24)$$

Наконец, если вспомнить, что „температура Дебая" определяется как $\overline{\theta}_D = \frac{\pi \hbar c_s}{\overline{a}}$ то отсюда будет следовать довольно компактное выражение для коэффициента теплопроводности

$$D \approx \frac{1}{\pi^2} \frac{c_s^4}{G\hbar} \left(\frac{c_s}{c}\right)^3 \left(\frac{\rho \overline{a}^4 c_s}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{r_g}{R}\right)^3. \quad (25)$$

Суммируя выражения (2) и (24), находим искомый коэффициент теплопроводности массивного тела

$$\kappa = \begin{cases} AT^3, & \text{если} \quad T \ll \overline{\theta}_D, \\ \frac{B}{T}, & \text{если} \quad T \gg \overline{\theta}_D, \end{cases} + D. \quad (26)$$

Весьма уместно привести оценку среднего времени релаксации квазистатической гравитационной волны $\overline{\tau}_{g-ph}$. Согласно (22), если подставить в нее значения параметров $\hbar = 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{c}$; $G = 6.67 \cdot 10^{-8}\,\text{SGS}$; $\overline{\theta}_D = 100\,\text{K} = 1.38 \cdot 10^{-14}\,\text{J} \cdot \text{c}$, $c = 3 \cdot 10^{10}\,(\text{sm} \cdot \text{s}^{-1})$, $c_s = 10^5\,(\text{sm} \cdot \text{s}^{-1})$, $\rho = 5.5\,(\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$, $\overline{a} = 10^{-8}\,\text{cm}$, $R = 6.4 \cdot 10^8\,\text{cm}$, $r_g = 10\,\text{cm}$, $T = 300\,\text{K} = 3 \cdot 10^{-21}\,\text{J}$, получаем по порядку величины, что $\overline{\tau}_{g-ph} \approx 10^{-8}\,\text{s}$. Заметим, что это значение характеризует весьма быстрый процесс термализации гравитационной волны и указывает на необходимость учета в массивных телах механизмов взаимодействия, идущих с участием гравитационных волн. Если же подставить эти параметры в формулу (25), то по порядку величины легко находим значение гравитационного коэффициента теплопроводности $D \approx 10^{21}\,\mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{c}^{-1}$.

Подводя итог, следует обратить внимание на два момента.

1. В случае массивных тел при описании процесса теплопроводности очень важно учитывать взаимодействие длинноволновых гравитационных волн с длинноволновыми флуктуациями плотности;

2. Как видно из (26), с возрастанием температуры коэффициент теплопроводности выходит на насыщение и стремится к постоянной D, которая вовсе не зависит от температуры.

Список литературы

[1] *Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Каганов М.И.* // УФН. 1960. Т. 12. С. 3–44.
[2] *Зубарев Д.Н.* // УФН. 1960. Т. 71. С. 71–115.
[3] *Gladkov S.O.* // Sol. Stat. Commun. 1992. Vol. 82. N 2. P. 919–921. Там же. 1995. V. 94. N 9. P. 787–791.
[4] *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука. 1964. 487 с.
[5] *Миснар А.* Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций. М.: Мир, 1968. 345 с.
[6] *Гладков С.О.* // ФММ. 2002. Т. 94. Вып. 1. С. 30–39.
[7] *Gladkov S.O.* // Physica. B. 1990. Vol. 167B. P. 159–174.
[8] *Гладков С.О.* // Физика пористых структур. М.: Наука, 1997. 175 с.
[9] *Абрайтис Р.Й., Даргис А.К., Русяцкас А.А., Сакалаускас Э.Й.* // Огнеупоры и техническая керамика. 1999. № 8. С. 22–29.
[10] *Гришин Н.Н., Белогурова О.А., Иванова А.Г.* // Огнеупоры и техническая керамика (раздел „Научные исследования“). 2002. № 5. С. 45–51.
[11] *Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И.* Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.
[12] *Гладков С.О., Гладышев И.В.* // ФТТ. 2004. Т. 47. Вып. 7. С. 1143–1152.
[13] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. Т. 10. М.: Наука, 1979. 527 с.
[14] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. Т. 2. М.: Наука, 1973. 504 с.
[15] *Гладков С.О.* // Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.