

03  
**Поле двумерных вязких волн от поверхности осциллирующего цилиндра**

© В.А. Павлов, А.С. Павловский, Н.Г. Семёнова

Санкт-Петербургский государственный университет,  
 198504 Санкт-Петербург, Россия  
 e-mail: v.pavlov@spbu.ru, st019265@student.spbu.ru, n.g.semenova@spbu.ru

(Поступило в Редакцию 30 ноября 2015 г.)

Численно решена в двумерном приближении задача нахождения нестационарного нелинейного поля скорости вязкой несжимаемой жидкости, возбуждаемого поверхностью поступательно осциллирующего цилиндра. Показано, что осциллирующей твердотельной поверхностью генерируются двумерные вязкие волны и поток вытеснения. Определены траектории распространения вязких волн, их скорости распространения. Исследовано в первом приближении взаимодействие вязкой волны и потока вытеснения, в результате которого с удалением от поверхности может происходить не только ослабление поля скорости, но и его усиление.

**Введение**

Поля колебательных скоростей одномерных вязких волн изучены аналитически в линейном приближении [1] и численно путем решения полной системы уравнений [2,3].

Такие волны возбуждаются осциллирующими бесконечными плоскими или другой геометрии поверхностями так, что имеются только тангенциальные относительные скорости поверхности и вязкой жидкости. Однако и в натурном эксперименте [4], и при численном моделировании [5,6], при практическом использовании вязких волн [7–10] приходится иметь дело с осцилляциями тел конечных размеров. Поверхности таких тел возбуждают не только тангенциальную, но и нормальную компоненту скорости жидкости. Помимо этого колебания таких тел сопровождаются осциллирующими с той же частотой потоками перетекания жидкости. Было замечено, что эти потоки жидкости нарушают ожидаемое согласно линейному приближению поле вязких волн.

В настоящей работе численно изучается нелинейное нестационарное поле скорости вязкой несжимаемой жидкости вблизи колеблющейся цилиндрической поверхности твердого тела, возникающее в результате взаимодействия двумерных вязких волн и осциллирующего потока несжимаемой вязкой жидкости.

**Постановка задачи**

При колебаниях тел конечного размера в вязкой несжимаемой жидкости помимо вязкой волны, генерируемой тангенциально осциллирующей поверхностью, неизменно возникает ненулевой осциллирующий градиент давления и обусловленный им осциллирующий в противоположном направлении поток перетекания той же жидкости. Поступательно осциллирующая поверхность тела вытесняет вязкую жидкость, генерируя поток перетекания. Поверхность в силу выполнения на

ней условия прилипания жидкости генерирует вязкие волны. Они обусловлены тангенциально колеблющейся поверхностью и обращением в нуль вектора скорости потока перетекания вязкой несжимаемой жидкости [2]. В результате образуется совокупное поле колебательной скорости двумерных вязких волн и осциллирующего потока перетекания.

Рассмотрим движение вязкой жидкости вблизи поверхности поступательно осциллирующего цилиндра (рис. 1) в двумерном приближении вдали от других границ. Будем интересоваться областью жидкости, характерный размер которой много меньше пространственного масштаба продольной звуковой волны. Внутри такой области жидкость можно считать несжимаемой [1]. Движение несжимаемой вязкой жидкости опишем системой, состоящей из нестационарного нелинейного уравнения движения и уравнения неразрывности

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{V}, \\ \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

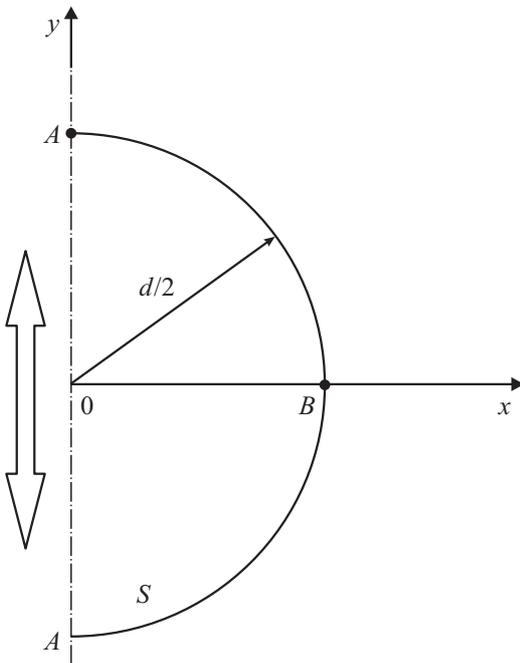
Здесь  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, t)$  — вектор скорости жидкости,  $\nabla P(x, y, t)$  — градиент давления,  $\nu = \eta/\rho_0$  — кинематическая,  $\eta$  — динамическая вязкости,  $\rho_0$  — невозмущенная плотность жидкости.

Пусть до момента времени  $t = 0$  твердое тело и среда неподвижны, а при  $t > 0$  тело начинает осциллировать. На поверхности цилиндра  $S$  зададим закон изменения скорости жидкости:

$$\mathbf{V}|_S = \Theta(t) V_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_y. \quad (2)$$

Здесь  $\Theta(t \leq 0) = 0$ ,  $\Theta(t > 0) = 1$  — функция включения,  $V_0$  — амплитуда колебательной скорости поверхности,  $\omega = 2\pi f$  — циклическая частота,  $\mathbf{e}_y$  — единичный орт в направлении оси  $y$ . Граничное условие на бесконечности имеет вид

$$\mathbf{V}|_\infty = 0. \quad (3)$$



**Рис. 1.** Геометрия задачи. Левое полупространство симметрично относительно оси колебаний  $y$ , проходящей через центр тела. Обозначения:  $A$  — полюса,  $B$  — экватор.

Система отсчета неинерциальная и связана с геометрическим центром тела. В качестве осциллирующих поверхностей  $S$  выбрали цилиндры круглого сечения с безразмерными диаметрами  $d/\delta$  в диапазоне 0.2–12. Здесь

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}. \quad (4)$$

Выберем величины  $\rho_0$ ,  $\eta$ ,  $\omega$  в качестве определяющих параметров с независимыми размерностями. Масштабом времени выберем период колебаний  $T = 2\pi/\omega$  поверхности тела (2). Запишем задачу (1)–(3) в безразмерном виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tau} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{2} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}, \\ \operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{\mathbf{v}} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}|_{\infty} = 0, \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}|_{\tilde{S}} = \Theta(\tau) \tilde{v}_0 \sin(\tau) \mathbf{e}_y. \quad (7)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{V}/\omega\delta$  — безразмерный вектор скорости жидкости,  $\tilde{v}_0$  — безразмерная амплитуда скорости,  $\tilde{p}$  — безразмерное давление,  $\tau = \omega t = 2\pi t/T$  — безразмерное время,  $\tilde{\nabla} = \delta \cdot \nabla$ ,  $\tilde{\Delta} = \delta^2 \cdot \Delta$ ,  $\operatorname{div}_{\tilde{\mathbf{r}}} = \delta \cdot \operatorname{div}$ ,  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\delta$  — безразмерный радиус-вектор,  $\tilde{S}$  — поверхность источника в безразмерных координатах  $\tilde{x} = x/\delta$ ,  $\tilde{y} = y/\delta$ . Решение задачи (1)–(3) выражается через безразмерные функции

$$\mathbf{V} = \omega\delta \cdot \tilde{\mathbf{v}} \left( \tilde{\mathbf{r}}, \tau, \frac{d}{\delta}, \frac{V_0}{\omega\delta} \right), \quad (8)$$

$$P = \omega^2 \delta^2 \rho_0 \cdot \tilde{p} \left( \tilde{\mathbf{r}}, \tau, \frac{d}{\delta}, \frac{V_0}{\omega\delta} \right). \quad (9)$$

Одним из аргументов (8), (9) является аналог числа Маха для вязких волн

$$\frac{V_0}{\omega\delta} = \frac{V_0}{c_0} = \frac{\omega A}{\omega\delta} = \frac{A}{\delta}, \quad (10)$$

где  $c_0 = \omega\delta$  — скорость распространения одномерной плоской вязкой волны [1],  $A$  — амплитуда колебательного смещения поверхности тела.

Итак, поля скорости и давления при двумерном поступательном колебательном движении цилиндров, имеющих различные размеры и режимы колебаний, подобны при равенстве каждого из параметров  $A/\delta$ ,  $d/\delta$ .

Численно задача (1)–(3) решалась методом конечных элементов в Comsol Multiphysics 4.3. Размер ячейки пространственной сетки в области  $|\mathbf{r}| < 2\pi\delta$  не превышал 0.01 $\delta$ . Вне этой области он не превышает 1 $\delta$ . Шаг по времени выбирался менее 0.01 $T$ . Граничному условию (3) удовлетворяли, выбирая размер сосуда так, чтобы поля скорости и давления не зависели от размера сосуда [6]. В дальнейшем будут обсуждаться только безразмерные величины (5)–(9).

Для численных моделей использовали следующие независимые характеристики: частоты  $f = 25$  и 50 Hz, амплитуды скоростей поверхностей тел  $V_0$  от 0.01 до 10 m/s,  $\eta = 1.5 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\rho_0 = 1260 \text{ kg/m}^3$ .

## Нахождение траекторий распространения вязких волн

Для нахождения траекторий распространения вязких волн удобно ввести нестационарные криволинейные безразмерные координаты  $\xi_{\parallel}$  вдоль и  $\xi_{\perp}$  поперек мгновенных линий тока жидкости. Единичный вектор в направлении мгновенных линий тока имеет вид

$$\mathbf{e}_{\parallel} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{v}}|} (\tilde{v}_x \mathbf{e}_x + \tilde{v}_y \mathbf{e}_y) \quad (11)$$

и единичный вектор, ортогональный к линиям тока,

$$\mathbf{e}_{\perp} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{v}}|} (-\tilde{v}_y \mathbf{e}_x + \tilde{v}_x \mathbf{e}_y). \quad (12)$$

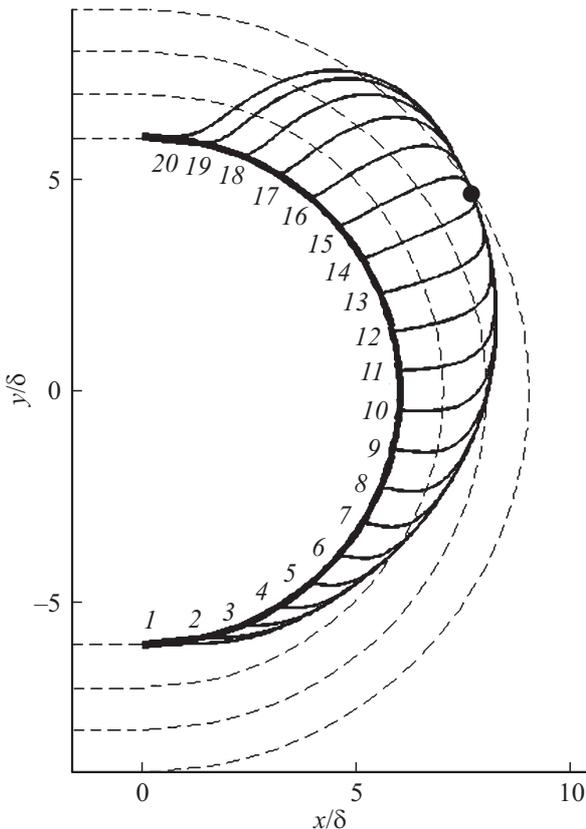
На рис. 2 изображены линии  $\xi_{\perp}$ , в каждой точке которых единичный вектор  $\mathbf{e}_{\perp}$  направлен по касательной в фиксированный момент времени. Они исходят из 20 точек поверхности цилиндра. За начальные точки отсчета длин  $\xi_{\perp}$  приняты точки выхода их из поверхности. Численный расчет показал, что линии  $\xi_{\perp}$  пересекаются в единственной, согласно геометрической терминологии [11], особой точке. В ней касательный единичный вектор (12) к кривой терпит разрыв в связи с обращением в нуль знаменателей в формулах (11), (12). Физической интерпретацией наличия этой особой точки может являться самофокусировка пучка вязких волн [12].

Область, заполненная линиями на рис. 2, имеет известный экспериментаторам смысл толщины вытеснения [13] области, занятой вязкими волнами.

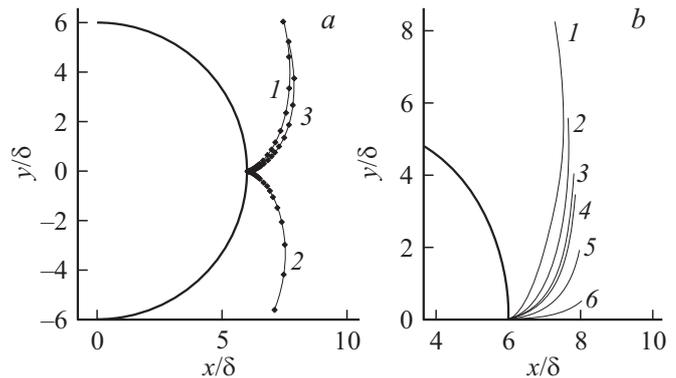
Площадь и ширина этой области увеличиваются в течение полупериода колебаний. После чего в следующий полупериод рост площади и ширины этой области воспроизводится заново, но в противоположную сторону. Для установления поля скорости внутри этой области достаточно промежутка времени  $1.5T$  (рис. 3, *a*).

Максимальная площадь этой области увеличивается с ростом относительного размера  $d/\delta$  и уменьшается с ростом относительной амплитуды поверхности цилиндра  $A/\delta$  (рис. 3, *b*). За полпериода колебаний особая точка смещается от поверхности  $S$  на расстояние порядка  $2\delta$  поперек оси колебаний и на расстояние, зависящее от  $A/\delta$ , вдоль оси колебаний в направлении движения тела в текущий полупериод (рис. 3, *b*). Смещение точки вперед по ходу движения обусловлено тем, что вторую и четвертую четверти периода тело движется замедленно.

Численный эксперимент показал, что радиальное и угловое положения особой точки зависят от времени по нелинейным законам, которые при должном



**Рис. 2.** Мгновенное положение линий  $\xi_{\perp}$ , вышедших из 20 точек колеблющейся поверхности (линии, к которым вектор (12) касателен).  $A/\delta = 1.6$ ,  $d/\delta = 12$ ,  $t/T = n + 0.5 - 1/40$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Штриховые линии показывают расстояние до поверхности. Черным кружком показано положение геометрически особой точки. Продолжение линий за особую точку на рисунке не приводится.



**Рис. 3.** Траектории перемещения особых точек. *a* — траектории для трех первых полупериодов осцилляций поверхности цилиндра,  $A/\delta = 1.6$ , кружками обозначено положение точки в последовательные моменты времени; *b* — зависимость траекторий от  $A/\delta$ . 1 —  $A/\delta = 5$ , 2 — 1.6, 3 — 1, 4 — 0.8, 5 — 0.4, 6 — 0.1.  $n < t/T \leq n + 0.5$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ,  $n > 0$ .  $d/\delta = 12$ .

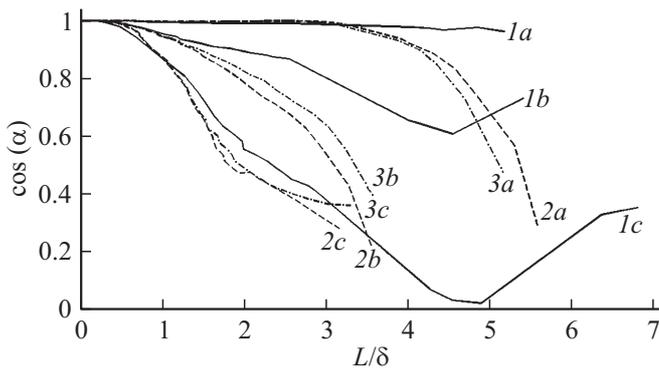
масштабировании имеют практически одинаковый вид. По-видимому, и радиальное, и угловое ускорения особой точки связаны с рассмотрением явления в неинерциальной системе отсчета, связанной с центром тела, совершающего колебания. С другой стороны, в связи с увеличением относительной скорости потока жидкости положение особой точки меняется (рис. 3, *b*). С увеличением безразмерной амплитуды  $A/\delta$  колебаний поверхности растет смещение особой точки от экватора. В предельном случае, когда отсутствует поток перетекания (например, при распространении плоской вязкой волны), угловое смещение и ускорение отсутствуют.

Скорость жидкости в особой точке обращается в нуль. Она находится на линии, разделяющей части жидкости, движущиеся в противоположных направлениях. Таким образом, особая точка является центром мгновенного вихря. За один период колебаний поверхности цилиндра возникают два таких вихря противоположных направлений, причем каждые полпериода один из них отрывается от поверхности и проникает в жидкость, увеличивая энергию и импульс среды. Отрыв вихря происходит, когда цилиндр изменяет направление движения на противоположное в моменты времени  $nT$  и  $nT + T/2$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Для вязких волн при  $x/\delta < 1.5$ , за исключением окрестностей полюсов цилиндра, имеет место практически полное совпадение направлений векторов  $\mathbf{e}_{\perp}$  и  $\mathbf{e}_x$  почти во все моменты времени, за исключением моментов, близких к  $nT$  и  $nT + T/2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , когда знаменатель в формуле (12) стремится к нулю.

Для нахождения компонент траекторий и скоростей распространения точки экстремума двумерных вязких поперечных волн спроектируем решение (8) на орты (11), (12). Тогда получим

$$\tilde{\mathbf{v}} = v_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel} + v_{\perp} \mathbf{e}_{\perp} = v_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (13)$$



**Рис. 4.** Зависимость косинуса угла между касательными к линиям  $\xi_{\perp}$  и касательными к траекториям распространения от безразмерного расстояния вдоль траектории распространения  $L/\delta$ . 1 —  $A/\delta = 0.1$ , 2 —  $A/\delta = 1$ , 3 —  $A/\delta = 1.6$ . *a* — линия 10 рис. 2, *b* — линия 12, *c* — линия 14.

Величина  $v_{\parallel} = v_{\parallel}(\xi_{\parallel}, \xi_{\perp}, \tau, d/\delta, A/\delta)$  определяет все поле скорости. Величина скорости жидкости поперек линий тока  $v_{\perp} = 0$ .

Оценим скорость распространения вязкой волны как скорость распространения экстремума колебательной скорости жидкости

$$\frac{\partial v_{\parallel}}{\partial \xi_{\perp}} = 0. \quad (14)$$

Вязкая волна остается двумерной в силу криволинейности линий  $\xi_{\perp}(x, y, \tau)$  и траекторий распространения точки экстремума (14).

Отметим, что в линейном приближении экстремум (14) колебательной скорости жидкости в одномерной плоской вязкой волне отделяется от поверхности тела бесконечной протяженности, начиная перемещение вглубь жидкости в моменты времени  $nT/2 + T/4 + T/8$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В эти моменты времени касательное напряжение на осциллирующей поверхности тела равно нулю, а величины экстремумов на поверхности ( $\xi_{\perp} = 0$ ) в  $\sqrt{2}$  меньше амплитуды  $\tilde{v}_0$  скорости поверхности тела, так как фаза волны  $\tau - \xi_{\perp} = \pi/4$ . Величины колебательной скорости плоской вязкой волны убывают по закону

$$\tilde{v}_{extr} = \frac{\tilde{v}_0}{\sqrt{2}} \exp(-\xi_{\perp}), \quad (15)$$

где  $\tilde{v}_0 \exp(-\xi_{\perp})$  — огибающая плоской вязкой волны [1].

Сравнивая линии  $\xi_{\perp}$  с траекториями распространения экстремума (14), приходим к выводу, что на расстояниях свыше  $1.5\delta$  (при  $A/\delta < 2$ ) от колеблющейся поверхности цилиндра, а также вблизи полюсов цилиндра задача становится нелинейной. Об этом свидетельствует отличие от единицы в указанной области косинуса угла между касательными к линиям  $\xi_{\perp}$  и касательными к траекториям распространения (рис. 4). Параметром вдоль траектории распространения выберем  $L/\delta$ . Отличие косинуса угла от единицы свидетельствует о том, что угол между направлением распространения и вектором

колебательной скорости жидкости острый, а не прямой, как в линейном случае. С ростом  $A/\delta > 2$  область, в которой задачу можно считать приближенно линейной, а вязкую волну приближенно поперечной, уменьшается, смещаясь к середине осциллирующей поверхности.

## Нахождение скорости распространения вязких волн

Методика определения скорости распространения вязкой волны сводилась к следующим шагам.

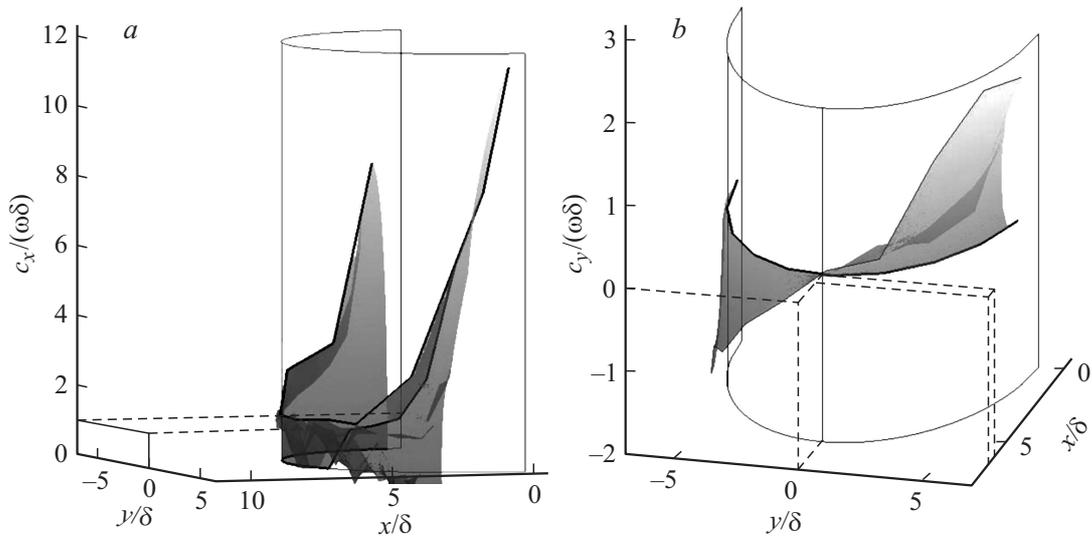
1. Определить зависимости  $\xi_{\perp \max}(\tau)$  для координат точки экстремума колебательной скорости жидкости (14) вдоль линий  $\xi_{\perp}$  каждой из вязких волн.
2. Сгладить кривые, произведя интерполяцию  $\xi_{\perp \max}(\tau)$  кубическими полиномами Эрмита.
3. Рассчитать скорость распространения методом конечных разностей  $c = \Delta \xi_{\perp \max}(\tau) / \Delta \tau$ .
4. Результатом являются траектории распространения и величины компонент скорости распространения  $c_{\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y})$  и  $c_{\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

Погрешность определения величины скорости распространения в окрестности экватора составляет 2% и увеличивается до  $\sim 10\%$  при приближении к полюсам. Это свидетельствует о выходе за границы применимости (11)–(14) в связи с тем, что вязкая волна перестает быть поперечной. Вне этих границ результаты носят качественный характер.

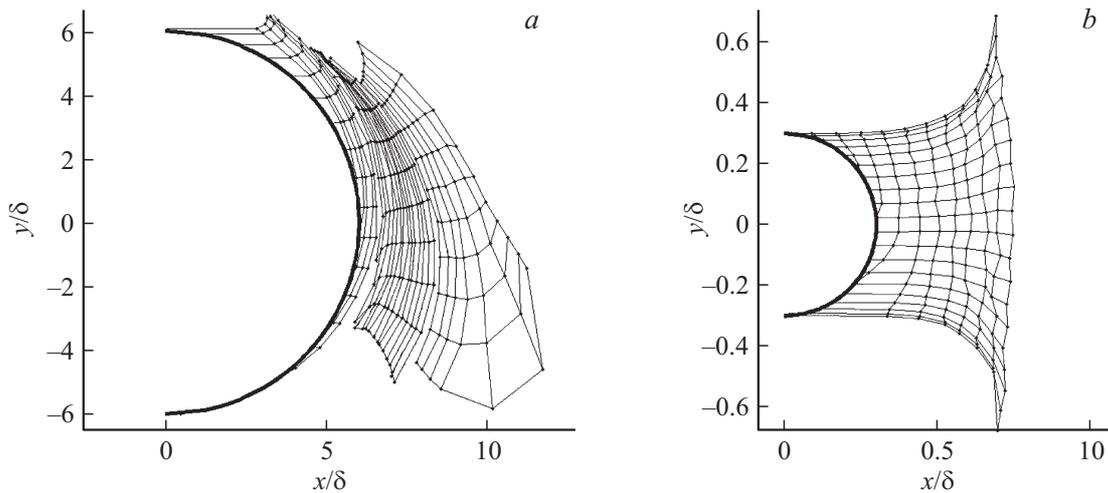
Оказалось, что скорость распространения точки экстремума (14) вязкой волны в окрестности экватора поступательно осциллирующего цилиндра равна  $c_0$  и зависит от частоты колебаний как  $\sqrt{\omega}$ .

Скорость распространения точки экстремума (14) вблизи поверхности поступательно осциллирующего цилиндра (рис. 5) больше у переднего по ходу движения полюса в текущий полупериод колебаний и меньше у противоположного торца. Скорость распространения уменьшается по мере удаления от поверхности цилиндра в обоих направлениях, стремясь к  $c_0$ . В окрестности точки поверхности тела с максимальной амплитудой тангенциального смещения ( $x/\delta = 6, y/\delta = 0$  штрихами выделена плоскость на рис. 5, *a*)  $x$ -компонента скорости распространения вязкой волны также стремится к  $c_0$ . Причем  $y$ -компонента скорости распространения в этой окрестности стремится к нулю (рис. 5, *b*). Вне окрестности рассмотренной точки (например, в окрестности точки  $x/\delta = 3\sqrt{2}, y/\delta = 3\sqrt{2}$ )  $y$ -компонента скорости распространения практически равна по модулю и противоположна по направлению скорости распространения в окрестности симметричной точки  $x/\delta = 3\sqrt{2}, y/\delta = -3\sqrt{2}$ .

Такое явление в литературе [14] называют геометрической дисперсией. Оно связано с кривизной и расходимостью волновых фронтов. В анализируемой численной модели также замечено искажение волновых фронтов (рис. 6). В работах [2,3] нами показано, что похожая



**Рис. 5.** Пространственные распределения  $x$ -,  $y$ -компонент скорости распространения точки экстремума (14) вязкой волны от осциллирующего цилиндра.  $a$  —  $x$ -компонента;  $b$  —  $y$ -компонента.  $A/\delta = 1.6$ ,  $d/\delta = 12$ . Штриховые линии приведены для удобства считывания численных значений.



**Рис. 6.** Волновые фронты и траектории распространения вязкой волны от поверхности осциллирующих цилиндров различных диаметров.  $a$  —  $d/\delta = 12$ ,  $b$  —  $d/\delta = 0.6$ .  $A/\delta = 1.6$ . Фронты построены с интервалом времени  $T/40$ .  $n < t/T \leq n + 0.5$ .  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

дисперсия скорости распространения возникает также вблизи поверхности цилиндра, совершающего крутильные колебания вокруг своей оси. На расстоянии, меньшем длины вязкой волны, она обусловлена изменением пространственного периода функции Ханкеля, входящей в выражение колебательной скорости. В этом смысле она аналогична пространственной дисперсии недиссипативных волновых процессов.

Видно (рис. 6,  $a$ ), что по мере распространения волновые фронты вязкой волны уплощаются. Это характерно для распространения волн любой природы от малых по сравнению с длиной волны  $\lambda$  источников и следует из линейных уравнений. Однако фронт волны любой геометрии становится плоским лишь на очень больших

от источника расстояниях  $|\mathbf{r}| \gg \lambda$ . Для вязких сильно поглощающихся волн уплотнение проявилось на значительно меньших расстояниях, на которых колебательная скорость жидкости в вязкой волне стала много меньше  $V_0$ .

В окрестности полюсов траектории распространения вязкой волны изгибаются в направлении оси колебаний, о чем свидетельствуют отрицательные значения  $x$ -компоненты скорости распространения, которые на рис. 5,  $a$  не приводятся вследствие большой погрешности определения. Загиб линий лучше заметен при колебаниях цилиндра в 20 раз меньшего радиуса при прочих равных условиях (рис. 6,  $b$ ), так как проявляется на меньших расстояниях. С увеличением  $A/\delta$  кривизна волновых фронтов в окрестности торцов увеличивается.

## Ослабление вязкой волны

Одномерная плоская вязкая волна ослабляется по экспоненциальному закону [1] для колебательной скорости плоской вязкой волны

$$\mathbf{V}_w = V_{0w} \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \mathbf{e}_y. \quad (16)$$

Переписанное в безразмерных обозначениях оно имеет вид

$$\tilde{\mathbf{v}}_w = \tilde{v}_{0w} \exp(-\xi_{\perp}) \sin(\tau - \xi_{\perp}) \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (17)$$

Направления векторов  $\mathbf{e}_{\parallel}$  и  $\mathbf{e}_y$  совпадают. Скорость распространения плоской вязкой волны  $c_0$  является выбранным выше масштабом скоростей и равна 1 в безразмерном виде (10).

Поле скорости вязкой несжимаемой жидкости вблизи осциллирующих тел образовано совокупностью совместно действующих явлений: вязкой волной, генерируемой осциллирующей поверхностью твердого тела, и осциллирующим потоком перетекания вязкой жидкости.

Определенное в [1,2] выражение для колебательной скорости жидкости в однородном осциллирующем потоке вязкой жидкости в свободном полупространстве в безразмерных обозначениях

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \tilde{v}_{0p} (1 - \exp(-\xi_{\perp})) \sin(\tau - \xi_{\perp}) \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (18)$$

Вязкие волны (17) и (18) имеют один и тот же источник — осциллирующую поверхность тела с тангенциальной скоростью относительно вязкой жидкости. Поэтому вблизи поверхности тела вклады в совокупную колебательную скорость жидкости от обеих вязких волн (17) и (18) одинаковые. Приблизительно этот факт позволяет выделить из решения (13) общую волновую составляющую

$$\psi \approx \psi(\tau - c \xi_{\perp}), \quad (19)$$

где  $c = c(\xi_{\parallel}, \xi_{\perp}, d/\delta, A/\delta)$  — безразмерная скорость распространения вязкой волны.

Тогда амплитуды вязких волн, возбудителями которых являются движущаяся поверхность тела и противоположно направленный поток вдоль этой поверхности, можно приближенно представить в виде суперпозиции

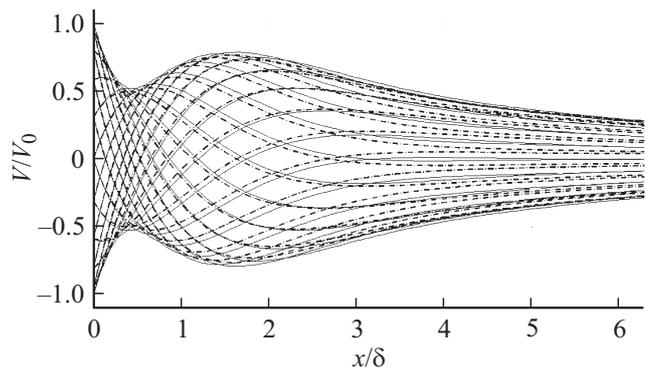
$$v_{\parallel} \approx (\varphi_+ - \chi_-) \psi, \quad (20)$$

где индексы  $+$ ,  $-$  выражают соответственно убывание и возрастание амплитуд функций с ростом  $\xi_{\perp}$  в одинаковый момент времени.

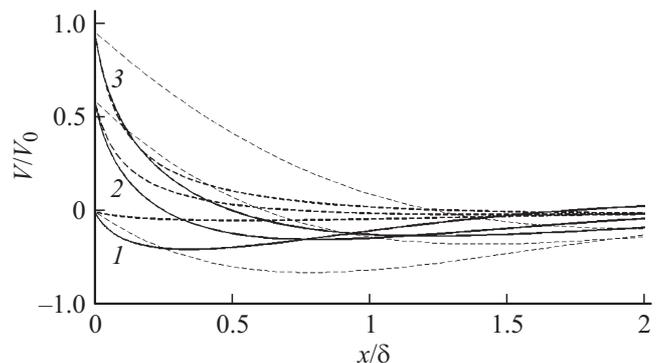
Обсудим справедливость приближенных представлений (19) и (20), рассмотрев следующий частный случай. Пусть одновременно осциллируют в противоположных направлениях поверхность тела и поток вязкой жидкости. Пусть скорость жидкости в потоке экспоненциально убывает поперек направления вектора скорости жидкости. Тогда совокупное поле скорости выражается формулой

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{v}}_p - \tilde{\mathbf{v}}_w) \exp(-\alpha \xi_{\perp}) &= (1 - 2 \exp(-\xi_{\perp})) \\ &\times \exp(-\alpha \xi_{\perp}) \sin(\tau - \xi_{\perp}) \mathbf{e}_{\parallel}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\alpha > 0$ . Как показывают численные расчеты, (21) справедливо даже при не малых  $A/\delta \sim 2$  и не малых



**Рис. 7.** Сравнение зависимостей колебательной скорости жидкости вязкой волны (от точки 10 рис. 2) от расстояния, полученных по численному решению нелинейной задачи (1)–(3) (штрихпунктирные линии) и по модельной аппроксимации (21) (сплошные линии).  $\alpha = 5$ ,  $A/\delta = 1.6$ ,  $d/\delta = 12$ . Параметром кривых является момент времени в течение одного интервала времени  $T$ .



**Рис. 8.** Зависимость колебательной скорости жидкости от расстояния в первую четверть периода в установившемся режиме колебаний. 1 — колебательная скорость вязкой волны и потока при осцилляциях малого цилиндрического источника с относительным диаметром  $d/\delta = 0.3$ , 2 — штриховые линии — вещественная часть функции Ханкеля, тонкие штриховые линии — зависимость для одномерной вязкой волны (17). Параметром семейств кривых является время: 1 —  $nT$  от начала движения, 2 —  $nT + T/8$ , 3 —  $nT + T/4$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

$d/\delta \sim 6$ . Таким образом, можно смоделировать функцию скорости жидкости по экваториальному сечению осциллирующего цилиндра (рис. 7). Отличие скоростей, полученных по (21), от численного решения (1)–(3) составило не более 10%.

На расстоянии порядка  $1.5\delta$  от поверхности тела имеет место не ослабление, а усиление колебательной скорости жидкости при распространении вязкой волны (рис. 7). Этот эффект особенно проявляется в ситуации, когда колебательная скорость жидкости в потоке сравнима с колебательной скоростью поверхности тела. Усиление при значениях параметров  $A/\delta = 1.6$ ,  $d/\delta = 12$  происходит на расстояниях порядка  $1.5\delta$  от поверхности

тела. С увеличением относительной величины  $A/\delta$  это расстояние уменьшается.

На зависимость колебательной скорости жидкости от расстояния от осциллирующего источника влияет и параметр  $d/\delta$ , что видно из сравнения рис. 7 и 8. Убывание колебательной скорости вязкой волны от цилиндра малого радиуса сильнее, чем от большого  $d/\delta > 1$ , и приближается к закону убывания цилиндрической волны, который имеет вид вещественной части функции Ханкеля [4] (семейства 2 и 3, жирные штриховые линии). С другой стороны, скорость потока вытеснения тем меньше, чем меньше  $d/\delta$ . Скорость потока вытеснения, складываясь с колебательной скоростью вязкой волны, при  $d/\delta \geq 1$  усиливает поле скорости жидкости, а при  $d/\delta < 1$  не усиливает его. При таком взаимодействии наблюдается существенное искажение поля скорости цилиндрической вязкой волны. Как показали расчеты, уже на расстоянии  $0.1\delta$  колебательная скорость жидкости от источника радиусом  $0.2\delta$  на 12% больше цилиндрической. На расстоянии  $2.4\delta$  она становится равной скорости потока. Величина последнего на порядок больше, чем в цилиндрической волне.

Во вторую четверть периода происходит отделение экстремума колебательной скорости жидкости от поверхности, что видно из рис. 7. Расчет показал, что величина максимума колебательной скорости жидкости в 2 раза меньше величины максимума скорости по (15), а отделение экстремума от поверхности происходит в более поздние моменты времени  $nT + T/2 - T/40$ .

## Заключение

Выполнено численное моделирование задачи о нахождении поля скоростей и давлений в вязкой несжимаемой жидкости при поступательных осцилляциях цилиндра для волновых размеров источника  $d/\delta = 0.2-12$  и амплитуды колебаний  $A/\delta = 0.1-5$ .

Показано, что при поступательных осцилляциях цилиндра в вязкой несжимаемой жидкости генерируются вязкие волны и поток перетекания.

Найдены траектории распространения двумерных вязких волн от осциллирующих цилиндров конечных поперечных размеров.

Найдено мгновенное положение точки пересечения траекторий распространения вязких волн (центра мгновенного вихря) и зависимость ее положения от  $A/\delta$ ,  $d/\delta$  и времени.

Отмечено формирование нестационарной и нелинейной областей вытеснения. Площадь области увеличивается в течение полупериода колебаний и уменьшается с ростом  $A/\delta$ .

Определена скорость распространения двумерных вязких волн. Исследованы ее временная и пространственная зависимости. Скорость распространения уменьшается по мере удаления от поверхности цилиндра, стремясь к скорости плоской волны, и зависит от геометрических параметров задачи  $d/\delta$  и  $A/\delta$ .

Показано, что в результате взаимодействия вязких волн и осциллирующего потока зависимость совокупной скорости жидкости от расстояния имеет сложный вид. Возможно не только ослабление скорости жидкости в двумерной вязкой волне, но и ее усиление потоком.

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [2] Павловский А.С., Семёнова Н.Г. // ЖТФ. 2015. Т. 85. № 3. С. 28–33.
- [3] Павловский А.С., Семёнова Н.Г. // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2014. № 5. Р. 145–307.
- [4] Грачёв Б.Е., Козырев Л.Е., Семёнова Н.Г. // Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 5. С. 672–675.
- [5] Павловский А.С., Семёнова Н.Г. // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. № 8. С. 14–22.
- [6] Павловский А.С., Семёнова Н.Г. // Сб. трудов сессии Научного совета РАН по акустике и XXV сессии Российского акустического общества. Таганрог: М.: ГЕОС, 2012. С. 173.
- [7] Красавина М.А., Пугачев С.И., Семёнова Н.Г. Ультразвуковая металлизация электрофизической керамики. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2013.
- [8] Павловский А.С., Семёнова Н.Г. // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та, 2014. № 5.
- [9] Пугачев С.И., Рытов Е.Ю., Семёнова Н.Г., Павловский А.С. // Морские интеллектуальные технологии. 2014. Т. 2. № 24. С. 65–70.
- [10] Данилова Е.Б., Семенова Н.Г. // Акуст. журн. 1977. Т. 23. № 5. С. 724.
- [11] Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: Издательство физико-математической литературы, 2002.
- [12] Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
- [13] Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
- [14] Гаврилов А.М. // Техническая акустика <<http://ejta.org>>. 2008. Т. 8. № 8.