03

О самоорганизации при переходе от ламинарного течения к турбулентному для неэкстенсивных систем

© Р.Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН
420111 Казань, Россия
e-mail: zaripov@mail.knc.ru

(Поступило в Редакцию 27 марта 2014 г. В окончательной редакции 1 октября 2015 г.)

Рассмотрена эволюция параметрических q-энтропии и q-информации различия к равновесному состоянию при спонтанных переходах и при переходах от ламинарного течения к турбулентному для неэкстенсивных самоорганизующихся систем. Доказываются S- и I-теоремы об изменениях мер при условии постоянства средних энергий.

Введение

В настоящее время в неэкстенсивной статистической механике и термодинамике достигнут значительный прогресс, обусловленный новыми приложениями в исследованиях аномальных физических процессов. Результаты для равновесных и неравновесных систем изложены в [1–3], где обсуждаются различные подходы, идеи и методы исследований в классическом и квантовом случаях. Изучены негауссовые и негиббсовые распределения на основе однопараметрической q-энтропии Хаврда–Чарват–Дароши

$$S = S(p) = \int s\,p^q dX = \frac{k}{q-1}\Big(1 - \int p^q dX\Big) \qquad (1)$$

и q-информация различия Ратье–Каннаппана

$$I = I(p_1 : p_2) = \int i\,p_1^q dX$$

$$= -[S(p_1) - S(p_2)] + \int (p_1^q - p_2^q) s(p_2) dX$$

$$= \frac{k}{1-q}\Big(1 - \int p_1^q p_2^{1-q} dX\Big) \ge 0, \qquad (2)$$

$$\int p dX = \int p_1 dX = \int p_2 dX = 1,$$

$$0 \le p < \infty, \quad 0 \le p_1 < \infty, \quad 0 \le p_2 < \infty$$

для классических систем. Здесь k — постоянная Больцмана и $q > 0$ есть действительное число. Равенство в (2) достигается тогда и только тогда, когда $p_1 = p_2$. Математически строгий вывод мер (1) и (2) с дискретным распределением при аксиоматическом подходе впервые приводится в работах [4–6] по статистической теории информации после фундаментальной работы А. Реньи [7], где обосновывается новая однопараметрическая q-энтропия

$$S = S(p) = \frac{k}{1-q} \ln\Big(\int p^q dX\Big). \qquad (3)$$

В случае фрактальных систем параметр q в (3) связан с фрактальной размерностью [8]. Для рассматриваемых систем в (1) и (2) параметр q характеризует степень неэкстенсивности, проявляющейся в законе композиции энтропий с квадратичной нелинейностью

$$S = S_1 + S_2 + k^{-1}(1-q)S_1S_2,$$

$$I = I_1 + I_2 - k^{-1}(1-q)I_1I_2 \qquad (4)$$

для двух независимых систем с $p(X_1, X_2) = p(X_1)p(X_2)$, $p_1(X_1, X_2) = p_1(X_1)p_1(X_2)$, $p_2(X_1, X_2) = p_2(X_1)p_2(X_2)$ и $dX = dX_1dX_2$. Функционалы (1) и (2) являются средними значениями микроскопической энтропии $s(p) = k(1-q)^{-1}(1 - p^{1-q})$ и информации различия $i = i(p_1 : p_2) = -[s(p_1) - s(p_2)]$, которые при $q = 1$ имеют известные значения $s(p) = -k \ln p$ и $i(p_1 : p_2) = k \ln(p_1/p_2)$. Усреднение в (1) и (2) проводится ненормированным распределением p_1^q. Справедливость такого единственного правильного усреднения [4,5] вытекает также из условия термодинамического равновесия неэкстенсивных систем [9]. В пределе $q \to 1$ из (1)–(3) вытекают энтропия Больцмана–Гиббса $S(p) = -k \int p \ln p dX$ и информация различия Кульбака $I(p_1 : p_2) = k \int p_1 \ln(p_1/p_2) dX$ [10] для аддитивных статистических систем.

Энтропия и информация различия (или относительная информация) при переходе между состояниями с p_1 и p_2 определяют соответственно статистические меры разупорядоченности и упорядоченности микросостояний системы, что является фундаментом для исследований процессов самораспада при спонтанных и самоорганизации при вынужденных переходах между стационарными состояниями, характеризующимися набором управляющих параметров. В работе [11] теоретико-информационным подходом [12] исследовался процесс самоорганизации в генераторе Ван-дер-Поля для неэкстенсивных систем с изменением значений параметра обратной связи при вынужденных переходах между стационарными состояниями в открытой системе. Представлены S-теорема об уменьшении переномированной (соответствующей одинаковым значениям средней энергии) энтропии (1) и I-теорема, утверждающая увеличение переномированной информации различия (2) в процессе самоорганизации. При $q = 1$ полученные результаты дают известные S- и I-теоремы [13,14]. В дополнение работы [11] здесь ставится цель — исследовать процесс самоорганизации при переходе от ламинарного течения к турбулентному, который рассматривался в [15] для аддитивных систем.

Переходы относительно равновесного состояния системы

Рассмотрим спонтанный переход от произвольного состояния неэкстенсивной термодинамической системы с распределением $f = f(\mathbf{v}, t)$ к состоянию полного равновесия, описываемого известным распределением

$$f_0 = f_0(\mathbf{v}) = \left[1 - (1-q)\,\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT}\right]^{1/(1-q)} Z^{-1},$$

$$\int f_0 d^3\mathbf{v} dV = N,$$

$$Z = n^{-1}\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2}(1-q)^{-1/2}\left(\frac{5-3q}{2}\right)^{-1}\left(\frac{3-q}{2}\right)^{-1}$$
$$\times\,\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{3-q}{2(1-q)}\right), \quad \frac{1}{3} < q \le 1,$$

$$Z = n^{-1}\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2}(q-1)^{-3/2}$$
$$\times\,\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{q-1}\right), \quad q \ge 1, \qquad (5)$$

обобщающим соответствующее распределение Максвелла. Здесь $n = N/V$, N — число частиц, m — масса частицы, V — объем системы, T — температура, а функция Z находится при интегрировании по фазовому объему, используя связь между импульсами и скоростями $d^3\mathbf{p} = m^3 d^3\mathbf{v}$. Она зависит от гамма-функции $\Gamma(x)$ и имеет разные значения для соответствующих областей изменения параметра q. Полное равновесное однородное распределение (5) находилось различными методами (см., например, [16,17]).

Переход характеризуется, согласно (2), информацией различия

$$I = I(f : f_0) = \frac{kV}{1-q}\int\left(f - f^q f_0^{1-q}\right)d^3\mathbf{v}$$
$$= Z^{q-1}\left[-(S - S_0) + \frac{1}{T}\,(E - E_0)\right] \ge 0, \qquad (6)$$

где для энтропий и средних энергий имеем выражения

$$S = S(f) = \frac{kV}{q-1}\int(f - f^q)d^3\mathbf{v},$$

$$S_0 = S(f_0) = \frac{kV}{q-1}\int\left(f_0 - f_0^q\right)d^3\mathbf{v},$$

$$E = V\int\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\,f^q d^3\mathbf{v}, \quad E_0 = V\int\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\,f_0^q d^3\mathbf{v},$$

$$\int f d^3\mathbf{v} = \int f_0 d^3\mathbf{v} = n. \qquad (7)$$

Используем условие постоянства средних энергий Гиббса

$$\int\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\,f^q d^3\mathbf{v} = \int\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\,f_0^q d^3\mathbf{v}, \qquad (8)$$

и из (6) вытекает неравенство $I(f : f_0)Z^{1-q} = -\big(S(f) - S(f_0)\big) \ge 0$, из которого следует максимальность равновесной энтропии. Информация различия является знакоопределенной функцией Ляпунова. Чтобы состояние полного равновесия было устойчивым, необходимо следующее неравенство:

$$\frac{dI(f : f_0)}{dt}\,Z^{1-q} = -\frac{d\big(S(f) - S(f_0)\big)}{dt} \le 0. \qquad (9)$$

Из (9) следует неравенство для информации различия $dI/dt \le 0$ и неравенство для энтропии $dS/dt \le 0$, которое формулирует H-теорему с перенормированным распределением, вытекающим из условия постоянства средних энергий. Таким образом, происходит совместное уменьшение информации различия и увеличение энтропии. Имеет место уменьшение статистической упорядоченности и увеличение статистической разупорядоченности в микросостояниях неэкстенсивной системы при приближении к состоянию полного равновесия. При $q = 1$ распределение (5) и энтропия (7) равняются равновесному распределению Максвелла $f_0(\mathbf{v}) = (2\pi kT/m)^{-3/2}\exp(-m\mathbf{v}^2/2kT)$ и энтропии идеального газа $S(f_0) = -kn\int f_0(\mathbf{v})\ln n f_0(\mathbf{v})d^3\mathbf{v}$. В итоге получим известные результаты для аддитивных систем.

Переходы от ламинарного течения к турбулентному

Согласно работе [15], определим два стационарных состояния неэкстенсивной системы как ламинарное и турбулентное течение несжимаемой жидкости, и рассмотрим вынужденные переходы между ними, задавая соответствующие энергии как различные кинетические энергии относительно среднего потока.

В первом случае имеем локальное равновесное распределение

$$f_1 = f_{\mathrm{lam}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \left[1 - (1-q)\,\frac{m\big(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\mathrm{lam}}(\mathbf{r})\big)^2}{2kT_{\mathrm{lam}}}\right]^{1/(1-q)} Z_1^{-1},$$

$$Z_1 = n^{-1}\left[\frac{2\pi kT_{\mathrm{lam}}}{m(q-1)}\right]^{3/2}\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{q-1}\right) \qquad (10)$$

для значений $q \geq 1$, локальной скорости и температуры ламинарного движения $\mathbf{u}_{\mathrm{lam}}(\mathbf{r})$ и T_{lam}. Локальное равновесное распределение (10), обобщающее соответствующее распределение Максвелла, наступает до установления полного равновесного однородного распределения (5). Локальная энтропия и среднее значение энергии имеют следующий вид:

$$S_{\mathrm{lam}} = \frac{kV}{q-1}\int (f_1 - f_1^q) d^3\mathbf{v}$$
$$= \frac{kV\pi^{3/2}}{(q-1)}\left\{N - \left[\frac{2kT_{\mathrm{lam}}}{(q-1)m}\right]^{3/2} \times \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_1^{-q}\right\},$$

$$E_{\mathrm{lam}} = V\int \frac{m\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\mathrm{lam}}(\mathbf{r})\right)^2}{2} f_1^q d^3\mathbf{v}$$
$$= \frac{3mV\pi^{3/2}}{2}\left[\frac{2kT_{\mathrm{lam}}}{(q-1)m}\right]^{5/2} \times \Gamma\left(\frac{7-3q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_1^{-q}. \tag{11}$$

Во втором случае рассматривается турбулентное течение с локальным распределением

$$f_2 = \tilde{f}_{\mathrm{turb}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$
$$= \left[1 - (1-q)\,\frac{m\left(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)\right)^2}{2kT_{\mathrm{turb}}}\right]^{1/(1-q)} Z_2^{-1}, \tag{12}$$

где $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ есть случайная локальная скорость потока. Аналогичным образом находим локальную энтропию и среднее значение энергии

$$S_{\mathrm{turb}} = \langle \tilde{S}_{\mathrm{turb}} \rangle = \frac{kV}{q-1}\left(\int \langle f_2 - f_2^q \rangle d^3\mathbf{v}\right)$$
$$= \frac{kV\pi^{3/2}}{(q-1)}\left\{N - \left[\frac{2kT_{\mathrm{turb}}}{(q-1)m}\right]^{3/2} \times \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_2^{-q}\right\},$$

$$E_{\mathrm{turb}} = \langle \tilde{E}_{\mathrm{turb}} \rangle = V\int \frac{m\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\mathrm{turb}}(\mathbf{r})\right)^{\mathbf{2}}}{2} \langle f_2 \rangle^q d^3\mathbf{v}$$
$$= \frac{3mV\pi^{3/2}}{2}\left[\frac{2kT_{\mathrm{turb}}}{(q-1)m}\right]^{5/2} \times \Gamma\left(\frac{7-3q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_2^{-q}. \tag{13}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по времени и соответственно $\mathbf{u}_{\mathrm{turb}} = \langle \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \rangle$ есть средняя скорость турбулентного течения.

По критерию S-теоремы [15] определим состояние „физического хаоса“ для ламинарного течения и потребуем выполнения равенства средних энергий

$$\int \frac{m\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\mathrm{lam}}(\mathbf{r})\right)^2}{2} (f_1)^q d^3\mathbf{v} = \int \frac{m\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\mathrm{turb}}(\mathbf{r})\right)^2}{2} \langle f_2 \rangle^q d^3\mathbf{v}. \tag{14}$$

В отличие от равенства (8) средних энергий по Гиббсу в равенстве (14) интегрирование имеет место для различных кинетических энергий относительно среднего потока.

Из (14) находим зависимость между температурой ламинарного течения и турбулентного течения

$$mV\pi^{3/2}\left[\frac{2kT_{\mathrm{lam}}}{(q-1)m}\right]^{5/2}\Gamma\left(\frac{7-3q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_1^{-q}$$
$$= mV\pi^{3/2}\left[\frac{2kT_{\mathrm{turb}}}{(q-1)m}\right]^{5/2}\Gamma\left(\frac{7-3q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_2^{-q} + \frac{1}{3}m\langle(\delta\mathbf{u})^2\rangle mV\pi^{3/2}\left[\frac{2kT_{\mathrm{turb}}}{(q-1)m}\right]^{3/2} \times \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_2^{-q} \tag{15}$$

с $T_{\mathrm{lam}} > T_{\mathrm{turb}}$. Управляющим параметром является тензор напряжений Рейнольдса, который определяется коллективными движениями между течениями. При $q = 1$ из (15) вытекает известное равенство $kT_{\mathrm{lam}} = kT_{\mathrm{turb}} + \frac{1}{3}m\langle(\delta\mathbf{u})^2\rangle$ [15].

Для разности энтропий ламинарного и стационарного турбулентного течений получим равенство

$$S_{\mathrm{lam}} - S_{\mathrm{turb}} = N\left(\frac{k\pi^{3/2}}{q-1}\right)\left[\frac{2\pi k}{(q-1)m}\right]^{\frac{3}{2}(1-q)} \times \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)\Gamma^{-q}\left(\frac{5-3q}{2(q-1)}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\left[\left(\frac{1}{T_{\mathrm{turb}}}\right)^{\frac{3}{2}(q-1)} - \left(\frac{1}{T_{\mathrm{lam}}}\right)^{\frac{3}{2}(q-1)}\right], \tag{16}$$

Таким образом, из (16) вытекает, что при переходе от ламинарного течения к турбулентному для неэкстенсивных систем с $1 < q < 5/3$ локальная энтропия уменьшается согласно неравенству $S_{\mathrm{lam}} - S_{\mathrm{turb}} > 0$, определяющему критерий самоорганизации. Статистическая разупорядоченность микросостояний системы уменьшается, и изменение энтропии $T_{\mathrm{lam}}(S_{\mathrm{lam}} - S_{\mathrm{turb}}) = R_{\min}$ [14,18] обусловлено работой по изменению состояния течения.

Заключение

В работе показано, что при спонтанных переходах к состоянию полного однородного равновесия происходит процессствораспада с совместным уменьшением меры упорядоченности и увеличением меры разупорядоченности в микросостояниях неэкстенсивных систем. Переход от ламинарного течения к турбулентному для неэкстенсивных систем с $1 < q < 3/2$ характеризуется процессом самоорганизации с уменьшением меры разупорядоченности. При $q = 1$ приведенные результаты совпадают с выводами работы [15]. Случай с $1/3 < q < 1$ для распределения (5) не рассматривается, и для него можно повторить проводимые вычисления.

Список литературы

[1] *Tsallis C.* Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. NY: Springer, 2009. 382 p.
[2] *Зарипов Р.Г.* Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во КГТУ, 2010. 404 с.
[3] *Naudts Jan.* Generalized Thermostatistics. London: Springer, 2011. 201 p.
[4] *Havrda J., Charvat F.* // Kybernetika. 1967. Vol. 3. P. 30–34.
[5] *Daroczy Z.* // Information and Control. 1970. Vol. 16. P. 36–51.
[6] *Rathie P.N., Kannappan Pl.* // Inform. and Contr. 1972. Vol. 20. P. 38–45.
[7] *Renyi A.* Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.
[8] *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
[9] *Зарипов Р.Г.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 11. С. 1–5.
[10] *Кульбак С.* Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967. 408 с.
[11] *Зарипов Р.Г.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 6–10.
[12] *Зарипов Р.Г.* // Изв. вузов. Физика. 2001. № 11. С. 24–29.
[13] *Климонтович Ю.Л.* // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 8. Вып. 23. С. 1412–1416.
[14] *Зарипов Р.Г.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 11. С. 2247–2249.
[15] *Климонтович Ю.Л.* // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. Вып. 2. С. 80–83.
[16] *Lima J.A.S., Silva R.* // Phys. Lett. A. 2005. Vol. 338. P. 272–276.
[17] *Зарипов Р.Г.* // Изв. вузов. Физика. 2013. Т. 56. № 1. С. 31–36.
[18] *Зарипов Р.Г.* // Изв. вузов. Физика. 1987. Т. 30. № 7. С. 29–33.