03

Капиллярные волны в трехслойной слоисто-неоднородной жидкости со свободной поверхностью

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Д.А. Завьялов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000, Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 13 октября 2015 г.)

Получено и проанализировано в области капиллярных волн имеющее бикубический вид дисперсионное уравнение для поверхностных и внутренних капиллярно-гравитационных волн в трехслойной жидкости со свободной поверхностью. Показано, что отношение амплитуд внутренних волн к амплитуде поверхностных весьма велико, если не принимать во внимание тривиальный режим „однородной жидкости“. Отношение амплитуд внутренних волн (порожденных разными поверхностями раздела сред) между собой может быть как больше единицы, так и меньше в зависимости от физических параметров системы; оно сильно зависит от плотностей слоев и от их толщин.

Введение

При создании многослойных покрытий в микротехнологии представляет интерес проблема исследования поверхностных и внутренних капиллярных волн в многослойной жидкости. Собственно, тема волнового движения в слоисто-неоднородной жидкости не является новой (см., например, [1–6]). Однако в большинстве проведенных исследований речь шла о гравитационных волнах в двуслойной жидкости и об эффекте „мертвой воды“, хотя в [6] упоминалось об экспериментах с трехслойной жидкостью. В [7–9] проведено исследование капиллярного волнового движения в двуслойной жидкости, а в [10–12] предпринято исследование гравитационных волн в трехслойной жидкости. Таким образом, в настоящее время проблема исследования капиллярных волн в трехслойной жидкости стала актуальной.

В технических и технологических приложениях основной интерес представляет область капиллярных волн в ситуации, когда имеется несколько поверхностей раздела, и контактирующие среды имеют конечную глубину, сравнимую с длинами рассматриваемых волн. Изучению особенностей капиллярных волновых движений в трехслойной жидкости со свободной поверхностью и посвящено данное исследование.

В целях сохранения общности проводимых рассуждений расчеты будут выполнены для капиллярно-гравитационных волн, что позволит использовать в качестве характерного линейного масштаба такую величину, как „капиллярная постоянная жидкости“, но численный анализ будет проведен именно для капиллярных волн.

Формулировка задачи

Рассмотрим задачу о волновом движении на плоских (в невозмущенном состоянии) границах раздела трех жидкостей со свободной поверхностью под влиянием капиллярной и гравитационной сил. Пусть нижняя из жидкостей имеет бесконечную глубину, коэффициент поверхностного натяжения σ_3 и плотность ρ_3; средняя — толщину h_2, коэффициент поверхностного натяжения σ_2, плотность ρ_2; верхняя — толщину h_1, коэффициент поверхностного натяжения σ_1 и плотность ρ_1. Будем считать, что все жидкости идеальны и несжимаемы. Задача рассматривается в декартовой системе координат, где ось OZ направлена вертикально вверх, ось OX направлена в направлении распространения волн, а от координаты y волновое движение принимается не зависящим, что позволит избежать лишней громоздкости выкладок, но не уменьшит общности рассмотрения. Вектор ускорения свободного падения $\mathbf{g}$ направлен противоположно $\mathbf{e}_z$ — орту декартовой системы координат, координатная плоскость $z = 0$ которой совпадает с невозмущенной границей раздела нижней и средней жидкостей ($\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$). Вектор нормали $\mathbf{n}$ к невозмущенной плоской поверхности параллелен орту оси OZ: $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_z$.

Примем, что при волновом возмущении границ раздела сред свободная поверхность верхней жидкости описывается уравнением $z = \xi_1(x,t) + (h_1 + h_2)$, где $\xi_1(x,t)$ — бесконечно малое отклонение поверхности верхней жидкости от невозмущенного уровня $z = h_1 + h_2$; уравнение границы раздела верхней и средней жидкостей будет иметь вид $z = \xi_2(x,t) + h_2$, где $\xi_2(x,t)$ — бесконечно малое отклонение границы раздела жидкостей от невозмущенного уровня $z = h_2$, а граница раздела средней и нижней жидкостей описывается уравнением $z = \xi_3(x,t)$, где $\xi_3(x,t)$ — бесконечно малое отклонение границы раздела жидкостей от невозмущенного уровня $z = 0$.

Величину $\max\limits_{j\in\{1,2,3\}} |\xi_j(x,t)|$ — будем использовать в качестве малого параметра задачи.

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_j(x,z,t) = 0, \quad (j = 1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

$$\partial_t \mathbf{V}_j(x,z,t) + \big(\mathbf{V}_j(x,z,t)_j \cdot \nabla\big)\mathbf{V}_j(x,z,t) = -\frac{\nabla P_j(x,z,t)}{\rho_j} + \mathbf{g}, \qquad (2)$$

$$z \to -\infty \qquad \mathbf{V}_3(x,z,t) \to 0, \qquad (3)$$

кинематические граничные условия

$$z = \xi_3(x,t): \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_3(x,z,t) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_2(x,z,t) = \partial_t\xi_3(x,t),$$
$$z = h_2 + \xi_2(x,t): \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_2(x,z,t) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_1(x,z,t) = \partial_t\xi_2(x,t),$$
$$z = h_1 + h_2 + \xi_1(x,t): \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{V}_1(x,z,t) = \partial_t\xi_1(x,t), \qquad (4)$$

динамические граничные условия

$$z = h_1 + h_2 + \xi_1(x,t): \quad P_1(x,z,t) - P_{\text{atm}} - P_{\sigma_1}(x,z,t) = 0,$$
$$z = h_2 + \xi_2(x,t): \quad P_2(x,z,t) - P_1(x,z,t) - P_{\sigma_2}(x,z,t) = 0,$$
$$z = \xi_3(x,t): \quad P_3(x,z,t) - P_2(x,z,t) - P_{\sigma_3}(x,z,t) = 0, \qquad (5)$$

где $P_j(x,z,t)$ — гидродинамические давления в верхней, средней и нижней средах соответственно; $P_{\sigma_j}(x,z,t)$ — давления сил поверхностного натяжения на j-ю поверхность раздела сред; P_{atm} — постоянное давление внешней среды. Символом обозначена частная производная по времени.

Скаляризация и линеаризация задачи

Будем решать задачу в линейном приближении по малому параметру. В модели потенциального течения скорости $V_j(x,z,t)$ представляются в виде

$$\mathbf{V}_j(x,z,t) = \nabla\Psi_j(x,z,t), \quad (j = 1,\ 2,\ 3), \qquad (6)$$

где $\Psi_j(x,z,t)$ — гидродинамические потенциалы, имеющие тот же порядок малости, что и возмущения поверхностей $\xi_j(x,t)$.

Подставляя (6) в (1), получим уравнения Лапласа

$$\Delta\Psi_j(x,z,t) = 0, \qquad (j = 1,\ 2,\ 3). \qquad (7)$$

Интегрируя линеаризованные уравнения Эйлера (2), получаем выражения для гидродинамических давлений в средах

$$P_j(x,z,t) = -\rho_j\partial_t\Psi_j(x,z,t) - \rho_j g z + C_j, \ (j = 1,\ 2,\ 3), \qquad (8)$$

C_j — константы интегрирования.

Естественное граничное условие (3) примет вид

$$z \to -\infty: \qquad \Psi_3(x,z,t) \to 0.$$

Преобразуя кинематические граничные условия (4) и сохраняя лишь слагаемые первого порядка малости, получим их в следующем виде:

$$z = 0: \quad \frac{\partial\Psi_3(x,z,t)}{\partial z} = \frac{\partial\xi_3(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial\Psi_2(x,z,t)}{\partial z} = \frac{\partial\xi_3(x,t)}{\partial t},$$
$$z = h_2: \quad \frac{\partial\Psi_2(x,z,t)}{\partial z} = \frac{\partial\xi_2(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial\Psi_1(x,z,t)}{\partial z} = \frac{\partial\xi_2(x,t)}{\partial t},$$
$$z = h_1 + h_2: \quad \frac{\partial\Psi_1(x,z,t)}{\partial z} = \frac{\partial\xi_1(x,t)}{\partial t}. \qquad (9)$$

Для преобразований динамических граничных условий (5) представим выражения для давлений в виде разложений по порядкам малости. В нулевом порядке малости получим балансы давлений на равновесных поверхностях, позволяющие получить константы интегрирования в выражениях (8):

$$C_1 = P_{\text{atm}} + \rho_1 g(h_1 + h_2),$$
$$C_3 = C_2 = P_{\text{atm}} + g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2).$$

Балансы давлений в первом порядке малости с учетом того, что $P_{\sigma_j} = -\sigma_j\partial_{xx}\xi_j$, $(j = 1,\ 2,\ 3)$, примут вид

$$z = 0: \quad \rho_3\partial_t\Psi_3(x,z,t) - \rho_2\partial_t\Psi_2(x,z,t) + g\xi_3(x,t)(\rho_3 - \rho_2) = \sigma_3\partial_{xx}\xi_3(x,t),$$
$$z = h_2: \quad \rho_2\partial_t\Psi_2(x,z,t) - \rho_1\partial_t\Psi_1(x,z,t) + g\xi_2(x,t)(\rho_2 - \rho_1) = \sigma_2\partial_{xx}\xi_2,$$
$$z = h_1 + h_2: \quad \rho_1\partial_t\Psi_1(x,z,t) + \rho_1 g\xi_1(x,t) = \sigma_1\partial_{xx}\xi_1(x,t), \qquad (10)$$

Символом ∂_{xx} обозначена вторая частная производная по пространственной координате.

Дисперсионное уравнение и отношение амплитуд

Система уравнений (7) с граничными условиями (9), (10) представляет собой математическую формулировку анализируемой задачи в первом порядке малости по амплитудам волновых возмущений границ раздела сред.

Проекты решений уравнений Лапласа в декартовых координатах будут иметь вид

$$\Psi_1(x,z,t) = \big[A_1\exp(kz) + B_1\exp(-kz)\big]\exp(-ikx),$$

$$\Psi_2(x,z,t) = \left[A_2 \exp(kz) + B_2 \exp(-kz)\right] \exp(-ikx),$$
$$\Psi_3(x,z,t) = A_3 \exp(kz) \exp(-ikz). \tag{11}$$

В аналогичном виде представим выражения для функций, описывающих возмущения равновесных границ раздела сред:

$$\xi_1(x,t) = \alpha_1(t) \exp(-ikx),$$
$$\xi_2(x,t) = \alpha_2(t) \exp(-ikx),$$
$$\xi_3(x,t) = \alpha_3(t) \exp(-ikx), \tag{12}$$

где $\alpha_j(t)$ — зависящие от времени неизвестные коэффициенты.

Удовлетворяя граничным условиям, получим выражения для гидродинамических потенциалов $\Psi_j(x,z,t)$ (см. (11)) через амплитуды $\alpha_j(t)$ из (12):

$$\Psi_1(x,z,t) = \frac{\exp(-ikx)}{k\,\mathrm{sh}(kh_1)}\left[\alpha_1'(t)\,\mathrm{ch}\big(k(z-h_2)\big) - \alpha_2'(t)\,\mathrm{ch}\big(k(z-h_2-h_1)\big)\right],$$

$$\Psi_2(x,z,t) = \frac{\exp(-ikx)}{k\,\mathrm{sh}(kh_2)}\left[\alpha_2'(t)\,\mathrm{ch}\big(kz\big) - \alpha_3'(t)\,\mathrm{ch}\big(k(z-h_2)\big)\right],$$

$$\Psi_3(x,z,t) = \frac{\alpha_3'}{k}\exp(kz)\exp(-ikx). \tag{13}$$

Используя полученные решения для гидродинамических потенциалов $\Psi_j(x,z,t)$ (13) и выражения (12) для функций $\xi_j(x,z,t)$, преобразуем динамические граничные условия (10) и получим систему трех связанных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд $\alpha_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$, описывающих временную эволюцию границ раздела сред:

$$\alpha_1''(t)\,\mathrm{ch}(kh_1) - \alpha_2''(t) + \alpha_1(t)\left(gk + \frac{\sigma_1 k^3}{\rho_1}\right)\mathrm{sh}(kh_1) = 0,$$

$$\alpha_3''(t)\left(\frac{\rho_2}{\mathrm{sh}(kh_2)}\right) - \alpha_2''(t)\left[\rho_2\,\mathrm{cth}(kh_2) + \rho_1\,\mathrm{cth}(kh_1)\right] + \alpha_1''(t)\left(\frac{\rho_1}{\mathrm{sh}(kh_1)}\right) - \alpha_2(t)\big(gk(\rho_2-\rho_1) + \sigma_2 k^3\big) = 0,$$

$$\alpha_3''(t)\left[\rho_3 + \rho_2\,\mathrm{cth}(kh_2)\right] - \alpha_2''(t)\left(\frac{\rho_2}{\mathrm{sh}(kh_2)}\right) + \alpha_3''(t)\big(gk(\rho_3-\rho_2) + \sigma_3 k^3\big) = 0 \tag{14}$$

Будем искать решение системы (14) в экспоненциальном виде

$$\alpha_j(t) \approx a_j \exp(i\omega t), \quad (j = 1, 2, 3), \tag{15}$$

a_j — независящие от времени коэффициенты.

В итоге получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_j:

$$a_1\left[\omega^2\,\mathrm{ch}(kh_1) - \left(gk + \frac{\sigma_1 k^3}{\rho_1}\right)\mathrm{sh}(kh_1)\right] - a_2\omega^2 = 0,$$

$$a_1\omega^2\frac{\rho_1}{\mathrm{sh}(kh_1)} - a_2\big[\omega^2\big(\rho_2\,\mathrm{cth}(kh_2) + \rho_1\,\mathrm{cth}(kh_1)\big) - gk(\rho_2-\rho_1) - \sigma_2 k^3\big] + a_3\omega^2\frac{\rho_2}{\mathrm{sh}(kh_2)} = 0,$$

$$a_2\omega^2\frac{\rho_2}{\mathrm{sh}(kh_2)} - a_3\big[\omega^2\big(\rho_3 + \rho_2\,\mathrm{cth}(kh_2)\big) - gk(\rho_3-\rho_2) - \sigma_3 k^3\big] = 0. \tag{16}$$

Условием существования нетривиальных решений системы (16) является обращение в нуль определителя матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных a_j, что позволяет получить бикубическое дисперсионное уравнение относительно частоты ω:

$$\omega^6 D_1(k,h,\rho_j) - \omega^4 D_2(h,k,\rho_j,\sigma_j) + \omega^2 D_3(h,k,\rho_j,\sigma_j) - D_4(h,k,\rho_j,\sigma_j) = 0,$$

$$D_1 \equiv \rho_1\big\{\rho_2\,\mathrm{ch}(h_1k)\left[\rho_2 + \rho_3\,\mathrm{cth}(h_2k)\right] + \rho_1\,\mathrm{sh}(h_1k)\left[\rho_3 + \rho_2\,\mathrm{cth}(h_2k)\right]\big\},$$

$$D_2 \equiv \rho_1\Big\{\rho_2\,\mathrm{ch}(h_1k)\big(\rho_3\left[gk\rho_2 + k^3(\sigma_1+\sigma_2)\right] + \rho_2\left[gk\rho_3 + k^3(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\right]\mathrm{cth}(h_2k)\big) - \mathrm{sh}(h_1k)\big[gk\rho_1(\rho_1\rho_2 - \rho_2^2 - \rho_1\rho_3) - k^3\big(\rho_2^2\sigma_1 + \rho_1^2\sigma_3\big) - \rho_2\rho_3\big(gk\rho_1 + k^3\sigma_1\big)\,\mathrm{cth}(h_2k)\big]\Big\},$$

$$D_3 \equiv \Big\{\rho_1\big(gk\rho_2 + k^3(\sigma_1+\sigma_2)\big)\big(gk(\rho_3-\rho_2)| + k^3\sigma_3\big) \times \mathrm{ch}(h_1k) + (gk\rho_1 + k^3\sigma_1)\big[\rho_3\big(gk(\rho_2-\rho_1) + k^3\sigma_2\big) + \rho_2\big(gk(\rho_3-\rho_1) + k^3(\sigma_3+\sigma_2)\big)\,\mathrm{cth}(h_2k)\big]\Big\}\mathrm{sh}(h_1k),$$

$$D_4 \equiv \big(gk\rho_1 + k^3\sigma_1\big)\left[gk(\rho_2-\rho_1) + k^2\sigma_2\right] \times \left[gk(\rho_3-\rho_2) + k^3\sigma_3\right]\mathrm{sh}(h_1k).$$

Для того, чтобы проверить предельный переход к однородной жидкости, устремим $\rho_2 \to \rho_1, \rho_3 \to \rho_1, \sigma_2 \to 0$, $\sigma_3 \to 0$. В результате дисперсионное уравнение примет хорошо известный вид дисперсионного уравнения капиллярно-гравитационных волн на поверхности однородной бесконечно глубокой жидкости.

Для предельного перехода к двуслойной жидкости устремим $\rho_1 \to \rho_2$, $\sigma_2 \to 0$. В результате получим биквадратное уравнение, полностью совпадающее с уравнением, полученным ранее при анализе подобной задачи в [8].

Используя (15) и систему линейных однородных алгебраических уравнений (16), получим отношение амплитуд волн на границах раздела сред и на свободной поверхности для каждого из трех решений дисперсионного уравнения, т. е. для частот $\omega_1(k)$, $\omega_2(k)$, $\omega_3(k)$:

$$\chi_{2,1} \equiv \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \equiv \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\rho_1\omega^2} \times \left[\rho_1\omega^2 \operatorname{ch}(h_1k) - \left(gk\rho_1 + k^3\sigma_1\right)\operatorname{sh}(h_1k)\right],$$

$$\chi_{3,1} \equiv \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \equiv \frac{a_3}{a_1} = \frac{\left[\rho_1\omega^2 - (gk\rho_1 + k^3\sigma_1)\operatorname{th}(h_1k)\right]}{\left[\omega^2\left(\rho_2 + \rho_3\operatorname{th}(h_2k)\right) - \left(gk(\rho_3-\rho_2) + k^3\sigma_3\right)\operatorname{th}(h_2k)\right]} \times \frac{\rho_2\operatorname{ch}(h_1k)}{\rho_1\operatorname{ch}(h_2k)},$$

$$\chi_{3,2} \equiv \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \equiv \frac{a_3}{a_2} = \frac{\rho_2\omega^2}{\left[\omega^2\left(\rho_2 + \rho_3\operatorname{th}(h_2k)\right) - \left(gk(\rho_3-\rho_2) + k^3\sigma_3\right)\operatorname{th}(h_2k)\right]} \times \frac{1}{\operatorname{ch}(h_2k)}.$$

Численный анализ

Все численные расчеты проведем в безразмерных переменных, положив $g = \rho_1 = \sigma_1 = 1$.

Расчеты при $\rho_2 = 1.01$, $\rho_3 = 1.02$, $\sigma_2 = 0.01$, $\sigma_3 = 0.02$, $h_2 = 1.5$, $h_1 = 1$ показывают, что увеличение волнового числа k (т. е. уменьшение длины волны λ) приводит к увеличению всех частот. Причем первые два корня дисперсионного уравнения (ω_1^2 и ω_2^2) примерно одинаковы по величине, а третий корень (ω_3^2) на порядок больше. Толщина как верхнего h_1, так и среднего h_2 слоев практически не влияет на значения частот, соответствующих второму и третьему корням, и слабо влияет на первый корень. Изменение же плотности среднего слоя ρ_2 в диапазоне значений от плотности верхнего слоя ρ_1 до плотности нижней жидкости ρ_3 в расчетах при $\rho_3 = 1.05$, $\sigma_2 = 0.01$, $\sigma_3 = 0.02$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1.5$, $k = 1$ оказывает малозаметное влияние лишь на первый и второй корни дисперсионного уравнения, причем первый корень растет, а второй уменьшается с увеличением разности плотностей $(\rho_2 - \rho_1)$ и $\rho_3 - \rho_2$.

Следует отметить, что коэффициенты поверхностного натяжения границ раздела сред оценивались по правилу Антонова [13], согласно которому при коэффициентах поверхностного натяжения одной из двух контактирующих несмешивающихся жидкостей σ_a, а второй σ_b, коэффициент поверхностного натяжения границы их раздела σ_c будет равен:

$$\sigma_c \approx |\sigma_a - \sigma_b|.$$

Численные расчеты при $\rho_2 = 1.01$, $\rho_3 = 1.02$, $\sigma_2 = 0.01$, $\sigma_3 = 0.02$, $h_2 = 1.5$, $k = 1$ показывают, что для

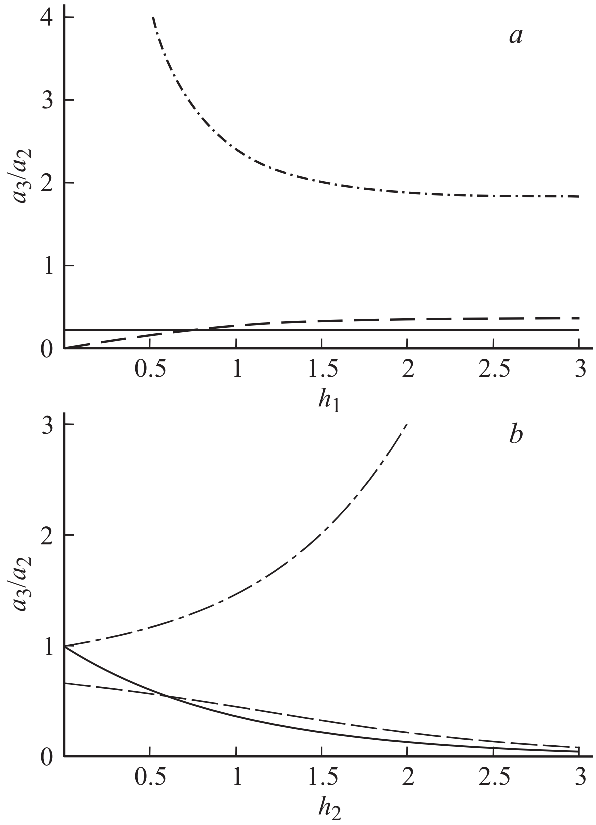

Рис. 1. a, b — зависимости отношения амплитуд внутренних волн a_3/a_2 от толщин верхнего и среднего слоев для трех корней дисперсионного уравнения ω_1, ω_2 и ω_3: ω_1 — сплошная линия, ω_2 — штриховая, ω_3 — штрихпунктирная. Расчеты проводились при $\rho_2 = 1.01$, $\rho_3 = 1.02$, $\sigma_2 = 1.01$, $\sigma_3 = 0.02$, $k = 1$. a) Зависимость a_3/a_2 от толщины верхнего слоя h_1, при $h_2 = 1.5$; b) зависимость a_3/a_2 от толщины среднего слоя h_2, при $h_1 = 1.5$.

первого корня дисперсионного уравнения ω_1 амплитуды внутренних волн a_2 и a_3 меньше амплитуды a_1 волны, распространяющейся по свободной поверхности верхнего слоя, и соответствующие отношения $\chi_{2,1}$ и $\chi_{3,1}$ не превышают единицы. Это характерно для режима колебаний однородной среды, когда наличие стратификации жидкости никак не сказывается. В то же время для частот ω_2 и ω_3 амплитуды внутренних волн значительно превосходят амплитуду внешней волны ($\chi_{2,1}$, $\chi_{3,1} \sim 10^2$) и соответствуют так называемому режиму „внутренних волн“.

Исследование отношения амплитуд при $\rho_2 = 1.01$, $\rho_3 = 1.02$, $\sigma_2 = 0.01$, $\sigma_3 = 0.02$, $h_2 = 1.5$, $k = 1$ в зависимости от толщины h_1 верхнего слоя показывает, что для частоты ω_1 (т. е. в „режиме однородной жидкости“) увеличение до двух единиц приводит, как и следовало ожидать, к уменьшению относительных амплитуд внутренних волн a_2 и a_3 в пять раз примерно по гиперболическому закону. Соотношение между самими амплитудами остается практически неизменным. В режимах „внутренних волн“ (т. е. для частот ω_2 и ω_3) увеличение толщины h_1 до двух безразмерных единиц увеличивает

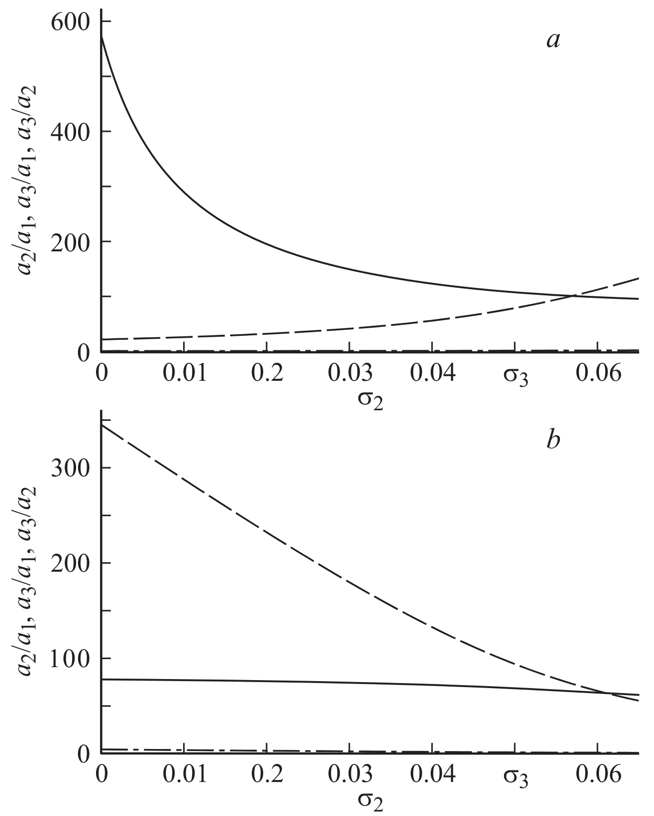

Рис. 2. a, b — зависимости отношения амплитуд волн от коэффициента поверхностного натяжения границы раздела верхнего и среднего слоев σ_2 для двух корней дисперсионного уравнения ω_2 и ω_3, a_2/a_1 — сплошная линия, a_3/a_1 — штриховая линия, a_3/a_2 — штрихпунктирная линия. Расчеты проводились при $\rho_2 = 1.01$, $\rho_3 = 1.02$, $\rho_3 = 0.05$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1.5$, $k = 1$. a — для ω_2, b — для ω_3.

относительные амплитуды этих волн по степенному закону примерно в 3 раза, причем для частоты ω_2 амплитуда a_2 превышает a_3, а для частоты ω_3 ситуация обратная.

Увеличение толщины среднего слоя h_2 до двух безразмерных единиц для частоты ω_1 уменьшает лишь амплитуду a_3, оставляя неизменной a_2, что также является предсказуемым фактом. Для второго и третьего корней дисперсионного уравнения ситуация иная. Для ω_2 с ростом h_2 в указанном выше диапазоне $\chi_{2,1}$ и $\chi_{3,1}$ уменьшаются в 7-8 раз примерно по гиперболическому закону, причем $\chi_{2,1} > \chi_{3,1}$ в 3-4 раза. Для ω_3 отношение $\chi_{3,1}$ растет в 4 раза в указанном диапазоне, отношение $\chi_{2,1}$ незначительно увеличивается примерно по линейному закону. Иными словами, изменение толщины среднего слоя h_2 по-разному сказывается на амплитудах внутренних волн для частот ω_2 и ω_3. В первом случае (для ω_2) обе амплитуды a_2 и a_3 уменьшаются с ростом h_2, а во втором (для ω_3) — увеличиваются. Можно также отметить, что изменение параметра h_2 гораздо существеннее сказывается на a_3 — амплитуде волны на поверхности нижней жидкости.

На рис. 1, a, b, где представлены зависимости $\chi_{2,3}$ от толщин слоев h_1 и h_2 для всех трех частот ω_1, ω_2 и ω_3. Для режима „внутренних волн“ с частотой (штриховые линии) амплитуда „нижней“ волны a_3 меньше амплитуды a_2: отношение $\chi_{3,2}$ не превосходит единицы при изменении как h_1, так и h_2. В режиме с частотой ω_3 (штрихпунктирные линии) амплитуда „более глубокой“ волны a_3 больше амплитуды a_2. Для частот ω_1 и ω_2 отношение $\chi_{3,2}$ уменьшается с ростом h_2. Это дает основание предположить, что частота ω_2 соответствует колебаниям, порождаемым границей раздела верхнего и среднего слоев, в то время как частота ω_3 характерна для колебаний, зарождающихся на границе раздела среднего слоя и нижней жидкости. Для ω_1, т.е. для режима „сплошной среды“ (сплошные линии), отношение $\chi_{3,2}$ от толщины слоя h_1 не зависит, а с ростом h_2 медленно уменьшается от единицы примерно по гиперболическому закону. Для режима „внутренних волн“ с частотой ω_3 (штрихпунктирные линии) отношение $\chi_{3,2}$ от толщины слоя h_1 уменьшается примерно по гиперболическому закону, принимая значения больше двойки при $h_1 = 3$ и резко возрастая при $h \to 0$. С ростом h_2 отношение $\chi_{3,2}$ увеличивается.

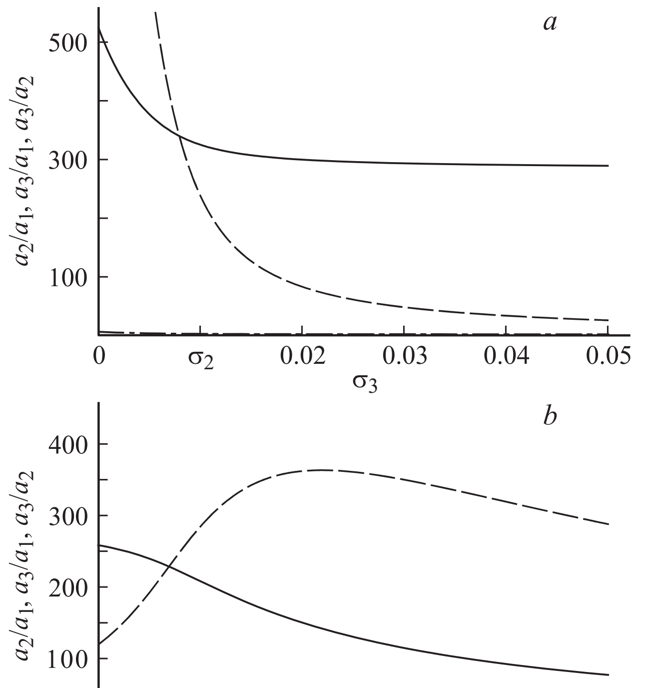

Рис. 3. a, b — зависимости отношения амплитуд волн от коэффициента поверхностного натяжения границы раздела среднего слоя и нижней жидкости σ_3 для двух корней дисперсионного уравнения ω_2 и ω_3. Соответствие отношений амплитуд типам линий то же, что на рис. 2. Расчеты проводились при $\rho_2 = 1.01$, $\rho_3 = 1.02$, $\sigma_2 = 0.01$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1.5$, $k = 1$. a — для ω_2, b — для ω_3.

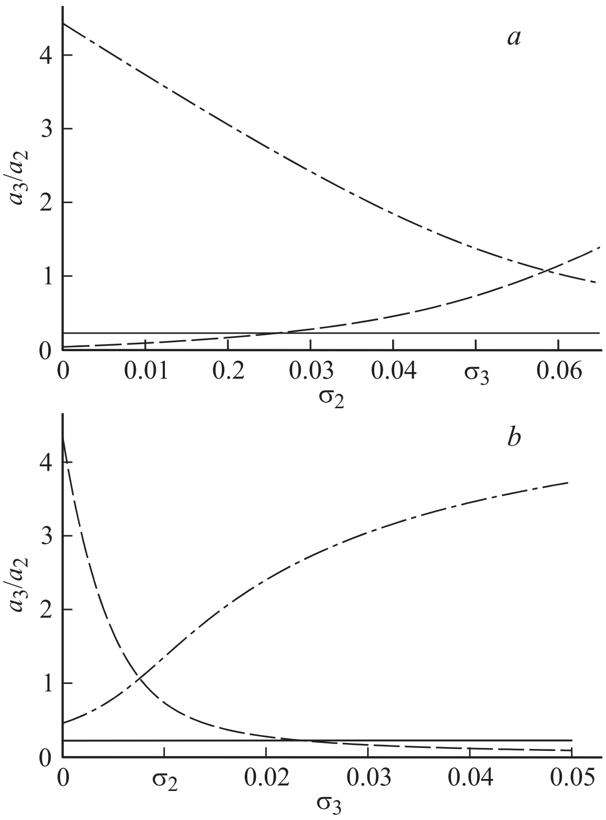

Рис. 4. a, b — зависимости отношения амплитуд внутренних волн от коэффициентов поверхностного натяжения границ раздела сред для трех корней дисперсионного уравнения ω_1 — сплошная линия, ω_2 — штриховая линия, ω_3 — штрихпунктирная линия. Расчеты проводились при $\rho_2 = 1.01$, $\rho_3 = 1.02$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1.5$, $k = 1$. a — зависимость от σ_2, когда $\sigma_3 = 0.05$, b — зависимость от σ_3, когда $\sigma_2 = 0.01$.

На рис. 2, a, b и 3, a, b показаны зависимости амплитуд волн от коэффициентов поверхностного натяжения границы раздела верхнего и среднего слоев σ_2 и границы раздела среднего слоя и нижней жидкости σ_3. Расчеты показывают, что изменение коэффициентов σ_2 и σ_3 не влияет на частоту режима „сплошной среды“ ω_1, и отношения всех амплитуд остаются неизменными. В режимах „внутренних волн“ (т. е. для частот ω_2 и ω_3) отношение амплитуд $\chi_{2,1}$ убывает с ростом σ_2 и σ_3. При этом в режиме с частотой ω_2 более существенное влияние оказывает изменение σ_2, а в режиме с частотой ω_3 — изменение σ_3. Влияние изменения коэффициентов поверхностного натяжения границ раздела сред σ_2 и σ_3 на отношение амплитуд $\chi_{3,1}$ различно для разных режимов „внутренних волн“. Для режима с частотой ω_2 при уменьшении σ_2 отношение $\chi_{3,1}$ убывает, а для режима с частотой ω_3 — растет (рис. 2). Уменьшение коэффициента σ_3 (рис. 3) в первом случае (для частоты ω_2) увеличивает отношение $\chi_{3,1}$, а во втором случае (для частоты ω_3) отношение $\chi_{3,1}$ зависит от σ_3 немонотонно, имея максимум.

На рис. 4, a, b представлены зависимости отношения амплитуд внутренних волн на нижней и средней границах $\chi_{3,2}$ от коэффициентов σ_2 и σ_3 для всех трех режимов (т. е. для частот ω_1, ω_2, ω_3). Несложно заметить, что в „режиме сплошной среды“ амплитуды волн на более глубокой поверхности a_3 меньше амплитуды волн на средней границе раздела a_2, и изменение коэффициентов σ_2 и σ_3 на них никак не сказывается. В „режиме внутренних волн“ с частотой ω_2 отношение $\chi_{3,2}$ убывает с уменьшением σ_2 и растет с уменьшением σ_3. Для режима с частотой ω_3 наблюдаются противоположные тенденции: увеличение $\chi_{3,2}$ при уменьшении σ_2 и убывание — при уменьшении σ_3. Отметим, что отношение $\chi_{3,2}$ близко к единице при $\sigma_2 \approx \sigma_3$.

Заключение

Получено бикубическое дисперсионное уравнение относительно частоты ω, решения которого соответствуют трем режимам колебательных движений в рассматриваемой системе: режим „однородной жидкости“ и два режима „внутренних волн“, существование которых возможно лишь в стратифицированной жидкости. В режиме „однородной жидкости“ амплитуда волн убывает по мере углубления, поэтому волны на внутренних поверхностях раздела имеют меньшие амплитуды, чем волны на свободной поверхности. В режимах „внутренних волн“, характерных для слоисто-неоднородных жидкостей, проявляется эффект „мертвой воды“, когда амплитуда внутренних волн намного больше, чем на границе свободной поверхности. В ходе аналитического исследования данного эффекта показано, что он реализуется не только для гравитационных, но и для капиллярных волн.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00170-а.

Список литературы

[1] *Сретенский Л.Н.* // Журн. геофизики. 1934. Т. 4. Вып. 3. С. 332–367.
[2] *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
[3] *Миндлин И.М.* Интегродифференциальные уравнения в динамике тяжелой слоистой жидкости. М.: Наука, 1996. 298 с.
[4] *La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M.A.* // Nonlinear Oscillations. 2003. Vol. 6. N 2. P. 196–204.
[5] *Hanyang Gu, Liejin Guo* // Progress in Natural Science. 2005. Vol. 15. N 11. P. 1026–1034.
[6] *Mercier M.J., Vasseur R., Dauxois T.* // Nonlinear Processes in Geophysics. 2011. Vol. 18. N 2. P. 193–208.
[7] *Daikhin L.I., Kornyshev A.A., Urbakh M.* // J. of Electroanalytical Chemistry. 2000 Vol. 483. P. 68–80.
[8] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 8–17.

[9] *Григорьев А.И., Фёдоров М.С., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 31–39.
[10] *Prabir Daripaa*. // Phys. of Fluids. 2008. Vol. 20. P. 112 101.01–112 101.11.
[11] *Kyung Sung Kim, Moo Hyun Kim.* // Int. J. Offshore and Polar Eng. 2014. Vol. 24. N 2. P. 122–128.
[12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Яковлева Л.С.* // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 12. С. 40–44.
[13] *Рид Р., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1971. 702 с.