12

Анализ работы трансформатора Тесла на первой полуволне выходного напряжения с учетом омических потерь

© Е.И. Пальчиков,[1,2] А.М. Рябчун[1,2]

[1] Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: palchikov@hydro.nsc.ru
[2] Новосибирский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия

(Поступило в Редакцию 17 июня 2015 г.)

Проведен анализ быстродействия и КПД трансформатора Тесла на первой полуволне выходного напряжения в зависимости от добротностей контуров и их коэффициента связи. Приведены результаты расчетов и экспериментальных измерений. Показано, что для заданных добротностей контуров есть оптимальная величина коэффициента связи с наилучшим КПД, которую можно рассчитать и к которой необходимо стремиться при разработке трансформатора.

В настоящее время высоковольтный импульсный трансформатор Тесла благодаря простоте своей конструкции и ряду других положительных качеств нашел широкое применение в импульсных рентгеновских аппаратах, начиная от крупнейших уникальных машин типа „Акваген" и „РИУС" [1–3] и кончая малогабаритными устройствами типа „Квант" и „Аргумент" [4,5]. В работах [1,3,5] анализ работы трансформатора проводился с акцентом на передачу максимально возможной энергии на втором или третьем импульсе вторичного напряжения. Однако для систем с высоким быстродействием с минимальной задержкой между сигналом пуска и выходом электронов предпочтительным является использование первой полуволны. Как правило, малые времена задержек необходимы при синхронизации с однократными быстропротекающими и взрывными процессами. В этом случае в аппаратах используется работа на первой полуволне вторичного напряжения с повышенными коэффициентами связи [6, 7].

В известных нам публикациях при расчете работы трансформатора используется упрощенный подход. Предполагается, что при коэффициенте связи, стремящемся к единице, потерями можно пренебречь. Поэтому для оценки эффективности работы трансформатора в [8] используются решения с нулевыми потерями, с разложением в ряд по степеням $(1-k)$. Это приводит к неверным решениям в области $k \to 1$. Как показывают наши расчеты, при $k \to 1$ эффективность работы трансформатора стремится к нулю и для заданных добротностей контуров существует некоторое оптимальное значение коэффициента связи. Как правило, $k_{\mathrm{opt}} > 0.9$. В работе [9] были приведены результаты численных расчетов влияния потерь на работу трансформатора Тесла на первой полуволне. Однако выводы об оптимальной величине коэффициента связи и о затухании быстрой колебательной моды при $k \to 1$ сделаны не были. Возможно, это связано с использованием приближений или расчеты просто не были сделаны в нужном диапазоне величин коэффициента связи.

Несколько слов об истории теоретического анализа работы трансформатора Тесла. Через четыре года после получения Н. Тесла патента [10] в работе А. Обербека [11], впервые был проведен теоретический анализ колебаний в двух связанных резонансно настроенных контурах с написанием уравнений. Более подробный анализ резонансно настроенных контуров был проведен в 1904 г. П. Друде [12]. Были впервые получены условия максимального напряжения во вторичном контуре, в том числе и случай с максимальным КПД на второй полуволне при $k = 0.6$. Несмотря на большое количество последовавших за этими пионерскими публикациями [10,11] работ, подробный теоретический анализ работы трансформатора Тесла на первой полуволне вблизи $k \to 1$ с учетом омических потерь не проводился. В настоящей работе проводится анализ работы трансформатора Тесла на первом импульсе рабочего напряжения при повышенных коэффициентах связи $k > 0.6$ с учетом омических потерь.

Рассмотрим электрическую цепь импульсного трансформатора, состоящую из двух индуктивно связанных LC-контуров с собственными частотами

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}},$$

добротностями

$$Q_1 = \sqrt{\frac{l_1}{C_1}}\Big/R_1, \quad Q_2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}\Big/R_2$$

и коэффициентом взаимной индукции M, представленную на рис. 1.

В начальный момент времени заряд на C_2 отсутствует, напряжение на C_1 равно U_{10}. После замыкания ключа S в момент времени $t = 0$ для обоих контуров можно записать уравнения в нормированной форме

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u_1}{dt^2} + k\,\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\,\dfrac{d^2u_2}{dt^2} + \dfrac{\omega_1}{Q_1}\,\dfrac{du_1}{dt} + \omega_1^2 u_1 = 0, \\ \dfrac{d^2u_2}{dt^2} + k\,\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\,\dfrac{d^2u_1}{dt^2} + \dfrac{\omega_2}{Q_2}\,\dfrac{du_2}{dt} + \omega_2^2 u_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

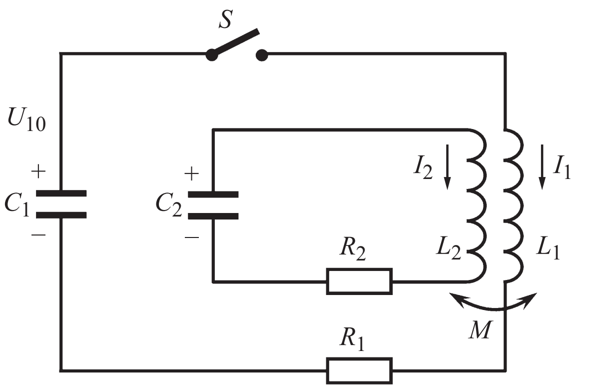

Рис. 1. Электрическая принципиальная схема импульсного резонансного трансформатора с ударным возбуждением.

с начальными условиями

$$u_1 = 1, \ \frac{du_1}{dt} = 0, \ u_2 = 0, \ \frac{du_2}{dt} = 0. \tag{2}$$

Здесь k — коэффициент связи контуров

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

u_1 и u_2 — напряжения $U_1(t)$ и $U_2(t)$, нормированные на максимальные значения

$$U_{1\,\max} = U_{10}, \quad U_{max} = U_{10}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}.$$

Стандартный поиск решения в виде $e^{\lambda t}$ приводит к следующему характеристическому уравнению для показателя экспоненты λ:

$$\lambda^4 + \frac{\left[\lambda^3\left(\frac{\omega_1}{Q_1} + \frac{\omega_2}{Q_2}\right) + \lambda^2\left(\frac{\omega_1\omega_2}{Q_1Q_2} + \omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \lambda\omega_1\omega_2\left(\frac{\omega_1}{Q_1} + \frac{\omega_2}{Q_2}\right) + \omega_1^2\omega_2^2\right]}{(1-k^2)} = 0.$$

Здесь действительная часть λ — постоянная затухания $\gamma = -\frac{\omega}{2Q}$, мнимая часть — круговая частота ω. Уравнение не меняет вид при перестановке осцилляторов. Можно показать, что для ударного возбуждения то же самое можно сказать о безразмерном $u_2(t)$ и, следовательно, о максимальном u_2 и времени достижения этого максимума.

Если пренебречь потерями ($Q_1, Q_2 \to \infty$), для собственных частот сразу получается [13,14]

$$\omega^* = \frac{\sqrt{2}\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4k^2\omega_1^2\omega_2^2}}},$$

$$\omega_* = \frac{\sqrt{2}\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4k^2\omega_1^2\omega_2^2}}}. \tag{3}$$

Назовем частоты ω^* и ω_* верхней и нижней гибридными и отметим, что

$$\omega^* > \max(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_* < \min(\omega_1, \omega_2).$$

В случае резонансных контуров, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, наличие связи снимает вырождение частот и приводит к их расщеплению

$$\omega^* = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}, \quad \omega_* = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}.$$

Для $k \to 1$ формулы (3) для гибридных частот принимают вид

$$\omega^* \approx \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2(1-k)}}, \quad \omega_* \approx \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{2}.$$

Для достаточно больших $k > 0.6$ хорошим приближением для добротностей будет

$$Q^* \approx \frac{Q_1 Q_2 \sqrt{2(1-k)(\omega_1^2 + \omega_2^2)}}{Q_1\omega_2 + Q_2\omega_1},$$

$$Q_* \approx \frac{2Q_1Q_2\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{Q_1 \cdot \omega_2 + Q_2\omega_1}$$

или для постоянных затухания

$$\gamma_* \approx \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4}, \quad \gamma^* \approx \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2(1-k)}.$$

При небольших потерях гибридные частоты меняются слабо, но с ростом коэффициента связи начинает падать добротность. И при $k \to 1$ для верхней гибридной частоты наступает критическое затухание. Колебания исчезают. Формулы перестают работать, но такие коэффициенты связи не имеют практического смысла для трансформаторов Тесла.

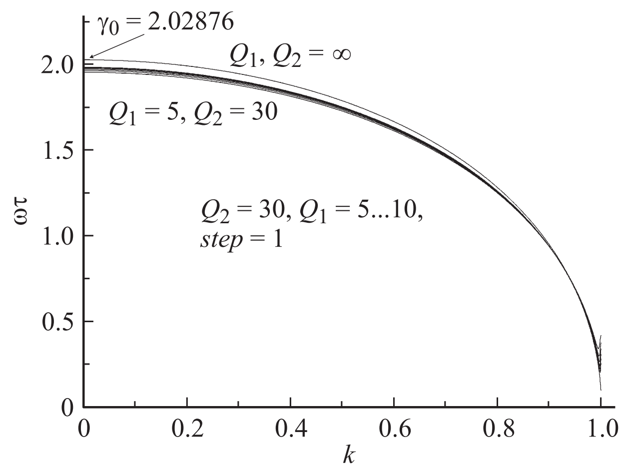

Рис. 2. Зависимость времени выхода вторичного напряжения $U_2(t)$ на первый максимум от коэффициента связи k и добротностей Q_1, Q_2.

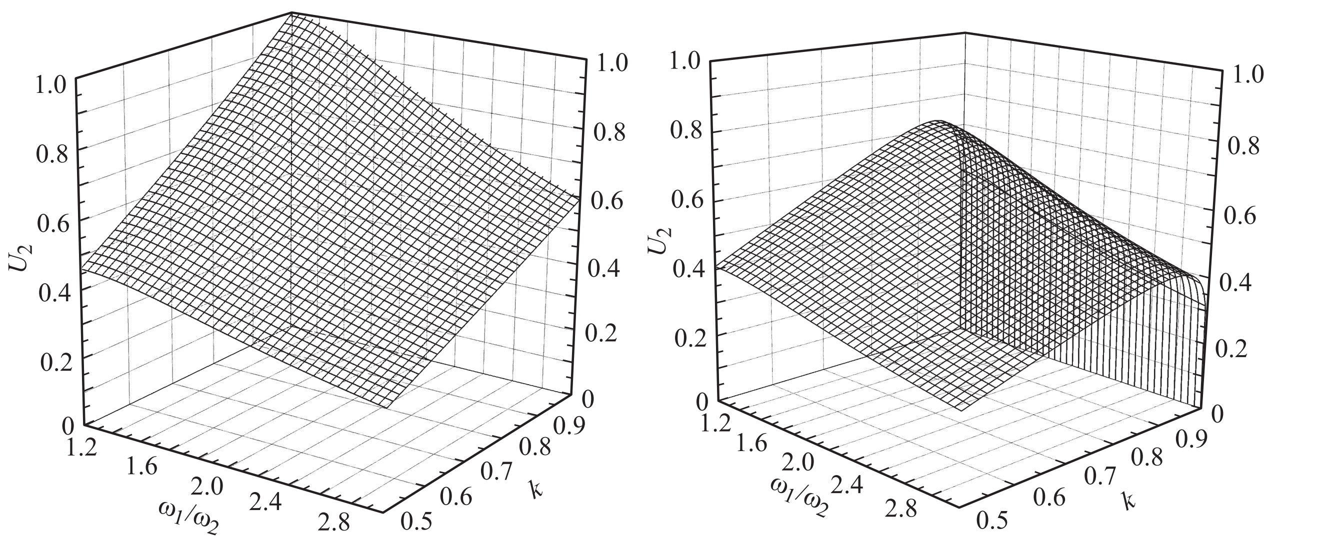

Рис. 3. Зависимость максимального вторичного напряжения $u_{2\,\max}$ от коэффициента связи k и расстройки $\omega = \omega_1/\omega_2$, слева — в отсутствие потерь, справа — при $Q_1 = 8$, $Q_2 = 30$.

Учитывая начальные условия (2) и решая систему уравнений (1), в отсутствие потерь можно получить следующие аналитические выражения для безразмерных напряжений в первичном и вторичном контурах трансформатора:

$$u_1(t) = \frac{\omega_1^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4k^2\omega_1^2\omega_2^2}} \times \left(\frac{\omega^{*2} - \omega_2^2}{\omega^{*2}} \cos\omega^* t + \frac{\omega_2^2 - \omega_*^2}{\omega_*^2} \cos\omega_* t \right),$$

$$u_2(t) = \frac{k\omega_1\omega_2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4k^2\omega_1^2\omega_2^2}} (\cos\omega_* t - \cos\omega^* t) = \frac{2k\omega_1\omega_2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4k^2\omega_1^2\omega_2^2}} \sin\left(\frac{\omega^* + \omega_2}{2}\, t\right) \times \sin\left(\frac{\omega^* - \omega_2}{2}\, t\right). \quad (4)$$

Попытки найти максимум $u_2(t)$ из аналитического выражения (4) приводят к трансцендентному уравнению. Удобнее просто численно интегрировать систему дифференциальных уравнений (1). В большинстве пакетов (Malab, SciLab, Maple, Mathematica...) для научных расчетов есть стандартные процедуры численного интегрирования дифференциальных уравнений, снабженные опцией локализации событий [15]. В нашем случае событие — достижение максимума u_2 или $\frac{du_2}{dt} = 0$. При этом не возникает никаких затруднений с учетом потерь.

Используем (4) для анализа предельных случаев. В дальнейшем при расчетах будет использоваться безразмерное время $\tau = \omega_2 t$ и параметр расстройки — $\omega = \omega/\omega_2$. Как уже упоминалось, момент t_1 максимума функции $U_2(t)$, ω_0 и k связаны трансцендентным уравнением, которое в резонансном случае $(\omega_1 = \omega_2 = \omega_0)$ имеет вид

$$\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\, \sin\left(\frac{\omega_0 t_1}{\sqrt{1+k}}\right) = \sin\left(\frac{\omega_0 t_1}{\sqrt{1-k}}\right). \quad (5)$$

График зависимости $\omega_0 k$ от k представлен на рис. 2 и получен из (1) численным счетом.

При малых k время выхода $U_2(t)$ на максимум слабо зависит от k и в пределе при $k \to 1$ равно

$$t_1 = \frac{\gamma_0}{\omega_0},$$

где $\gamma_0 = 2.028758\ldots$ корень уравнения

$$\operatorname{tg}\gamma + \gamma = 0,$$

получающегося после разложения в ряд выражения (5) по малому параметру k до членов второго порядка малости.

При $k \to 1$ время максимума $U_2(t)$ с хорошей точностью соответствует половине периода колебаний с частотой ω^*:

$$t_1 \approx \frac{\pi\sqrt{1-k}}{\omega_0}$$

и стремится к нулю при $k \to 1$, т. е. быстродействие с приближением k к единице неограниченно растет.

На рис. 2 изображена зависимость времени достижения максимума от k и добротностей контуров. Как видно, она слабо зависит от добротностей контуров. Выбросы при $k \to 1$ связаны с критическим затуханием и практического значения не имеют.

При отсутствии потерь первая полуволна $U_2(t)$ становится больше второй полуволны при $k > 0.8$. На практике, когда есть омические потери, на первой полуволне

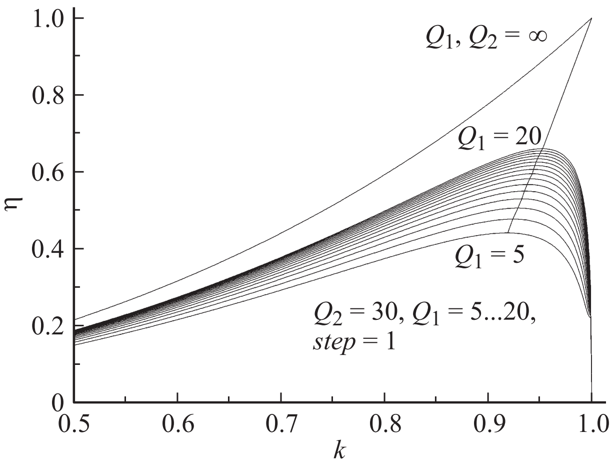

Рис. 4. Зависимость коэффициента передачи энергии во вторичную емкость ($\eta = u^2_{2\max}$) на первом максимуме вторичного напряжения от коэффициента связи (k) при различных значениях добротностей первичного (Q_1) и вторичного (Q_2) контуров.

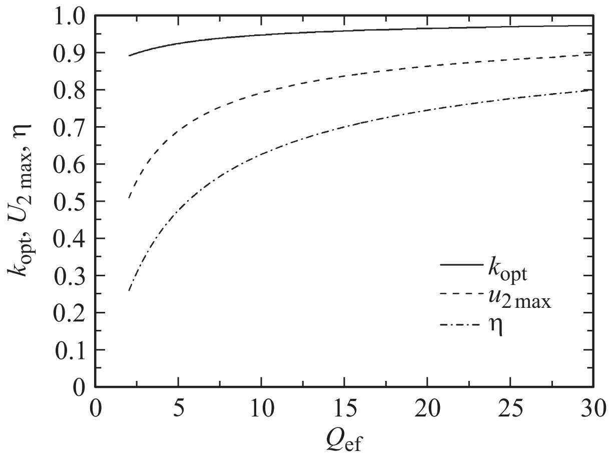

Рис. 5. Зависимости максимального вторичного напряжения ($u_{2\max}$), коэффициента передачи энергии во вторичную емкость ($\eta = u^2_{2\max}$) на первом максимуме вторичного напряжения и оптимального значения коэффициента связи (k_{opt}) от эффективной добротности (Q_{ef}).

колебаний становится энергетически выгоднее работать даже при $k < 0.8$.

На рис. 3 приведены результаты расчетов, иллюстрирующие влияние потерь. Приведенные на рис. 3 значения Q_1 и Q_2 являются типичными для сильноточных высоковольтных трансформаторов Тесла с токами в первичной цепи $\sim 30{-}100$ kA и $U_{1\max} \sim 10$ kV, $U_{2\max} \sim 200{-}600$ kV.

Качественные различия возникают при $k \to 1$. Если не учитывать потери, то в этом пределе $u_{2\max} = 2\omega/(1+\omega^2)$ и достигает максимума при $\omega = 1$. С учетом потерь существует $k_{\max}$, для которого достигается максимальное $u_{2\max}$ или КПД$=u^2_{2\max}$. При $k \to 1$ $u_{2\max} \to 0$, что связано с увеличением одной из гибридных частот и с еще более стремительным ростом соответствующего коэффициента затухания. С физической точки зрения — с неограниченным ростом быстродействия неограниченно растут и омические потери.

На рис. 4 показаны оптимальные значения коэффициента связи для различных добротностей. Видно, что при приближении к оптимуму зависимость КПД от коэффициента связи падает и увеличение добротности контуров выходит на первый план.

Расчеты поведения трансформатора в области практически встречающихся параметров показывают, что добротности контуров можно с хорошей точностью (порядка процента) заменить некоторой эффективной добротностью Q_{ef}, в определение которой номера контуров входят симметрично

$$Q_{ef} \approx \frac{Q_1 Q_2 \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)/2}}{Q_1\omega_2 + Q_2\omega_1}$$

или

$$Q_{ef} \approx \frac{Q_1 Q_2 \sqrt{(1+\omega^2)/2}}{Q_1 + Q_2\omega}.$$

Тогда выражение $u_{2\max}(Q_1, Q_2, \omega_1, \omega_2 k)$ можно приближенно заменить на $\big(2\omega_1\omega_2/(\omega_1^2+\omega_2^2)\big)u_{2\max}\big(2\cdot Q_{ef}, 2\cdot Q_{ef}, 1, 1, k\big)$ или $\big(2\omega/(1+\omega^2)\big)u_{2\max}(2Q_{ef}, 2Q_{ef}, 1, 1, k)$. Это позволяет изобразить результаты расчетов графически в достаточно компактном виде (рис. 5). В частности, из графиков видно, что даже при неплохой для сильноточных схем добротности $Q_{ef} = 30$ при оптимальном коэффициенте связи КПД не превышает 80%.

Впервые с быстрым ростом потерь и подавлением высокочастотной моды колебаний при коэффициентах связи, близких к единице, авторы столкнулись 30 лет назад при компьютерном моделировании работы трансформатора Тесла [16]. В настоящей работе приводятся более полные результаты расчетов с соответствующими выводами. Результаты настоящей работы использованы для оптимизации импульсных рентгеновских аппаратов серии „ПИР" ИГиЛ СО РАН, построенных на основе трансформатора Тесла [7,16,17].

1. Выводы

• В идеальной системе, если пренебречь потерями, при работе на первой полуволне КПД растет с увеличением коэффициента связи — вплоть до 100%. При коэффициенте связи, равном единице, одна из гибридных частот устремляется к бесконечности и максимальное выходное напряжение достигается мгновенно с максимальной эффективностью.

• Однако если учитывать неизбежные омические потери, существующие в реальных контурах, то потери бесконечно увеличиваются при коэффициенте связи, стремящемся к единице, а КПД падает — вплоть до того, что исчезают сами колебания.

• Достичь коэффициента связи, близкого к единице, трудно из-за необходимости высоковольтной изоляции обмоток трансформатора. В реальных контурах сильноточных устройств величины добротностей контуров редко превышают значение 10.

• Для заданных добротностей контуров есть оптимальная величина коэффициента связи с наилучшим КПД, которую можно рассчитать и к которой необходимо стремиться при разработке трансформатора.

• Снижение омических потерь в контурах является не менее важным условием повышения КПД ИРА с трансформаторами Тесла, чем повышение коэффициента связи до оптимальной величины. Для имеющихся конструкций главным ограничивающим фактором является добротность первичного контура.

Список литературы

[1] *Абрамян Е.А.* Сильноточные ускорители-трансформаторы: Препринт ИЯФ СО АН СССР № 17–70. Новосибирск, 1970. 36 с.

[2] Импульсный ускоритель электронов „Акваген“ / Авроров А.П., Астрелин В.Т., Бояринцев Э.Л., Капитонов В.А., Лагунов В.М. // Докл. Всес конф. по инженерным проблемам термоядерных реакторов. Л.: НИИЭФА, 1977. С. 170–177.

[3] *Васерман С.Б.* Трансформатор Тесла в высоковольтных ускорителях заряженных частиц: Препринт ИЯФ СО АН СССР № 77−110. Новосибирск, 1979. 42 с.

[4] *Комяк Н.И., Пеликс Е.А.* // Атомная энергия. 1972. Т. 32. № 6. С. 520–522.

[5] *Завьялов Н.В., Канунов И.М., Полиенко Г.А., Хорошайло Е.С.* // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. Научно-исследовательское издание. Саров: ФГУП „РФЯЦ-ВНИИЭФ“, 2005. Вып. 10. С. 80–87.

[6] *Ельчанинов А.С., Загулов Ф.Я., Ковальчук Б.М.* Генератор коротких электронных пучков с встроенным в линию источником высокого напряжения // Мощные наносекундные импульсные источники ускоренных электронов / Отв. ред. ГЛ. Месяц. Новосибирск: Наука, 1974. С. 119–123.

[7] *Пальчиков Е.И., Биченков Е.И.* // Физика горения и взрыва. 1997. Т. 33. № 3. С. 159–167.

[8] *Ельчанинов А.С., Загулов Ф.Я.,Коровин С.Д., Месяц Г.А., Ростов В.В.* Сильноточные импульсно-периодические ускорители электронов для генераторов СВЧ-излучения // Релятивистская высокочастотная электроника / Под. ред. А.В. Гапонова-Грехова. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1981, С. 5–21.

[9] *Шнеерсон Г.А.* Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. М.: Энергоатомиздат, 1992. 416 с.

[10] *Tesla N.* System of electric lighting. Patent N 454622, 23 June 1891.

[11] *Oberbeck A.* // Annalen der Physik und Chemie. 1895. Vol. 55.

[12] *Drude P.* Annalen der Physik. 1904. Vol. 13. P. 512–561.

[13] *Канторович М.И.* Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. М.: Сов. радио, 1975. 320 с.

[14] *Биченков Е.И., Рабинович Р.Л.* // Всес. научно-техн. конф. по высокоскоростной фотографии и фотонике: Тез. докл. М.: НИИОФИ, 1978. С. II2–II3.

[15] *Shampine L.F., Thompson S.* // Comput. Math. Appl. 2000. Vol. 39. P. 43–54.

[16] *Пальчиков Е.И.* // Дисс. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук. Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО АН СССР. Новосибирск: НИИ интроскопии Минприбор. М., 1986. 248 с.

[17] *Пальчиков Е.И., Долгих А.В., Красников И.Ю., Рябчун А.М.* Принципиальная схема и особенности построения аппарата ПИР-200М для рентгеновской съемки малоплотных объектов при динамических испытаниях. Вопросы оборонной техники. Серия № 14. Проектирование систем вооружений, боеприпасов и измерительных комплексов. 2014. № 1. С. 74–82.