

03

## О влиянии стохастических пульсаций пузырька на его трансляционное движение

© Н.П. Мельников

Научно-исследовательский радиофизический институт,  
603950, Нижний Новгород, Россия  
e-mail melnikov50@mail.ru

(Поступило в Редакцию 17 ноября 2015 г.)

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию динамики одиночного кавитационного пузырька, пульсирующего в сжимаемой, вязкой жидкости под действием неоднородного акустического поля. Численно интегрируется система двух нелинейных, обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Находясь в области параметров акустического поля, соответствующей области основного резонанса, пузырек совершает крупномасштабные пространственные осцилляции. Показано, что в очень малом интервале значений начального радиуса пузырек из-за стохастических пульсаций прекращает свое осцилляционное движение и выбрасывается в область узла акустического давления. Таким образом, стохастические пульсации пузырька приводят к кардинальному изменению вида решения системы вышеуказанных уравнений.

В работе [1] было показано, что пузырек, находящийся под действием однородного периодического акустического поля, может пульсировать непериодическим, стохастическим образом и что переход от периодических пульсаций к стохастическим осуществляется путем бифуркаций удвоения периода. В работах [2–4] была исследована область параметров пузырька (начальный радиус  $R_0$ ) и внешнего акустического поля (частота  $f$  и амплитуда  $P_m$ ), было построено семейство резонансных кривых (зависимость максимального радиуса пузырька  $R_{\max}$  от его начального радиуса  $R_0$ ), где параметром являлась амплитуда внешнего поля, и выделены зоны, в которых пульсации пузырька имеют стохастический характер. В неоднородном акустическом поле в зависимости от соотношения собственной частоты пульсаций пузырька с частотой возбуждающего акустического поля пузырек совершает трансляционные движения различного вида, в том числе крупномасштабные пространственные осцилляции, сравнимые с длиной акустической волны [5]. Перемещаясь в пространстве, пузырек в каждый момент времени подвергается действию акустического поля разной амплитуды. Такое движение аналогично переходу с одной резонансной кривой на другую в области резонансных кривых. Таким образом, перемещаясь поступательно, пузырек может проходить зоны устойчивых пульсаций, зоны бифуркаций удвоения периода и зоны стохастических пульсаций. Влиянию стохастических пульсаций пузырька на его трансляционное движение посвящена работа [6]. Этой же проблеме посвящена и настоящая работа.

Рассмотрим движение пузырька, находящегося в безграничной, вязкой, сжимаемой жидкости под действием неоднородного акустического поля вида  $P_\infty = P_0 - P_m \cos(2\pi x/\lambda) \sin(2\pi f t)$ . Динамику такого пузырька можно описать системой двух обыкновенных диф-

ференциальных уравнений второго порядка [5,7-9]

$$R \left(1 - \frac{U}{C}\right) \frac{dU}{dt} + \frac{3}{2} U^2 \left(1 - \frac{U}{3C}\right) - U_t^2/4 = H \left(1 + \frac{U}{C}\right) + \frac{R}{C} \frac{dH}{dt} \left(1 - \frac{U}{C}\right), \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{2}{3} \rho \pi R^3 (U_t - V) \right] = -D(U_t - V) - \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\partial P_\infty}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $x$  — координата,  $t$  — время,  $\lambda$  — длина волны звукового поля,  $P_0$  — статическое давление,  $R$  — текущий радиус пузырька,  $U = dR/dt$  — скорость границы пузырька,  $C = C_\infty [(P+B)/(P_\infty+B)]^{(n-1)/2n}$  — локальная скорость звука в жидкости,  $C_\infty^2 = [n(P_\infty+B)/\rho]$  — скорость звука на бесконечности,  $H = [C_\infty^2/(n-1)] \times \{[(P+B)/(P_\infty+B)]^{(n-1)/2n} - 1\}$  — удельная энтальпия на границе пузырька,  $P = P_g - 2\sigma/R - [4\mu(dR/dt)/R] + P_d$  — давление на границе пузырька,  $P_g = P_{g0}(R_0/R)^{3\gamma} = (P_0 + 2\sigma/R_0 - P_d)R_0/R)^{3\gamma}$  — давление газа внутри пузырька,  $P_{g0}$  — давление газа внутри равновесного пузырька,  $P_d$  — давление насыщенных паров внутри пузырька,  $B$  и  $n$  — константы уравнения состояния жидкости в форме Тэга, равные для воды —  $B = 3 \cdot 10^8$  Па,  $n = 7$ ,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $U_t = dx/dt$  — скорость поступательного перемещения пузырька,  $V$  — скорость жидких частиц.  $D = 6\pi\mu R(1 + 0.065 \text{Re}^{2/3})^{3/2}$  — коэффициент, характеризующий вязкое сопротивление поступательному движению пузырька,  $\text{Re} = [(U_t - V)2\rho R/\mu]$  — число Рейнольдса. Путем замены переменных  $R = R(t)/R_0$ ,  $\tau = ft$ ,  $\varepsilon = P_m/P_0$ ,  $x = x/\lambda$  эти уравнения приводятся к безразмерному виду. Все численные расчеты системы уравнений (1), (2) выполнены для пузырьков, находящихся в воде при температуре 20°C. Показатель политропы принят  $\gamma = 4/3$ , т.е. рассматриваются адиабатические пульсации пузырька. Параметрами

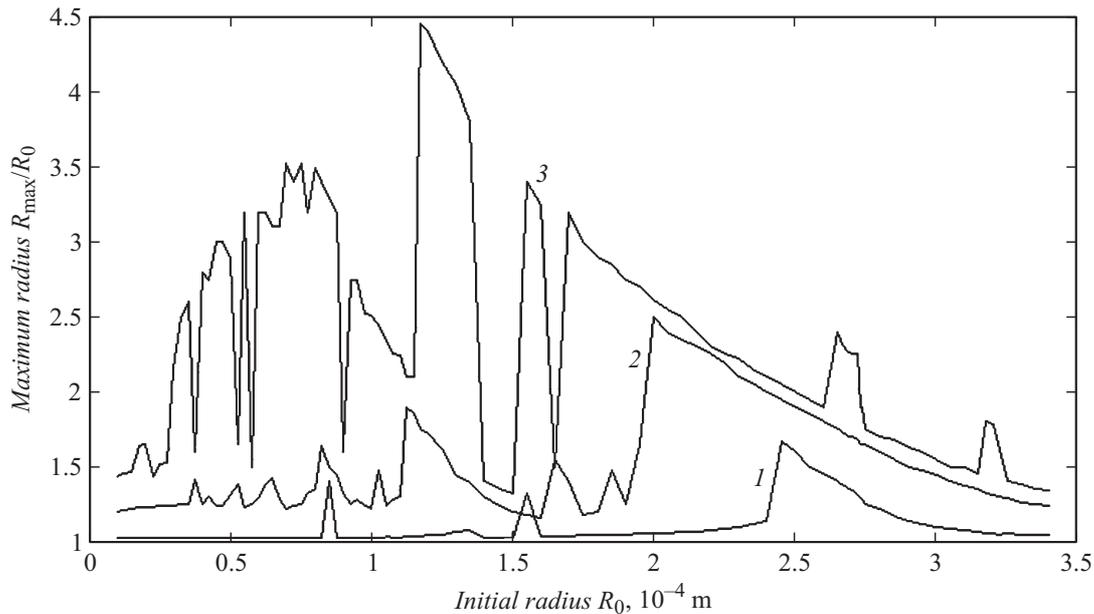
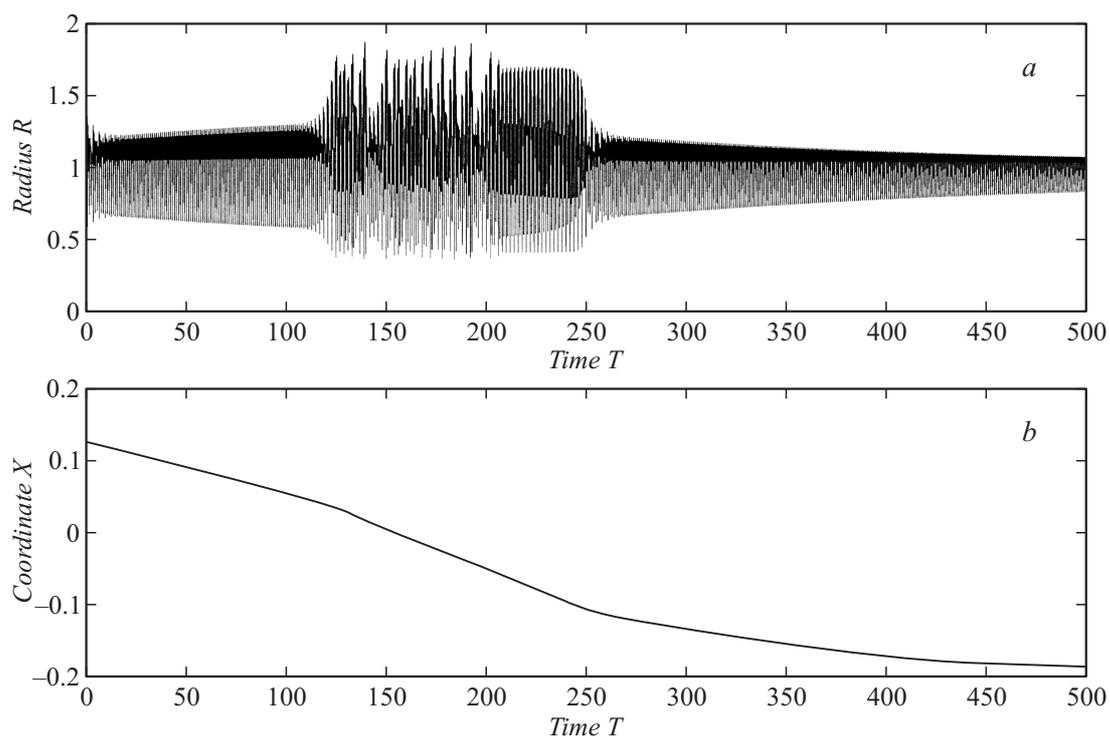


Рис. 1. Резонансные кривые пульсаций пузырька ( $f = 11800$  Hz, 1 —  $\varepsilon = 0.1$ , 2 —  $0.567$ , 3 —  $0.8$ ).

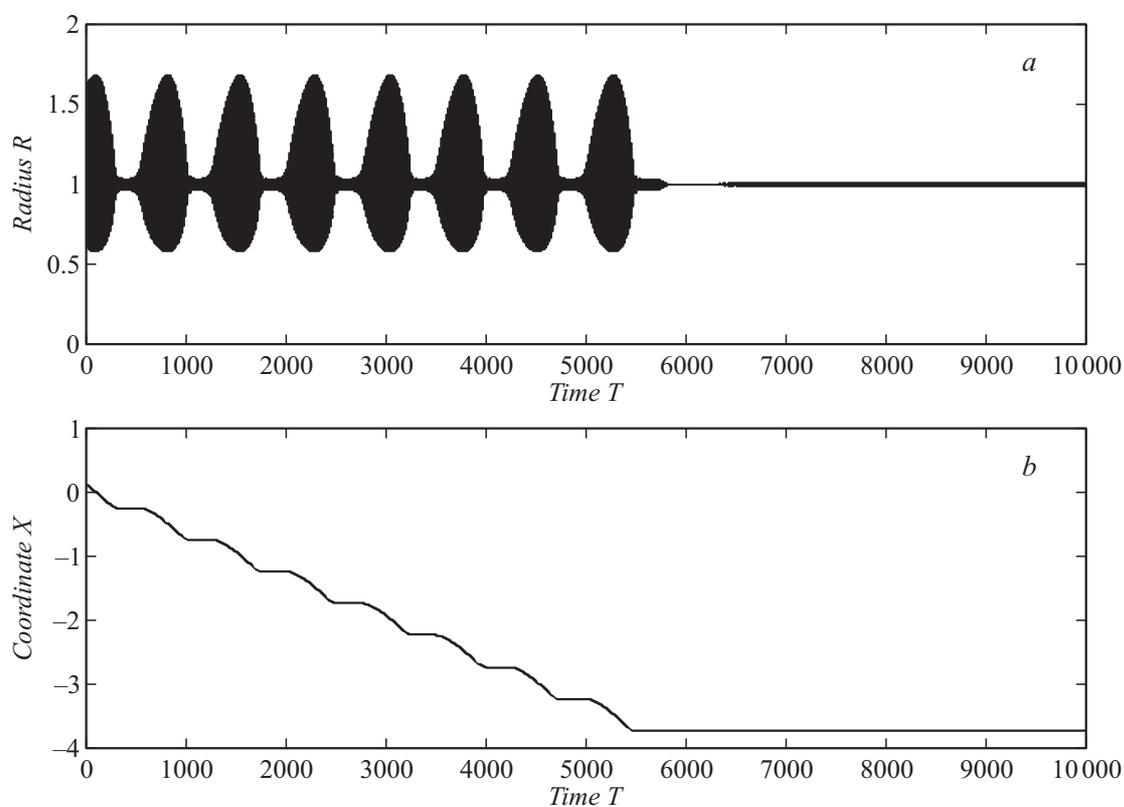
являются начальный радиус пузырька  $R_0$ , амплитуда возбуждающего поля  $\varepsilon = P_m/P_0$  и частота  $f$ . Расчеты проводились для таких амплитуд звукового поля, что минимальный радиус пузырька при сжатии был больше  $0.1R_0$ . Все вычисления проводились при следующих начальных условиях:  $R(0) = R_0$ ,  $dR(0)/dt = 0$ ,  $x(0) = \lambda/8$ ,  $dx/dt(0) = 0$ . Вычисления проводились для начальных радиусов пузырька от  $R_0 = 0.5 \cdot 10^{-4}$  до  $3.5 \cdot 10^{-4}$  м с шагом  $0.05 \cdot 10^{-4}$  м. В необходимых случаях этот шаг изменялся до нужной величины. Акустическое поле имело следующие параметры: амплитуда  $\varepsilon = 0.8$ , частота  $f = 11\,800$  Hz. Пузырек помещался в такую точку акустического поля, где  $\varepsilon = 0.567$  ( $x(0) = \lambda/8$ ). Перемещаясь по пространству, пузырек последовательно подвергался действию акустического поля с амплитудой от  $\varepsilon = 0$  до  $\varepsilon = 0.8$ . Для того чтобы понять, в каких резонансных условиях находился пузырек, было построено семейство резонансных кривых для неподвижного в смысле трансляционного движения пузырька. Для этого численно интегрировалось уравнение (1) без члена  $U_i^2/4$  при начальных условиях:  $R(0) = R_0$ ,  $dR(0)/dt = 0$  и для значений  $R_0$  от  $0.5 \cdot 10^{-4}$  до  $3.5 \cdot 10^{-4}$  м. Это семейство резонансных кривых приведено на рис. 1. По оси абсцисс отложены значения начального радиуса пузырька  $R_0(m)$ , а по оси ординат отложены безразмерные значения максимального значения радиуса пузырька  $R_{\max}/R_0$  при его пульсациях на установившемся (стационарном) участке движения. На семействе резонансных кривых видны все основные свойства нелинейных резонансов — присутствует основной резонанс, а также гармонические и ультрагармонические резонансы. При достаточно большой амплитуде возбуждающего акустического поля  $\varepsilon = 0.8$  резонансная кривая в области основного

резонанса имеет несколько особенностей. В районе основного резонанса в области значений  $R_0$  около  $1.3\text{--}1.5 \cdot 10^{-4}$  и  $1.6\text{--}1.7 \cdot 10^{-4}$  м имеются „провалы“, но порядок пульсаций в этих „провалах“ остается  $n/m = 1/1$  (здесь  $n$  — количество пульсаций, которое совершает пузырек за  $m$  периодов возбуждающего поля и  $mT = T_R$  — время установления периодического движения пузырька, т.е. период пульсаций пузырька,  $T = 1/f$ ). Для значений начального радиуса пузырька  $R_0$ , лежащих в областях около  $2.6\text{--}2.75 \cdot 10^{-4}$  и  $3.2\text{--}3.3 \cdot 10^{-4}$  м, находятся „подъемы“. Порядок пульсаций на первом и втором „подъемах“ составляет  $n/m = 4/5$ . Это говорит о том, что в области основного резонанса при этих значениях  $R_0$  возбуждаются „экзотические“ субгармонические резонансы, порядок которых равен  $n/m = 4/5$ .

Пузырьки, начальные радиусы которых являлись „дорезонансными“, двигаясь поступательно, возбуждались на гармонических и ультрагармонических резонансах и выходили на установившиеся участки движения в точки с различными координатами  $x/\lambda$  в полном соответствии с [7]. Пузырек, „перемещаясь“ с одной резонансной кривой на другую, проходил через зоны стохастических пульсаций. При прохождении пузырька через пучность давления ( $x = 0$ ) он попадает в область стохастических пульсаций, порядок которых  $n/m = 2/1$ , и возбуждается вблизи второго гармонического резонанса (рис. 2). Пузырек за один период возбуждающего поля совершает две пульсации, один раз в фазе с полем, а другой в противофазе. В результате сначала пузырек смещается в пучность, а затем в узел давления. Эти смещения небольшие, и стохастический характер пульсаций не приводит к кардинальному изменению характера трансляционного движения.



**Рис. 2.**  $R_0 = 1.5 \cdot 10^{-4}$  м, *a* — зависимость безразмерного радиуса пузырька  $R$  от времени  $T$ , *b* — зависимость безразмерной координаты поступательного движения  $x$  от времени  $T$ .



**Рис. 3.**  $R_0 = 2.736 \cdot 10^{-4}$  м, *a* — зависимость безразмерного радиуса пузырька  $R$  от времени  $T$ , *b* — зависимость безразмерной координаты поступательного движения  $x$  от времени  $T$ .

Пузырьки с начальными радиусами от  $2.4 \cdot 10^{-4}$  и до  $2.7361 \cdot 10^{-4}$  м лежат в области основного резонанса и совершают крупномасштабные осцилляции. При начальных значениях радиуса пузырька, лежащих в области значений порядка  $R_0 = 2.736 \cdot 10^{-4}$  м ( $2.735989$  м  $\leq R_0 \leq 2.73609$  м) происходит срыв крупномасштабных осцилляций, что демонстрирует рис. 3. В начальный момент времени пузырек находится в области основного резонанса (кривая 2 на рис. 1). Он перемещается в пучность давления, совершая пульсации, порядок которых равен  $n/m = 1/1$ . В пучности давления, где амплитуда акустического поля становится максимальной ( $\varepsilon = 0.8$ ), он попадает (кривая 3 на рис. 1) в область стохастических пульсаций (на кривой 3 рис. 1 — это „свал“ первого „подъема“), где порядок пульсаций равен  $n/m = 4/5$ . Становясь „зарезонансным“ пузырек поворачивает в узел давления, проходит через узел давления, снова идет в пучность, начиная совершать крупномасштабные осцилляции. Вид такого движения приведен на рис. 3. Пузырек совершает восемь крупномасштабных осцилляций (рис. 3, а), а затем его пространственное периодическое движение срывается и он уходит в сторону узла давления, где и занимает некоторое положение вблизи узла акустического поля (рис. 3, б).

Срыв крупномасштабных пространственных осцилляций, по всей видимости, можно объяснить следующим образом. Пузырек, перемещаясь по пространству, совершает пульсации порядка  $n/m = 1/1$ , в пучности давления попадает в область стохастических пульсаций, где происходит „расбалансировка“ его собственной частоты с возбуждающей частотой внешнего акустического поля. В некоторый момент времени такой „расбалансировки“ хватает для того, чтобы произошел срыв периодического пространственного движения.

## Список литературы

- [1] *Корец В.Л., Мельников Н.П., Фрайман М.Е.* // Вопросы судостроения. Сер. Акустика. 1983. Т. 17. С. 62–67.
- [2] *Корец В.Л., Мельников Н.П., Агрест Э.М., Ильичев В.И.* // ДАН СССР. 1985. Т. 282. С. 571–575.
- [3] *Lyichev V.I., Koretz V.L., Melnikov N.P.* // Ultrasonics. 1989. Vol. 27. P. 357–361.
- [4] *Ильичев В.И., Корец В.Л., Мельников Н.П.* // Акустический журн., Т. 40. № 2. С. 257–261.
- [5] *Агрест Э.М., Корец В.Л.* // Акустический журн. 1978. Т. 24. № 1. С. 257–261.
- [6] *Ахатов И.Ш., Коновалова С.И.* // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69. С. 636–647.
- [7] *Агрест Э.М., Кузнецов Г.Н.* // Акустический журн. 1973. Т. 19. № 3. С. 321–326.
- [8] *Ильичев В.И., Канзеба А.А., Кузнецов Г.Н., Листров А.Т.* // Тр. АКИН. 1969. Вып. 6. С. 136–144.
- [9] *Буланов В.А.* Введение в акустическую спектроскопию микрогетерогенных жидкостей. Владивосток: Дальнаука, 2001. 279 с.