

01

## Стохастическая синхронизация в пространственно распределенной системе с $1/f$ -спектром мощности

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН,  
620016 Екатеринбург, Россия  
e-mail: koverda@itp.uran.ru

(Поступило в Редакцию 16 июня 2015 г.)

Численными методами исследована пространственно распределенная система двух нелинейных стохастических уравнений, моделирующая  $1/f$ -флуктуации при взаимодействии неравновесных фазовых переходов. Показано, что при достаточно большой интенсивности белого шума в системе возникает индуцированная шумом синхронизация, представляющая собой неравновесный фазовый переход. Критической точке индуцированного шумом перехода соответствует максимум информационной энтропии.

### Введение

Устойчивые физические системы и процессы характеризуются лоренцевским спектром мощности флуктуаций, при котором низкочастотные пульсации не зависят от частоты, а высокочастотные спадают обратно пропорционально квадрату частоты. Флуктуации, как правило, малы и подчиняются гауссовскому распределению. Релаксация возмущений в таких процессах происходит по спадающей экспоненте. Энтропия устойчивого состояния максимальна. В сложных статистических системах, находящихся далеко от равновесия, могут самопроизвольно возникать большие флуктуации, значительная часть энергии которых связана с медленными процессами и накапливается на низких частотах. В таких системах возможны крупномасштабные высокоэнергетические выбросы и спектры мощности имеют вид, обратно пропорциональный частоте ( $1/f$ -спектр) [1]. Другой характерной особенностью больших флуктуаций является масштабно инвариантная функция распределения, которая имеет степенные „хвосты“ [2]. При этом релаксация возмущений спадает не экспоненциально, а по степенному закону. Такая ситуация имеется в термодинамической критической точке фазового перехода жидкость–пар. Масштабная инвариантность флуктуаций термодинамических величин вблизи критической точки [3] определена условиями сближения свойств различных фаз и требует точной настройки и больших времен релаксации. В отличие от термодинамической критической точки неравновесные процессы с большими флуктуациями показывают их устойчивую пространственную и временную масштабную инвариантность без тонкой подстройки параметров. Поэтому возникновение  $1/f$ -флуктуаций часто связывают с концепцией самоорганизованной критичности [2,4], которая описывает лавинную динамику и применяется для демонстрации критического поведения в большом числе компьютерных моделей.

Для математического описания случайных процессов с  $1/f$ -спектром мощности применяют дробное интегрирование белого шума [5], но его трудно связать с физическими свойствами системы. Флуктуации в широком

диапазоне масштабов также развиваются в турбулентных потоках жидкости [6].

Возникновение экстремальных флуктуаций возможно также под действием белого шума при взаимодействующих неравновесных фазовых переходах [7]. Такие флуктуации наблюдались экспериментально в кризисных режимах кипения [7,8]. Экстремальные флуктуации в сложных системах при наличии внешнего детерминированного воздействия могут быть связаны со стохастическим резонансом, при котором отклик системы на регулярное воздействие усиливается при добавлении шумового сигнала [9]. Численное моделирование возникновения стохастического резонансного отклика в системе с  $1/f$ -шумом проведено в [10,11]. В работе [12] приведены результаты экспериментального наблюдения стохастического резонанса при переходе от пузырькового режима кипения к пленочному. Наряду со стохастическим резонансом в сложных системах возможна стохастическая синхронизация [9]. Настоящая работа посвящена исследованию возможности возникновения стохастической синхронизации в пространственно распределенной системе с  $1/f$ -шумом.

### $1/f$ -флуктуации при взаимодействии фазовых переходов

В теплофизических системах с фазовыми переходами экстремальные флуктуации проявляются как термические пульсации в критических и переходных режимах теплопереноса, и при описании процессов с экстремальными флуктуациями используется система нелинейных стохастических уравнений, описывающая взаимодействующие неравновесные фазовые переходы [13,14]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi\psi^2 + \psi + \xi_1(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — динамические переменные,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — гауссовский белый шум с  $\langle \xi_k(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_k(t) \xi_l(t') \rangle =$

$= \sigma^2 \delta_{k,l} \delta(t-t')$ ,  $k, l = 1, 2$  и  $\sigma^2$  — дисперсия шума. Критичность системы (1) соответствует такому уровню белого шума, который соответствует индуцированному шумом переходу [15,16]. Случайный процесс, описываемый системой (1), имеет  $1/f$ -спектр мощности флуктуаций. При этом накапливается энергия флуктуаций на низких частотах, и процесс характеризуется вспышками и лавинной динамикой. Воздействие на систему (1) периодическим возмущением показало наличие стохастического резонансного отклика, особенно сильного при низких частотах [10,11].

Точечная система (1) может быть обобщена на пространственно распределенный случай [17,18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varphi \psi^2 + \psi + \xi_1(x, t), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\psi \varphi^2 + \varphi + \xi_2(x, t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\langle \xi_k(x, t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_k(x, t) \xi_l(x', t') \rangle = \sigma^2 \delta_{k,l} \delta(x-x') \times \delta(t-t')$ ,  $k, l = 1, 2$  и  $D$  — коэффициент диффузии.

Для численного интегрирования система (2) записывается в виде [18]

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1,j} &= \left( \varphi_{i,j} + \frac{D}{2} \varphi_{i,j-1} \Delta t + \frac{D}{2} \varphi_{i,j+1} \Delta t + \psi_{i,j} \Delta t \right) \\ &\times [1 + (\psi_{i,j})^2 \Delta t + D \Delta t]^{-1} + \sigma_e (p_i)_j (\Delta t)^{0.5}, \end{aligned}$$

$$\psi_{i+1,j} = (\psi_{i,j} + \varphi_{i,j} \Delta t) [1 + (\varphi_{i,j})^2 \Delta t]^{-1} + \sigma_e (q_i)_j (\Delta t)^{0.5}, \quad (3)$$

где  $p_p$  и  $q_i$  — последовательности гауссовских случайных чисел с нулевым средним и единичным стандартным отклонением. Последовательности случайных чисел моделируют белый шум и должны различаться по направлению времени и пространства. Дисперсия гауссовских случайных чисел  $\sigma_e^2$  в уравнениях системы (3) моделирует интенсивность белого шума. Она связана с дисперсией белого шума  $\sigma^2$  соотношением  $\sigma_e^2 = \sigma^2 \Delta t$ . Масштаб пространственного разбиения  $\Delta x$  в системе (3) выражен через временной шаг интегрирования  $\Delta t$  и включен в коэффициент диффузии  $D$ , поэтому  $D \sim (\Delta t)^2$ , и это следует учитывать при изменении шага интегрирования  $\Delta t$ . Для системы (3) использовались циклические граничные условия. Поскольку в пространственно распределенной системе (2) имеется первая производная по времени и вторая по пространству, то при интегрировании временных точек должно быть больше, чем пространственных.

На рис. 1 приведены временные спектры  $S_\varphi(f) \sim 1/f$ ,  $S_\psi(f) \sim 1/f^2$ , а также пространственный спектр  $S_\varphi(k)$ , соответствующие  $\sigma_e = 0.6$ . Для начальных условий была выбрана гармоническая периодика:  $\varphi_{0,j} = A \times \cos(2\pi k_0 j K^{-1})$  и  $\psi_{0,j} = A \cos(2\pi k_0 j K^{-1})$ . Интегрирование было проведено для системы (3), содержащей  $K = 128$  пространственных точек при  $N = 4096$  шагах интегрирования  $\Delta t = 0.1$  с коэффициентом диффузии

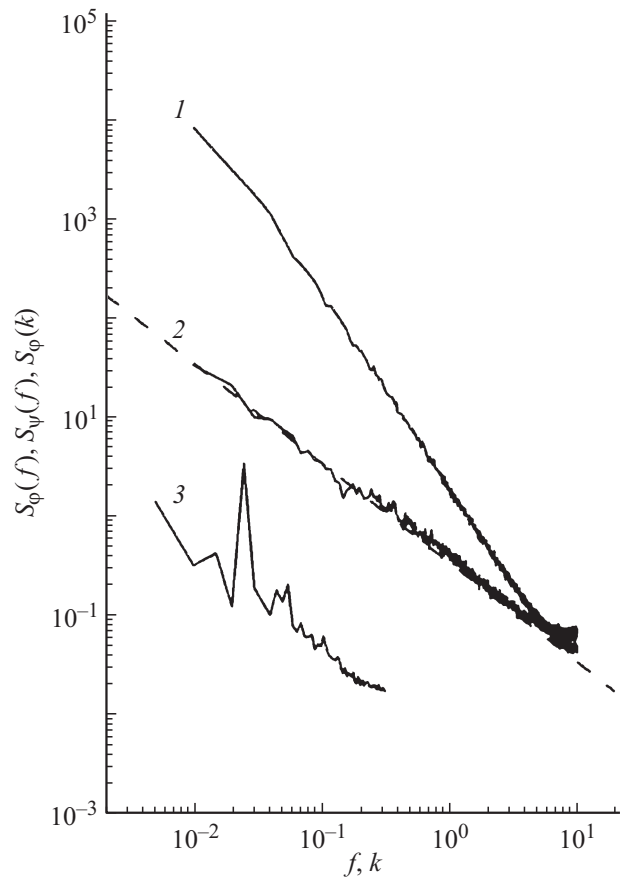


Рис. 1. Спектры мощности  $S_\psi(f)$  — 1,  $S_\varphi(f)$  — 2 и пространственный спектр  $S_\varphi(k)$  — 3. Штриховой линией показана зависимость  $\sim 1/f$ . Интенсивность белого шума  $\sigma_e = 0.6$ , волновое число  $k_0 = 5$ .

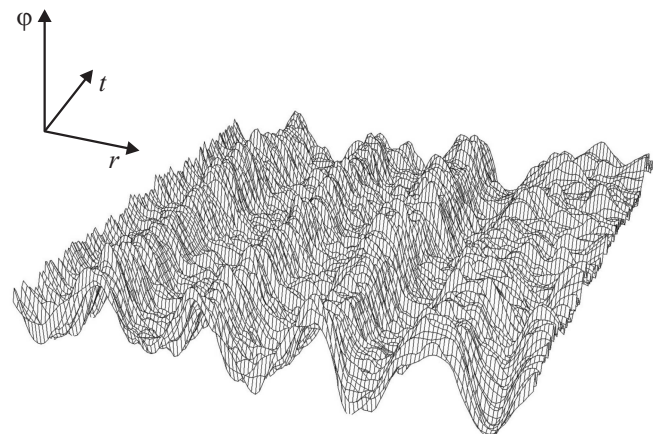


Рис. 2. Пространственно временная развертка флуктуаций.

$D = 5$  и начальным волновым числом  $k_0 = 5$ . Пик и от других начальных условий (с другой амплитудой  $A$  и другим начальным волновым вектором  $k_0$ ) на спектральной зависимости  $S_\varphi(k)$  сохраняется при такой интенсивности белого шума. На рис. 2 приведена пространственно временная развертка флуктуаций. Рис. 2

показывает, что периодика начальных условий при этой интенсивности белого шума сохраняется на протяжении всего расчета. С дальнейшим увеличением интенсивности белого шума происходит укрупнение пространственных флуктуаций и приблизительно при интенсивности белого шума  $\sigma_e \geq 0.9$  пространственный спектр переменной  $\varphi$  становится обратно пропорциональным волновому числу:  $S_\varphi(k) \sim 1/k$ .

### Индукцированная шумом синхронизация

В пространственно распределенных динамических системах, содержащих аддитивный пространственно-временной шум, может наблюдаться стохастическая или индуцированная шумом синхронизация. Она возникает из-за взаимодействия детерминированной и стохастической динамики и является в последнее время предметом многочисленных исследований физических, химических, биологических и других систем, описывающих нелинейные эффекты [19–24].

Индукцированная шумом синхронизация означает, что при воздействии случайного сигнала траектории системы с различными начальными условиями начинают сближаться. По аналогии с системами низкой размерности индуцированная шумом синхронизация пространственно распределенной системы может быть определена сравнением двух траекторий системы, взятых при различных начальных условиях под воздействием заданной интенсивности шума. При диагностике стохастической синхронизации в зависимости от интенсивности шума рассчитывается наибольший показатель Ляпунова. Он становится отрицательным, если происходит индуцированная шумом синхронизация [21]. Это означает, что система „забывает“ начальные условия.

В настоящей работе для выявления индуцированной шумом синхронизации в системе (3), вычислялась разность динамических переменных  $\varepsilon(x, t) = \psi(x, t) - \varphi(x, t)$  при различных интенсивностях шума  $\sigma_e$ .

На рис. 3 приведены плотности вероятности распределений  $P(\varepsilon)$  для различных значений  $\sigma_e$ , усредненные по пространственным точкам, для волнового числа  $k_0 = 5$  и коэффициента диффузии  $D = 5$ . Из рис. 3 видно, что при малых интенсивностях шума ( $\sigma_e \leq 0.6$ ) распределения  $P(\varepsilon)$  имеют бимодальный вид с двумя максимумами. С увеличением интенсивности шума максимумы сближаются и, начиная с некоторой интенсивности ( $\sigma_e \geq 0.6$ ), распределение  $P(\varepsilon)$  имеет один максимум. На рис. 4 приведены зависимости  $\varepsilon_{\max}(\sigma_e)$  координат максимумов распределений  $P(\varepsilon)$  от амплитуды шума  $\sigma_e$ . Различные точки на рис. 4 соответствуют различным наборам случайных чисел  $p_i$  и  $q_i$  в системе (3). Точка  $\sigma_e^c \approx 0.6$ , в которой происходит переход от бимодального к одномодальному распределению плотности вероятности  $P(\varepsilon)$ , является точкой фазового перехода второго рода или критической точкой. Изменение значений волновых чисел от 1 до 10 и коэффициентов диффузии от 2 до 20

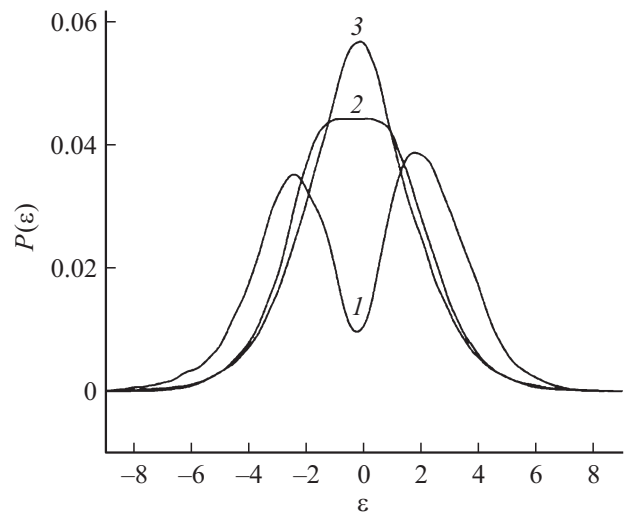


Рис. 3. Плотности вероятности распределений  $P(\varepsilon)$  для различных значений  $\sigma_e$ , усредненные по пространственным точкам: 1 —  $\sigma_e = 0.4$ , 2 —  $\sigma_e = \sigma_e^c = 0.6$ , 3 —  $\sigma_e = 0.8$ .

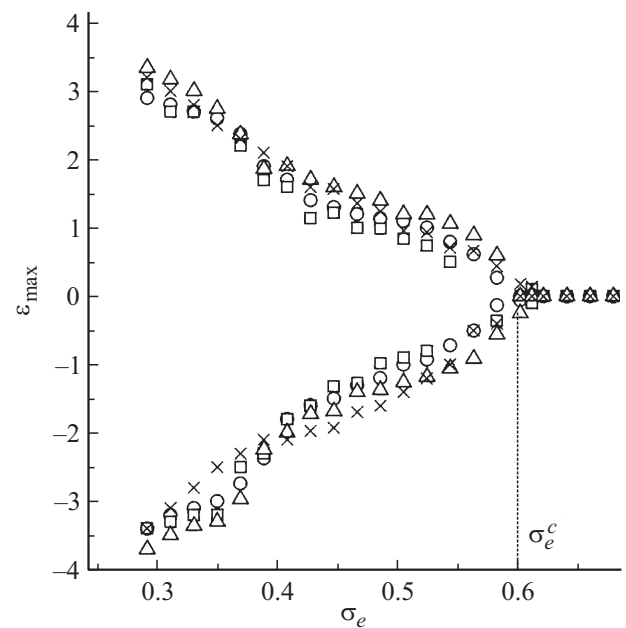


Рис. 4. Зависимости координат максимумов распределений  $P(\varepsilon)$  от амплитуды шума, усредненные по пространственным точкам. Различными точками обозначены четыре набора случайных чисел  $p_i$  и  $q_i$  в системе (3).

качественно не изменяло приведенных зависимостей и слабо влияло на положение критической точки.

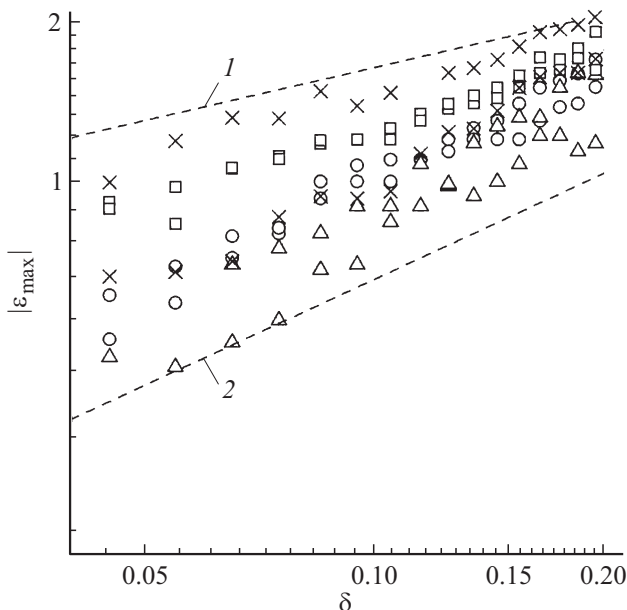
В окрестности фазового перехода второго рода зависимость параметра порядка от степени удаленности от критической точки имеет степенной вид [3]. Нами были вычислены зависимости модуля параметра порядка  $|\varepsilon_{\max}|$ , соответствующего максимумам функции распределения  $P(\varepsilon)$ , от степени докритичности системы, определяемой разностью  $\delta = \sigma_e^c - \sigma_e$ , где  $\sigma_e^c$  — критическая интенсивность белого шума. Такие зависимости для раз-

личных наборов случайных чисел  $p_i$  и  $q_i$  приведены на рис. 5. Прямыми линиями на рис. 3 показаны зависимости  $\sim \delta^{2/3}$  и  $\sim \delta^{1/3}$ . Из рис. 5 видно, что поведение  $|\varepsilon_{\max}|$  в окрестности критической точки можно приближенно описать степенной зависимостью  $|\varepsilon_{\max}| \sim \delta^\beta$ , где показатель  $\beta$  лежит в интервале  $1/3 \leq \beta \leq 2/3$ . Скейлинговый характер зависимости параметра порядка от степени удаленности от критической точки свидетельствует о критичности неравновесного фазового перехода.

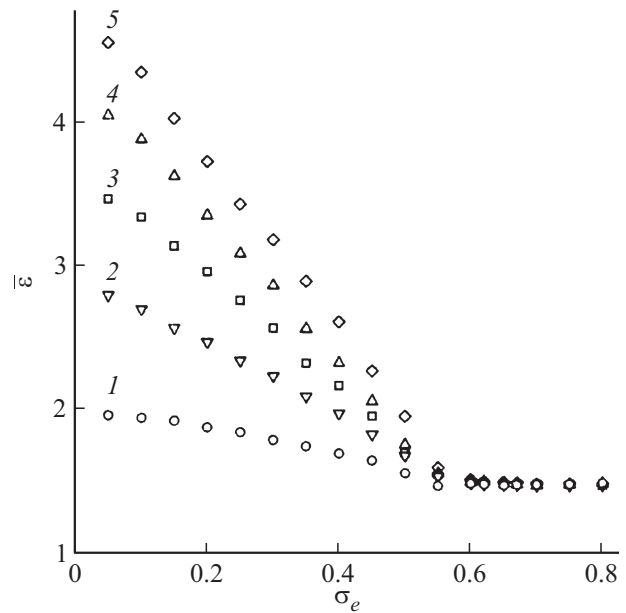
Для разных значений интенсивности шума  $\sigma_e$  было вычислено среднее значение модуля разности динамических переменных  $\bar{\varepsilon} = \langle |\psi(x, t) - \varphi(x, t)| \rangle$ :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{KN} \sum_i \sum_j |\psi_{i,j} - \varphi_{i,j}|. \quad (4)$$

Зависимость  $\bar{\varepsilon}(\sigma_e)$  для различных значений волнового числа  $k_0$  приведена на рис. 6. Увеличение интенсивности белого шума  $\sigma_e$  приводит к уменьшению средней разности динамических переменных  $\bar{\varepsilon}$  для всех значений волнового числа  $k_0$ , которые использовались в расчетах. Для значений  $k_0 \geq 5$  расчетные точки ложатся на одну кривую. Спад  $\varepsilon$  прекращается при величине  $\varepsilon_e^c \approx 0.6$ , и дальнейшее увеличение интенсивности белого шума не меняет  $\bar{\varepsilon}$ , которая остается постоянной и примерно равной  $\varepsilon \approx 1.5$ . Заметим, что при  $\sigma_e \geq 0.6$  в системе (3) спектр переменной  $\varphi$  становится обратно пропорциональным частоте:  $S_\varphi = 1/f$ , а спектр переменной  $\psi$  становится обратно пропорциональным квадрату частоты:  $S_\psi = 1/f^2$ . Использование в расчетах других значений коэффициента диффузии  $D$  или амплитуды начальных условий  $A$  ничего существенно не меняет в зависимости  $\bar{\varepsilon}(\sigma_e)$ . При  $\sigma_e < \sigma_e^c$  поведение  $\bar{\varepsilon}(\sigma_e)$  зависит от



**Рис. 5.** Зависимость модуля параметра порядка  $|\varepsilon_{\max}|$ , соответствующего максимумам функции распределения  $P(\varepsilon)$ , от степени удаленности от критической точки  $\delta$ . 1 — зависимость  $\sim \delta^{1/3}$ , 2 — зависимость  $\sim \delta^{2/3}$ .



**Рис. 6.** Зависимость средней разности динамических переменных  $\bar{\varepsilon}$  от интенсивности шума  $\sigma_e$  для различных значений волнового числа  $k_0$  (значения  $k_0$  указаны на рисунке). Амплитуда  $A = 0.5$ .

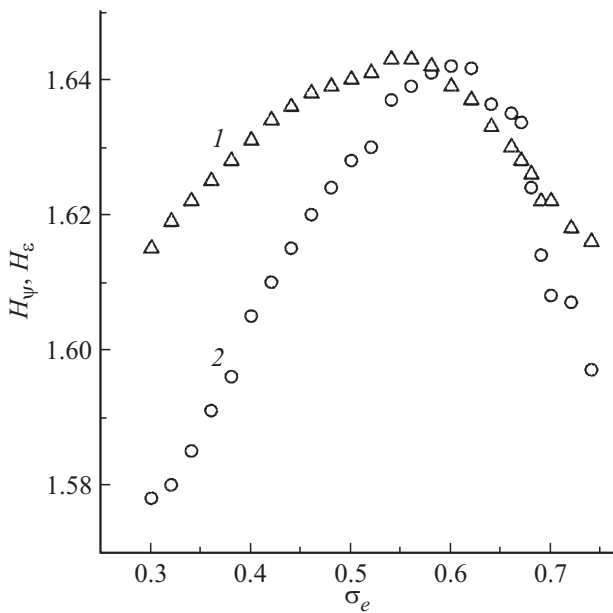
начальных условий (различные  $k_0$ ). При  $\sigma_e > \sigma_e^c$  система „забывает“ начальные условия. Изменение характера зависимости  $\bar{\varepsilon}(\sigma_e)$ , приведенное на рис. 6, связано с неравновесным фазовым переходом, индуцированным шумом.

Найденный неравновесный фазовый переход второго рода означает стохастическую синхронизацию динамических переменных пространственно распределенной системы при достижении достаточно большой интенсивности белого шума.

При моделировании флуктуационных процессов стохастическими уравнениями критерием устойчивости решения может быть принцип максимума энтропии. Из решений стохастических уравнений находят плотности вероятности распределений переменных, по которым определяется информационная энтропия Гиббса–Шеннона [25,26]:

$$H = - \sum_n P_n \log(P_n). \quad (5)$$

Плотности вероятности распределений  $P_n$  должны быть нормированы:  $\sum_n P_n = 1$ . Индекс относится к последовательности разбиения аргумента функции распределения по величине. В статистической механике принцип максимума энтропии Гиббса–Шеннона соответствует гауссовскому распределению флуктуаций. Функция распределения переменной  $\psi$  имеет гауссовские „хвосты“ в отличие от функции распределения переменной  $\varphi$ , спадающей при больших  $\varphi$  по степенному закону. Поэтому для анализа устойчивости случайного процесса может быть выбрано распределение переменной  $\psi$ . В [27] показано,



**Рис. 7.** Зависимость энтропий распределений от амплитуды шума  $\sigma_\epsilon$ : 1 —  $H_\psi$ , 2 —  $H_\epsilon$ .

что индуцированному шумом переходу в системе (2) соответствует максимум информационной энтропии для функции распределения  $P(\psi^2)$ .

На рис. 7 приведена зависимость информационной энтропии  $H_\psi$ , вычисленной для функции распределения  $P(\psi^2)$  в зависимости от амплитуды шума  $\sigma_\epsilon$  (треугольники). Максимум на этой зависимости соответствует критическому поведению системы с  $1/f$ -спектром мощности [27]. Была вычислена информационная энтропия  $H_\epsilon$  для функции распределения модуля параметра порядка  $P(|\epsilon|)$  при различных интенсивностях шума (кружки на рис. 7). Критической точке индуцированного шумом фазового перехода, связанного со стохастической синхронизацией динамических переменных, также отвечает максимум информационной энтропии.

## Заключение

Таким образом, проведено численное исследование системы двух нелинейных стохастических уравнений, моделирующей  $1/f$ -флуктуации при взаимодействии неравновесных фазовых переходов с учетом пространственного распределения флуктуаций. При увеличении интенсивности аддитивного шума в системе обнаруживается стохастическая синхронизация, представляющая собой фазовый переход. Критической точке перехода отвечает  $1/f$ -спектр мощности и наблюдается максимум информационной энтропии.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 15-08-02210а и Программы фундаментальных исследований УрО РАН № 15-1-2-7.

## Список литературы

- [1] Климонтвич Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995. (*Klimontovich Yu.L. Statistical Theory of Open Systems. Dordrecht. Kluwer, 1995.*)
- [2] Bak P. How Nature Works. The Science of Self-Organized Criticality. Berlin: Springer, 1996.
- [3] Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. (*Patashinskii A.Z., Pokrovskii V.L., Fluctuation Theory of Phase Transitions, Oxford. Pergamon Press, 1979.*)
- [4] Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A 1988. Vol. 38. N 1. P. 364–374.
- [5] Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. // SLAM Rev. 1968. Vol. 10. P. 422.
- [6] Колмогоров А.Н. // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303. (*Kolmogorov A.N. // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1941. Vol. 30. P 299–303.*)
- [7] Skokov V.N., Koverda V.P., Reshetnikov A.V., Skripov V.P., Mazheiko N.A., Vinogradov A.V. // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 1879–1883.
- [8] Скоков В.Н., Коверда В.П., Решетников А.В. // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. Вып. 8. С. 590–593. (*Skokov V. N., Koverda V.P., Reshetnikov A.V. // JETP LETTERS. 1999. Vol. 69. N 8. P. 636–639.*)
- [9] Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. // УФН. 1999. Т. 169. № 1. С. 7–39. (*Anishchenko V.S., Neiman A.B., Moss F., Schimansky-Geier L. // Uspekhi fizicheskikh nauk. 1999. Vol. 169. P. 7.*)
- [10] Скоков В.Н., Коверда В.П. // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 5. С. 9–13. (*Skokov V.N., Koverda V.P. // Technical Physics. 2014. Vol. 59. N 5. P. 637–641.*)
- [11] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ДАН. 2013. Т. 452. № 6. С. 617–621. (*Koverda V.P., Skokov V.N. // Doklady Physics. 2013. Vol. 58. N 10. P. 433–437.*)
- [12] Skokov V.N., Koverda V.P., Vinogradov A.V., Reshetnikov A.V. // Physica. A. 2015. Vol. 430. P. 65–72.
- [13] Коверда В.П., Скоков В.Н., Скрипов В.П. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. № 5. С. 1748–1757. (*Koverda V.P., Skokov V.N. // J. Experimental and Theoretical Physics. 1998. Vol. 86. N 5. P. 953–958.*)
- [14] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 10. С. 1–7. (*Koverda V.P., Skokov V.N. // Technical Physics. 2000. Vol. 45. N 10. P. 1231–1237.*)
- [15] Коверда В.П., Скоков В.Н. // Доклады АН. 2002. Т. 386. Вып. 2. С. 187–189. (*Koverda V.P., Skokov V.N. // Doklady Physics. 2002. Vol. 47. N 9. P. 654–656.*)
- [16] Koverda V.P., Skokov V.N. // Physica A. 2005. Vol. 346. N 3/4. P. 203–216.
- [17] Скоков В.Н., Коверда В.П., Решетников А.В. // ЖЭТФ 2001. Т. 119. № 3. С. 613–620. (*Skokov V.N., Koverda V.P., Reshetnikov A.V. // J. Experimental and Theoretical Physics. 2001. Vol. 92. N 3. P. 535–541.*)
- [18] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 9–15. (*Koverda V.P., Skokov V.N. // Technical Physics. 2010. Vol. 55. N 4. P. 442–448.*)
- [19] Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Ижевск: РХД, 2003.
- [20] Fahy S., Namann D.R. // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol. 69. P. 761–764.
- [21] Pikovsky A.S. // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 165. P. 33–36.

- [22] *Herzel H., Freund J.* // Phys. Rev. E 1995. Vol. 1995. P. 3238.
- [23] *Zhou Ch., Kurths J.* // 2003. Chaos. Vol. 13. N 1. P. 401–409.
- [24] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.A.* // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. P. 036215.
- [25] *Shannon C.* // Bell Syst. Tech. 1948. Vol. 27. P. 379–423.
- [26] *Башикиров А.Г.* // ТМФ. 2006. Т. 149. № 2. С. 299–317. (*Bashkirov A.G.* Theoretical and Mathematical Physics. 2006. Vol. 149. Issue 2. P. 1559–1573.)
- [27] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 1–6. (*Koverda V.P., Skokov V.N.* // Technical Physics. 2011. Vol. 56. N 11. P. 1539–1545.)