

03

Излучение электромагнитных волн осциллирующей сильно заряженной каплей

© А.И. Григорьев, Н.Ю. Колбнева, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 16 сентября 2015 г. В окончательной редакции 11 января 2016 г.)

Найдены аналитические выражения для напряженности электрического поля в окрестности осциллирующей сильно заряженной капли невязкой электропроводной жидкости и интенсивности электромагнитного излучения от нее в линейном по амплитуде возмущения рельефа поверхности капли приближении. Проведены оценки интенсивности излучения по порядку величины. Показано, что интенсивность электромагнитного излучения от шаровой молнии, объекта, который может моделироваться заряженной каплей, не связана с осцилляциями ее поверхности.

Введение

Электромагнитное излучение заряженных капель грозных облаков уже давно стало предметом исследования (см., например, [1–4]). Тем не менее большая часть исследований выполнена для слабо заряженных капель, что представляется странным, так как физический механизм сбора электрических зарядов с отдельных капель грозных облаков обычной молнией подразумевает электрогидродинамическую неустойчивость капель [5] по крайней мере в течение разряда. Помимо прочего, наличие электромагнитного излучения от осциллирующих заряженных облачных капель представляет интерес уже в связи с проблемами радиолокационного зондирования метеорологических объектов [6]. Поэтому целесообразно провести исследование излучения сильно заряженных (в смысле близости к порогу реализации неустойчивости Релея [7,8]) капель. Этой проблеме и посвящено настоящее исследование.

Постановка задачи

Пусть несущая заряд Q сферическая капля радиуса R невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_1 , коэффициентом поверхностного натяжения σ находится в невязкой несжимаемой среде с проницаемостью ϵ_{ex} и плотностью ρ_2 .

Примем, что в жидкости из-за теплового движения молекул [9] генерируется капиллярное волновое движение весьма малой (тепловой) амплитуды $\xi \propto \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура [9]. При температурах порядка комнатной тепловая амплитуда волн для всех жидкостей меньше ангстрема. Такое волновое движение практически бесконечно малой амплитуды формирует искажение равновесной сферической формы капли $\xi(\theta, \varphi, t)$. Причем $\max |\xi(\theta, \varphi, t)| \ll R$.

Будем решать задачу в сферической системе координат с началом координат в центре масс капли,

ограничиваясь рассмотрением осесимметричных осцилляций. Уравнение возмущенной капиллярным волновым движением поверхности капли можно записать в виде

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t),$$

где $\xi(\theta, t)$ — волновое возмущение поверхности капли.

Движение жидкости в капле и среде будем полагать потенциальным с гидродинамическими потенциалами $\psi_j(\mathbf{r}, t)$: $\mathbf{V}_j \psi_j(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi_j(\mathbf{r}, t)$, где значение индекса $j = 1$ относится к капле, а $j = 2$ — к среде.

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \\ r \rightarrow 0: \psi_1(\mathbf{r}, t) &\rightarrow 0, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \\ P_j(\mathbf{r}, t) &= P_{j0}(\mathbf{r}) - \rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t}, \\ r = R + \xi: \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial n}, \\ \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial n_1} &= \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial n_2} = \frac{\partial \psi(\theta, t)}{\partial n}, \\ \Delta P_0 - \rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{1}{8\pi\epsilon_{\text{ex}}} \left(\frac{Q}{r^2} \right)^2 & \\ - \sigma \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2} (2 + L_\theta) \xi \right) &= 0, \\ (\boldsymbol{\tau} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$L_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ — осесимметричная угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах $P_j(\mathbf{r}, t)$ — гидродинамическое давление в жидкости и среде, P_{j0} — константы интегрирования, ΔP_0 — перепад давлений, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — напряженность электрического поля собственного заряда, $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной к

возмущенной поверхности капли. В качестве малого параметра примем отношение амплитуды волнового возмущения равновесной поверхности капли к радиусу капли. Будем считать, что в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, величины полей скоростей течения жидкостей, вызванных осцилляциями поверхности, имеют тот же порядок малости. Орт нормали к поверхности капли \mathbf{n} с точностью до малых первого порядка определяется выражением

$$\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F| \Big|_{F=0} = \left(\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \xi(\theta, t) \right),$$

$$F(\theta, t) = r - R - \xi(\theta, t) = 0,$$

где \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ — орты сферической системы координат.

Введем также условия неизменности полного объема (следствие несжимаемости жидкости), неподвижности центра масс при осцилляциях, а также условие сохранения заряда капли:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R+\xi(\theta,t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{r} (R + \xi(\theta, t))^2 dr \sin \theta d\theta = 0,$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{n}, \mathbf{E}) (R + \xi(\theta, t))^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_{\text{ex}}},$$

\mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — единичные векторы нормалей на границе раздела, внешние по отношению к капле и среде соответственно.

Решение первого порядка малости

Представим возмущение равновесной сферической поверхности капли $\xi(\theta, t)$ в виде

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu) \exp(-i\omega_n t), \quad \mu \equiv \cos \theta,$$

ω_n — частота капиллярных осцилляций n -й моды капли, α_n — амплитуда n -й моды осцилляций $\alpha_n \sim \xi(\theta)$.

Аналогично будем искать гидродинамические потенциалы, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\psi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu) \exp(-i\omega_n t),$$

$$\psi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\mu) \exp(-i\omega_n t). \quad (2)$$

Коэффициенты A_n и B_n связаны с α_n на основе кинематического условия и условия равенства нормальных компонент поля скоростей на границе раздела сред

$$A_n = -\alpha_n \frac{i\omega_n}{n} R^{1-n}, \quad B_n = \alpha_n \frac{i\omega_n}{(n+1)} R^{n+2}. \quad (3)$$

Для вывода дисперсионного уравнения задачи продифференцируем динамическое граничное условие по времени (при $\theta = \text{const}$) и с учетом (1) получим

$$-\rho_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{8\pi \epsilon_{\text{ex}}} \left(\frac{Q}{r^2} \right)^2 \right) + \frac{\sigma}{R^2} (2 + L_\theta) \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = 0.$$

На основе расчета напряженности электрического поля, вынесенного в Приложение (окончательное выражение дает формула (П20)), легко найти давление электрического поля на поверхность капли. В линейном приближении по амплитуде осцилляций отнесем его к невозмущенной поверхности капли $r = R$. Представим его в виде (см. Приложение)

$$P_q \equiv \frac{\epsilon_{\text{ex}}}{8\pi} \left(\frac{Q}{\epsilon_{\text{ex}}^2 R^4} - 2 \frac{Q^2}{\epsilon_{\text{ex}}^2 R^5} \right) \times \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \exp(-i\omega_n t) (G(kR)n(n+1) + 2) P_n(\mu),$$

$$G(kR) \equiv \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R},$$

где $h_n^{(2)}(kr)$ модифицированная сферическая функция Бесселя третьего рода [10], $k \equiv \text{Re} \omega_n / c$ имеет смысл волнового числа волны (см. Приложение), пояснение будет дано ниже, сейчас можно отметить лишь, что $kR \ll 1$; оператор ∂_r означает взятие производной по аргументу r .

Продифференцировав это выражение для электрического давления по времени (при $\theta = \text{const}$), подставив результат и выражения (2), (3) в динамическое граничное условие, получим дисперсионное уравнение задачи в виде

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{R^2} \frac{n(n+1)}{[\rho_2 n + (n+1)\rho_1]} \times \left\{ 4W [G(kR)n(n+1) + 2] + (n-1)(n+2) \right\}, \quad (4)$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi \epsilon_{\text{ex}} \sigma R^3},$$

где частота ω_n оказывается комплексной.

Записывая сферическую функцию Бесселя третьего рода в виде степенного ряда [10]

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} e^{-iz} \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}}, \quad z = kr,$$

представим $G(z)$ как

$$G(z) \equiv \frac{h_n^{(2)}(z)}{\frac{\partial(z h_n^{(2)}(z))}{\partial z}}$$

$$= \frac{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz)^m}{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} 2^m (iz)^{m+1} + \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!(n-m)}{(n-m)!m!} (2iz)^m}$$

Асимптотики $G_n(z)$ при малом значении z будут

$$\operatorname{Re}[G_n(z)] \approx -\frac{1}{n}, \quad \operatorname{Im}[G_n(z)] \approx \left[\frac{2^n(n-1)!}{(2n)!} \right]^2 z^{2n+1}. \quad (5)$$

Частоту ω_n представим в виде $\omega_n = \operatorname{Re}\omega_n + i\operatorname{Im}\omega_n$, где $\operatorname{Im}\omega_n$ — мнимая часть, обязанная своим появлением в задаче об осцилляциях капли идеальной жидкости затуханию колебаний из-за излучения электромагнитных волн. Учтем, что она мала по сравнению с реальной частью ($\operatorname{Im}\omega_n \ll \operatorname{Re}\omega_n$). С учетом этого выражение для квадрата частоты осцилляций перепишем в виде $\omega_n^2 \approx (\operatorname{Re}\omega_n)^2 + 2i\operatorname{Re}\omega_n\operatorname{Im}\omega_n$. Тогда для реальной и мнимой частей частоты (4) при малом значении аргумента $z_0 = kR$ получим

$$(\operatorname{Re}\omega_n)^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)(n-1)}{[(n+1)\rho_1 + \rho_2 n]} [(n+2) - 4W].$$

$$\operatorname{Im}\omega_n = \frac{(n+1)^2}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_{\text{ex}}R^6}$$

$$\times \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 z_0^{2n+1} \frac{1}{2\operatorname{Re}\omega_n}. \quad (6)$$

Теперь k можно наделять физическим смыслом: это волновое число электромагнитной волны, излучаемой заряженной каплей, при ее осцилляциях. Учитывая, что $z_0 \equiv \frac{\operatorname{Re}\omega_n}{c} R$ и подставляя выражение для частоты собственных колебаний, получим мнимую часть частоты колебаний в виде

$$\operatorname{Im}\omega_n = 2W \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{(n+1)^{n+2} n^n (n-1)^n}{[\rho_2 n + (n+1)\rho_1]^{n+1}}$$

$$\times \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} c^{2n+1}} [(n+2) - 4W]^n. \quad (7)$$

Электромагнитное излучение

Мнимая часть $\operatorname{Im}\omega_n$ частоты колебаний (7) определяет декремент затухания капиллярных волн η . Отметим, что W характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду. Согласно критерию Релея [7,8], неустойчивость сильно заряженной сферической капли реализуется при $W \geq 1$.

Выражение для мощности излучения на частоте ω_n можно записать в виде [1,11]

$$I = -\frac{d\vartheta_n}{dt} \equiv \eta\vartheta_n,$$

ϑ_n — энергия поверхностных колебаний n -й моды, которую на основе теоремы вириала [12] можно представить как удвоенную за период среднюю кинетическую энергию движения жидкости в капле, связанную с n -й модой:

$$\vartheta_n = \frac{2\pi R^3 \rho_1 \alpha_n^2}{n(2n+1)} (\operatorname{Re}\omega_n)^2.$$

Выражение для интенсивности электромагнитного излучения единичной осциллирующей заряженной капли идеальной жидкости примет в итоге вид

$$I = 4\pi W \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{n^n (n-1)^{n+1} (n+1)^{n+3} \rho_1}{[(n+1)\rho_1 + \rho_2 n]^{n+2} (2n+1)}$$

$$\times \frac{\sigma^{n+2}}{c^{2n+1} R^n} \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 [(n+2) - 4W]^{n+1}. \quad (8)$$

Из (8) несложно видеть, что интенсивность излучения убывает с ростом номера моды, так как квадрат факториала, стоящий в знаменателе, растет с увеличением n быстрее, чем степенная зависимость, стоящая в числителе.

Можно рассмотреть два источника электромагнитного излучения облака. Первый возможный источник электромагнитного излучения связан с осцилляциями мелких капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30 μm . Концентрация n таких капель в облаке $\sim 10^2 \text{ cm}^{-3}$ [13]. Второй возможный источник электромагнитного излучения связан, согласно [1], со свободно падающими в облаке гидрометеорами, коагулирующими с более мелкими капельками и потому непрерывно осциллирующими на высоких модах и, следовательно, излучающими. Однако в [1] на роль излучающих гидрометеоров предлагались заряженные капли радиуса $R = 1 \text{ mm}$, концентрация которых в облаке, согласно данным наблюдений [13], весьма мала $\sim 1 \text{ m}^{-3}$. В итоге оценки интенсивности электромагнитного излучения из облака, основанные на обсуждаемом механизме, проведенные для экстремальных численных значений зарядов и концентраций капель с $R = 1 \text{ mm}$, по всей видимости, существенно завышены.

Осцилляции облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией, дроблением на более мелкие в результате столкновительных процессов или в результате реализации электростатической неустойчивости, гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих капель, аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозовых облаков [14–16]. Амплитуды колебаний облачных капель, согласно данным натуральных наблюдений [14,15], могут достигать десятков процентов от радиуса капли. Иными

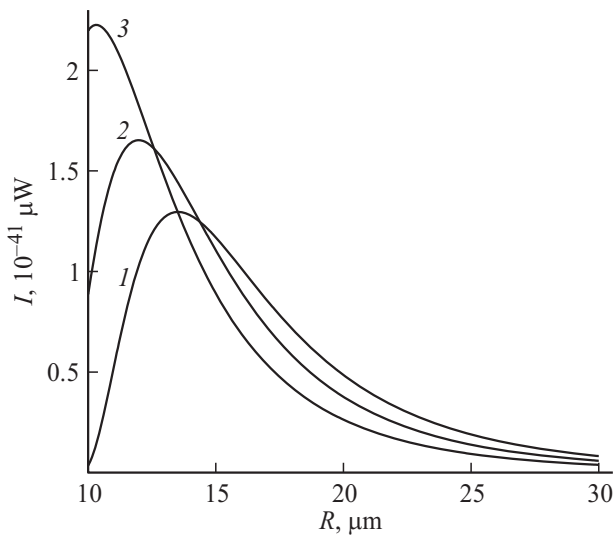


Рис. 1. Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной заряженной каплей от радиуса равновесной сферической капли, рассчитанные при $n = 2$, $\epsilon_{ex} = 1$, $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$, $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$, $\rho_2 = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, $\alpha_n = 0.1R$. На этом рисунке и на следующем кривая 1 соответствует $Q = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ CGSE}$ ($\sim 0.9W_{кр}$ при $R = 10 \mu\text{m}$ и $\sim 0.18W_{кр}$ при $R = 30 \mu\text{m}$), кривая 2 — $Q = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ CGSE}$ ($\sim 0.87W_{кр}$ при $R = 10 \mu\text{m}$ и $\sim 0.15W_{кр}$ при $R = 30 \mu\text{m}$), кривая 3 — $Q = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ CGSE}$ ($\sim 0.7W_{кр}$ при $R = 10 \mu\text{m}$ и $\sim 0.12W_{кр}$ при $R = 30 \mu\text{m}$).

словами, отношение (α_n/R) можно принимать не зависящим от радиуса и имеющим величину порядка десятых долей единицы. При нижеследующих оценках будем принимать это отношение равным 0.1. Для численных оценок примем $\epsilon_{ex} = 1$, $n = 2$, $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$, $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$, $\rho_2 = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, $\alpha_n = 0.1R$, $Q = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ CGSE}$ ($\sim 0.9W_{кр}$ при $R = 10 \mu\text{m}$ и $\sim 0.18W_{кр}$ при $R = 30 \mu\text{m}$). Тогда из (8) при радиусе капли $R = 12 \mu\text{m}$ несложно получить $I \sim 1 \cdot 10^{-41} \mu\text{W}$ на частоте $\approx 400 \text{ kHz}$. Для капли радиусом $R = 20 \mu\text{m}$ получим значение интенсивности $I \sim 5 \cdot 10^{-42} \mu\text{W}$ на частоте $\approx 300 \text{ kHz}$ (рис. 1). Из проведенных оценок и рис. 1 видно, что с увеличением радиуса капли интенсивность излучения быстро растет и, достигнув наибольшего значения, убывает на два порядка величины при увеличении размера капли в два раза. Наибольший вклад в излучение от облака будут давать капли с размерами $\sim 10 \mu\text{m}$. (В проведенной оценке мы принимали, что осцилляции всех капель связаны с основной модой).

Интенсивность электромагнитного излучения из облака будет примерно в N раз больше, где N — количество капель в облаке, если принять для оценки по порядку величины, что все капли имеют одинаковый размер и что все капли осциллируют синфазно. Это может иметь место при резком изменении величины электрического поля в облаке (изменение за характерное время, меньшее периода осцилляций капель), что имеет место при разряде молнии. Если капли осциллируют независимо

друг от друга, с произвольными фазами, то интегральная интенсивность излучения из облака будет больше, чем интенсивность излучения одиночной капли в \sqrt{N} раз.

На рис. 2 приведены характеристики излучения в зависимости от заряда осциллирующей капли, рассчитанные для капель разных размеров.

Расчеты показывают, что с увеличением размера капли частота излучения быстро снижается (рис. 3).

Казалось бы, механизм электромагнитного излучения, предложенный в [1], может работать, если в его основу

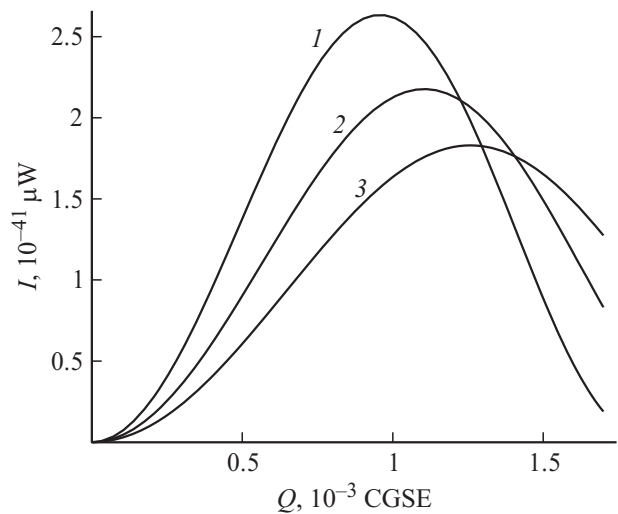


Рис. 2. Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной заряженной каплей от ее заряда, рассчитанные при тех же прочих значениях физических величин, что и на рис. 1. На этом рисунке и на следующем кривая 1 соответствует $R = 10 \mu\text{m}$, кривая 2 — $R = 11 \mu\text{m}$, кривая 3 — $R = 12 \mu\text{m}$.

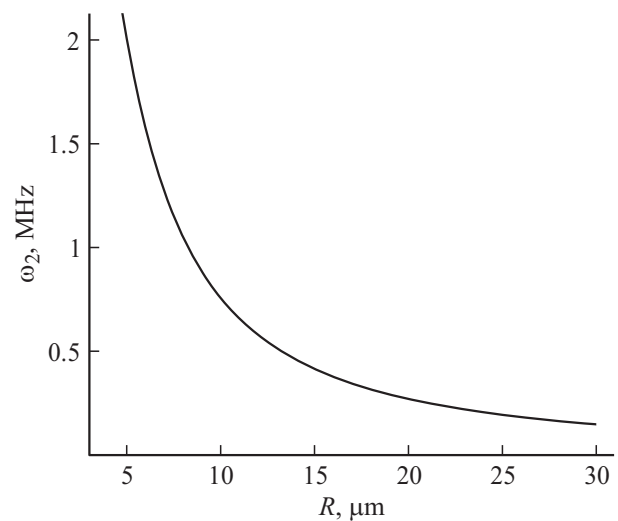


Рис. 3. Зависимость частоты электромагнитного излучения единичной заряженной каплей от радиуса сферической капли, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1 и $Q = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ CGSE}$ ($\sim 0.8W_{кр}$ при $R = 3 \mu\text{m}$ и $\sim 0.03W_{кр}$ при $R = 30 \mu\text{m}$).

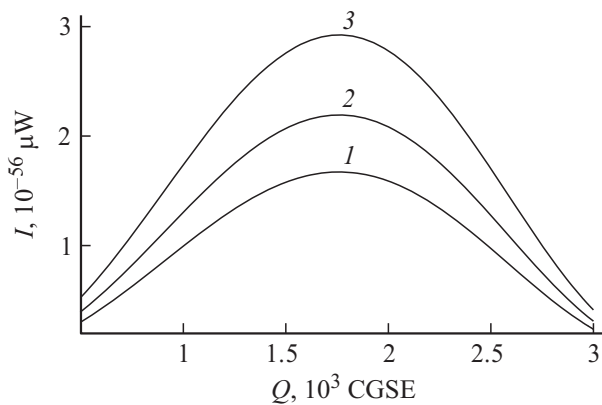


Рис. 4. Зависимости интенсивности электромагнитного излучения шаровой молнии от ее заряда, рассчитанные при $n = 2$, $\epsilon_{\text{ex}} = 1$, $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$, $\rho_2 = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, $\alpha_n = 0.1R$, $R = 15 \text{ cm}$. На этом рисунке и на следующем кривая 1 соответствует $\rho_1/\rho_2 = 0.8$, кривая 2 — $\rho_1/\rho_2 = 1$, кривая 3 — $\rho_1/\rho_2 = 1.2$.

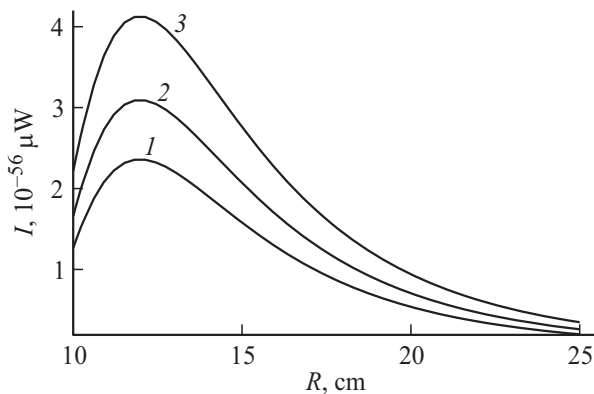


Рис. 5. Зависимости интенсивности электромагнитного излучения шаровой молнии от ее радиуса, рассчитанные при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 4 и $Q = 1.5 \cdot 10^3 \text{ CGSE}$ ($\sim 0.78W_{\text{кр}}$ при $R = 10 \text{ cm}$ и $\sim 0.2W_{\text{кр}}$ при $R = 25 \text{ cm}$).

положить на порядок более мелкие гидрометеоры с $R = 100 \mu\text{m}$, концентрация которых в облаке, согласно данным наблюдений [13], достаточно высока $\sim 10^3 \text{ m}^{-3}$. Высока и скорость их свободного падения $\approx 78 \text{ cm/s}$. Но, как показывают численные оценки, интенсивность электромагнитного излучения гидрометеоров много меньше интенсивности излучения осциллирующих на основной моде мелких капель.

Интересно отметить, что интенсивность излучения капли, согласно (8), быстро уменьшается с ростом номера моды. В расчетах показано, что с увеличением номера моды на единицу мощность излучения уменьшается по порядку в $\sim 10^{-15}$, поэтому связывать фоновое излучение облаков с излучением высоких мод осцилляций гидрометеоров (высокие моды могут возбуждаться при столкновениях гидрометеоров с мелкими капельками) не приходится.

Шаровая молния

Применим вышеизложенные теоретические размышления к еще одному малоизученному объекту: к шаровой молнии (ШМ) [17]. Согласно утверждениям наблюдателей ее существования в естественных условиях, изредка отмечается ее способность излучать весьма интенсивные электромагнитные волны. Об этом сообщают авторы монографий и обзоров, посвященных этому феномену, изданные в разных странах в разное время (см., например, [17–26]). Проблему сформулируем в виде вопроса: могут ли быть источником излучения ШМ осцилляции ее поверхности?

Как физический объект ШМ имеет плотность порядка плотности окружающего воздуха, радиус около 20 см, достаточно большой электрический заряд, чтобы посредством его поражать людей и животных (достаточно вспомнить классический случай с Рихманом, сподвижником М.В. Ломоносова), коэффициентом поверхностного натяжения величиной порядка такого у воды (на сей счет имеются физически разумные оценки, на основании различных ее проявлений). То есть ШМ, плавающая в воздухе над землей, может вести себя как заряженная капля, висящая в электростатическом подвесе. И может излучать электромагнитные волны как заряженная капля, за счет осцилляций поверхности. Если это так, то полученное выражение (8) применимо и к ШМ. По сравнению с каплей ШМ имеет существенно больший размер, заряд и существенно меньшую плотность. Как эти обстоятельства скажутся на ее возможном электромагнитном излучении?

На рис. 4, 5 приведены графики, рассчитанные по (8) для интенсивности излучения ШМ. Видно, что, несмотря на существенно большие значения заряда и радиуса ШМ по сравнению с каплей, интенсивность излучения ШМ, вызванная осцилляциями ее поверхности, ничтожно мала. Численные расчеты показывают, что частота излучения ШМ при указанном механизме будет весьма мала из-за большого радиуса и малой плотности ШМ.

Таким образом, можно прийти к выводу, что источник электромагнитного излучения ШМ не связан с осцилляциями ее поверхности.

Так как излучают ускоренно движущиеся электрические заряды, то возможно, что излучение ШМ связано с движением вещества ШМ, несущего объемный заряд. Во всяком случае о наличии движущейся внутренней структуры ШМ сообщают примерно 13% очевидцев, видевших ШМ с близкого расстояния. Они говорят о хаотически движущихся светящихся точках, о переплетенных светящихся линиях, о движущихся в объеме ШМ маленьких светящихся шариках [17]. Переплетенные светящиеся линии могут быть в силу инерционности зрительного восприятия следами быстро движущихся точек. Во всяком случае, вопрос об электромагнитном излучении ШМ остается открытым.

Следует отметить, что согласно общей теории электромагнитного излучения [11], полное излучение состо-

ит из трех компонент, пропорциональных различным степеням отношения линейных размеров излучающей системы к длине излучаемой волны (которое предполагается малым): дипольной, квадрупольной и магнитно-дипольной. Самая интенсивная компонента — дипольная, затем идет квадрупольная и самая слабая магнитно-дипольная. Они различаются на много порядков величины. Квадрупольное излучение фиксируется, когда равна нулю интенсивность дипольного. Именно этот случай реализуется в рассматриваемом случае. Дипольное излучение у нас (как во всех расчетах линейного приближения [1–4]) отсутствует в силу условия неподвижности центра масс. Оно может проявиться лишь в более высоких порядках асимптотических расчетов.

Заключение

Электромагнитное излучение заряженных облаков естественного происхождения может быть частично объяснено электромагнитным излучением, обнаруживаемом в расчетах линейного по амплитудам мод приближении, генерируемом капиллярными осцилляциями капель, составляющих облако.

Возможное электромагнитное излучение ШМ не связано с осцилляциями ее поверхности.

Приложение. Расчет напряженности электрического поля у поверхности осциллирующей заряженной капли

Для нахождения электрического поля заряженной проводящей сферической капли, поверхность которой возмущена осесимметричным капиллярным волновым движением, необходимо решить систему уравнений, содержащую условие неразрывности электрического поля и волновое уравнение:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \quad \Delta\mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow 0, \\ r = R + \xi(\theta, t) : \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= 0, \\ \frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}^{(1)}) dS &= \frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}}}. \end{aligned}$$

Будем искать решения выписанных уравнений в сферических координатах с началом в центре масс капли в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(0)}(r) + \mathbf{E}^{(1)}(r, \theta, t),$$

где $\mathbf{E}^{(0)}(r)$ — напряженность электрического поля в окрестности невозмущенной сферы, $\mathbf{E}^{(1)}(r, \theta, t)$ — добавка к напряженности поля, вызванная капиллярными осцилляциями поверхности капли, имеющая тот

же порядок малости, что и возмущение поверхности $|\mathbf{E}^{(1)}| \sim |\xi|$.

В силу линейности выписанных уравнений и разложения $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ на векторы $\mathbf{E}^{(0)}$ и $\mathbf{E}^{(1)}$ они будут решениями систем уравнений, аналогичных выписанным. Решение задачи нулевого приближения трудности не представляется и хорошо известно из курса общей физики

$$\mathbf{E}^{(0)} \equiv \frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}} r^2} \mathbf{e}_r. \quad (\text{П1})$$

Для отыскания напряженности поля в первом приближении необходимо решить систему уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{E}^{(1)} = 0, \quad \Delta\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t^2},$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty : \quad \mathbf{E}^{(1)} &\rightarrow 0, \\ r = R + \xi(\theta, t) : \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)) &= 0, \quad \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}^{(1)}) dS = 0. \end{aligned}$$

Представим вектор $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в виде разложения на три ортогональных вектора [27]:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}_1 \Phi_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_3 \Phi_3(\mathbf{r}, t), \quad (\text{П2})$$

где $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$ — неизвестные скалярные функции, а векторные операторы-проекторы \mathbf{N}_j имеют вид [27]

$$\mathbf{N}_1 \equiv \nabla, \quad \mathbf{N}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{N}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{N}_1^+ \equiv -\nabla, \quad \mathbf{N}_2^+ \equiv \mathbf{r} \times \nabla, \quad \mathbf{N}_3^+ \equiv (\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla$$

и удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\mathbf{N}_j^+ \cdot \mathbf{N}_m = 0 \quad \text{при} \quad m \neq j, \quad (\text{П3})$$

верхний индекс „+“ означает эрмитово сопряжение.

С учетом свойства (П3) уравнение неразрывности для $\mathbf{E}^{(1)}$ преобразуется в уравнение Лапласа для функции $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}^{(1)} &= -\mathbf{N}_1^+ \cdot \mathbf{E}^{(1)} = -\mathbf{N}_1^+ \cdot (\mathbf{N}_1 \Phi_1 + \mathbf{N}_2 \Phi_2 + \mathbf{N}_3 \Phi_3) \\ &= -\mathbf{N}_1^+ \cdot \mathbf{N}_1 \Phi_1 \equiv \nabla \cdot \nabla \Phi_1 \equiv \Delta \Phi_1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Несложно убедиться, что операторы \mathbf{N}_j коммутируют с оператором Лапласа, т.е. $\mathbf{N}_j \Delta = \Delta \mathbf{N}_j$, благодаря чему векторное волновое уравнение для $\mathbf{E}^{(1)}$ преобразуется в систему трех скалярных уравнений для $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$. Подставим разложение (П2) в волновое уравнение для $\mathbf{E}^{(1)}$ и, пользуясь свойством коммутативности, приведем его к виду

$$\sum_{j=1}^3 \mathbf{N}_j \left[\Delta \Phi_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right] = 0.$$

Умножая слева полученное выражение последовательно на \mathbf{N}_j^+ и учитывая, что $\mathbf{N}_j^+ \cdot \mathbf{N}_j \neq 0$, получим три скалярных волновых уравнения для $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$:

$$\Delta \Phi_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{П5})$$

Поскольку решается задача об излучении каплей электромагнитных волн, естественно принять $\Phi \sim \exp(-i\omega_n t)$, где i — мнимая единица. При этом уравнения (П5) сведутся к уравнениям Гельмгольца.

Из уравнения (П5) при значении индекса $j = 1$ и уравнения (П4) получим $(\omega_n^2/c^2)\Phi_1(\mathbf{r}, t) = 0$, и поскольку частота колебаний отлична от нуля, то, следовательно, скалярная функция $\Phi_1(\mathbf{r}, t) \equiv 0$. Таким образом, напряженность электрического поля $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, создаваемого колебаниями поверхности незаряженной капли, будет чисто вихревым и будет описываться следующим выражением:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_3 \Phi_3(\mathbf{r}, t).$$

В сферической системе координат компоненты $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ имеют вид

$$\mathbf{N}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t) = 0 \cdot \mathbf{e}_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta - \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{П6})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_3 \Phi_3(\mathbf{r}, t) = & -\frac{1}{r} L_\theta \Phi_3(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

где координата φ — азимутальный угол.

Функции $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_3(\mathbf{r}, t)$ являются решениями уравнений Гельмгольца, имеющих вид

$$\Delta \Phi_q(\mathbf{r}, t) - \frac{\omega_n^2}{c^2} \Phi_q(\mathbf{r}, t) = 0, \quad q = 2, 3. \quad (\text{П8})$$

В силу того, что рассматривается осесимметричная задача, в выражениях (П6) и (П7) следует отбросить слагаемые, содержащие производные по φ , тогда имеем

$$\mathbf{N}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\mathbf{N}_3 \Phi_3(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{r} L_\theta \Phi_3(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{П9})$$

Решение уравнений (П8) для функций запишется в виде

$$\Phi_q = \sum_n D_n^{(q)} h_n^{(2)}(kr) \exp(-i\omega_n t) P_n(\cos \theta), \quad (\text{П10})$$

где $h_n^{(2)} * lr$ — сферическая функция Бесселя третьего рода, выбираемая из тех соотношений, чтобы в асимптотике ($r \rightarrow \infty$) электромагнитная волна расходилась; $k \equiv (\omega_n/c)$ — волновое число, c — скорость света.

Неизвестные константы $D_n^{(q)}$ в решениях (П10) определяются из граничных условий эквипотенциальности поверхности капли и неизменности ее заряда. Заметим, что для тороидальной компоненты поля $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, определяемой функцией $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$, эти граничные условия приведут к следующим соотношениям:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t) : (\mathbf{N}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t), \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (\text{П11})$$

$$\oint_S (\mathbf{N}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}) dS = 0, \quad (\text{П12})$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} — единичные векторы касательной и нормали к невозмущенной поверхности капли. При этом вектором $\boldsymbol{\tau}$ могут служить орты сферической системы координат \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ , а вектор нормали \mathbf{n} будет совпадать с ортом \mathbf{e}_r .

Согласно (П9), тороидальная компонента поля ($\mathbf{N}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t)$) имеет лишь составляющую $\sim \mathbf{e}_\varphi$, и, значит, соотношения (П11) и (П12) при $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\theta$ удовлетворяются тождественно при любых константах $D_n^{(2)}$ в решении (П10). Из условия (П11) при $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\varphi$ получим

$$r = R : \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} = 0.$$

Поскольку это соотношение должно быть справедливым при любом значении угла θ , необходимо потребовать обращения в нуль всех констант $D_n^{(2)}$ в решении для $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$. Таким образом, поле $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется скалярной функцией $\Phi_3(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}_3 \Phi_3(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}) \Phi_3(\mathbf{r}, t).$$

С учетом (П10) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = & \sum_n \exp(-i\omega_n t) \left\{ D_n^{(3)} r^{-1} h_n^{(2)}(kr) n(n+1) P_n(\mu) \mathbf{e}_r \right. \\ & \left. + \left(D_n^{(3)} r^{-1} h_n^{(2)}(kr) + D_n^{(3)} \frac{\partial h_n^{(2)}(kr)}{\partial r} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П13})$$

Для определения неизвестной константы $D_n^{(3)}$ учтем, что поверхность проводящей капли эквипотенциальна, т.е. проекция вектора \mathbf{E} на орт касательной к поверхности $\boldsymbol{\tau}$ есть нуль

$$(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (\text{П14})$$

Чтобы найти орт $\boldsymbol{\tau}$, сначала запишем орт нормали к возмущенной поверхности капли

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \xi(\theta, t) \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{П15})$$

В силу осевой симметрии задачи орт касательной к параллелям совпадает с соответствующим ортом сферической системы координат $\boldsymbol{\tau}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi$. Орт касательной

в меридиональном направлении найдем, воспользовавшись векторным соотношением

$$\boldsymbol{\tau}_\theta = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}_\varphi.$$

С учетом (П15) выражение для орта касательной запишется в виде

$$\boldsymbol{\tau}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{П16})$$

Подставив (П16) и (П13) в (П14), перепишем условие эквипотенциальности проводящей капли в виде

$$r = R : E_r^{(0)} \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} + E_\theta^{(1)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{П17})$$

где $E_r^{(0)}$ и $E_\theta^{(1)}$ — компоненты векторов напряженности поля нулевого и первого порядков малости.

Подстановка выражений для $E_\theta^{(1)}$ из (П13), $E_r^{(0)} \equiv E^{(0)}$ и возмущения поверхности капли $\xi(\theta, t)$ в виде ряда по полиномам Лежандра в выражение (П17) позволяет определить выражение для константы $D_n^{(3)}$ через амплитуду α_n :

$$D_n^{(3)} = -\alpha_n \frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}} R^2} \frac{1}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))|_{r=R}}. \quad (\text{П18})$$

Подставив (П18) в (П13), получим выражение для напряженности электрического поля $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}} R^2 r} \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \alpha_n \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))|_{r=R}} \right. \\ & \left. \times n(n+1) P_n(\mu) \mathbf{e}_r + \frac{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))|_{r=R}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П19})$$

В итоге полная напряженность электрического поля, создаваемая каплей, запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = & \frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}} r^2} \mathbf{e}_r - \frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}} R^2 r} \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \\ & \times \alpha_n \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))|_{r=R}} n(n+1) P_n(\mu) \mathbf{e}_r \right. \\ & \left. + \frac{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))|_{r=R}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П20})$$

Авторы выражают благодарность Н.А. Богатову, указавшему на ошибки, допущенные при нахождении асимптотик сферических функций Бесселя третьего рода в [1,2].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

Список литературы

- [1] Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 74–80.
- [3] Богатов Н.А. // Solar-terrestrial relations and physics of earthquakes precursors. VI international conference. Petropavlovsk-Kamchatski, 9–13 September, 2013 / Collection of the reports С. 10–11.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю. // ЖТФ. 2016. Т. 86. № 3. С. 41–50.
- [5] Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. // Phys. Scri. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [6] Качурин Л.Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоздат, 1990. 463 с.
- [7] Rayleigh (Strutt J.W.) // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [8] Hendrics C.D., Schneider J.M. // J. Amer. Phys. 1963. Vol. 1. N 6. P. 450–453.
- [9] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [10] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 208 с.
- [13] Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоздат, 1983. 280 с.
- [14] Beard K.V., Cloud // Rev. Geophys. 1987. Vol. 25. N 3. P. 357–370.
- [15] Beard K.V., Tokay A.A. // 1991. N 12. P. 2257–2260.
- [16] Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник / Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
- [17] Григорьев А.И. Шаровая молния. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2010. 200 с.
- [18] Brand W. Der Kugelblitz. Probleme der Kosmischen Physik. Hamburg: H. Grand, 1923. 170 p.
- [19] Леонов Р.А. Загадка шаровой молнии. М.: Наука, 1965. 75 с.
- [20] Имянитов И.М., Тихий Д.Я. За гранью закона. Л.: Гидрометеоздат, 1967. 141 с.
- [21] Сингер С. Природа шаровой молнии. Пер. с англ. М: Мир, 1973. 239 с.
- [22] Стаханов И.П. Физическая природа шаровой молнии. М: Атомиздат, 1979. 242 с.
- [23] McNally J.R., Jr. Preliminary report on the ball lightning Second Annual Meeting of the Division of Plasma Physics of the American Physical Society. Gatlinburg, 1960. N 2–5. Paper J-15. P. 1–25.
- [24] Rayle W.D. Ball lightning characteristics. Rept. N.A.S.A., T.N.O. 3188. 1966.
- [25] Charman W.N. // Phys. Rep. 1979. Vol. 54. N 4. P. 261–306.
- [26] Барри Дж. Шаровая молния и четочная молния. Пер. с англ. М: Мир, 1983. 285 с.
- [27] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2010. 180 с.