15

Динамика переориентации нематиков, инкапсулированных в микроскопические объемы, под действием сильного электрического поля

© А.В. Захаров[1], А.А. Вакуленко[1], С.В. Пасечник[2]

[1] Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург, Россия
[2] Московский технологический университет,
Москва, Россия
E-mail: alexandre.zakharov@yahoo.ca

(Поступила в Редакцию 25 февраля 2016 г.)

Предложено теоретическое описание нового режима переориентации поля директора $\hat{\mathbf{n}}$ и скорости $\mathbf{v}$ нематического жидкого кристалла (ЖК), инкапсулированного в прямоугольную ячейку, под действием сильного электрического поля $\mathbf{E}$, направленного под углом α ($\sim \pi/2$) к горизонтальным ограничивающим поверхностям ЖК-ячейки. Численные расчеты, выполненные в рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксена–Лесли, показали, что при определенных соотношениях моментов и импульсов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, и в случае $E \gg E_{\mathrm{th}}$ в процессе переориентации $\hat{\mathbf{n}}$ могут возникнуть переходные периодические структуры, если соответствующая мода искажения обладает наибыстрейшим откликом и таким образом подавляет все остальные моды, в том числе и однородные. На положение узлов этих периодических структур оказывают влияние величина поля E, угол α, а также характер сцепления ЖК-молекул с ограничивающими поверхностями. Расчеты, выполненные для нематика, образованного молекулами 4-n-пентил-4′-цианобифенила, указывают на то, что в ЖК-ячейке может формироваться несколько вихрей, вызванных переориентацией поля директора, а границы этих вихрей определяются положениями узлов периодической структуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-02-00041а) и Министерства образования и науки РФ (проект № 3.1921.2014/К проектной части государственного задания).

1. Введение

Наряду с широким использованием жидкокристаллических (ЖК) материалов в производстве ЖК-дисплеев не менее важной областью их применения является микро- и нанофлуидистика, т.е. наука о движении жидкостей в микро- и наноразмерных каналах и капиллярах. В течение последних десяти лет число публикаций, посвященных нанофлуидистике, удваивается приблизительно каждые два года [1,2], и эта тенденция, по-видимому, будет неуклонно возрастать, поскольку микро- и нанофлуидистика находит широкое применение в аналитической и экспериментальной химии и биохимии, а также в медицинской диагностике и фармакологии [3]. Отдельно следует отметить широкое использование методов микро- и нанофлуидистики при создании новых семейств сенсоров и датчиков на основе термо- и лиотропных ЖК-материалов [4–6]. Методы микро- и нанофлуидистики также находят широкое применение при исследовании процессов транспортировки и сортировки нанолитровых капель жидкостей [7] и ЖК-материалов в разветвленных каналах и капиллярах (lab-on-chip-system) под действием внешнего электрического поля (электрокинетика) [8,9]. Что касается ЖК-технологий, то внешние поля (электрические и магнитные), а также характер приповерхностной ориентации поля директора, т.е. усредненной ориентации ЖК-молекул на границе раздела ЖК-фаза/твердое тело, сильно влияют на времена переориентации поля директора и тем самым на качество и надежность изображения на ЖК-дисплеях и экранах [10]. Поэтому всестороннее исследование динамических режимов переориентации поля директора в микроскопических объемах ЖК-фаз под действием сильного электрического поля ($\geq 1\,\mathrm{V}/\mu\mathrm{m}$) позволит улучшить как оптические, так и динамические характеристики сенсоров, терморегуляторов и датчиков, применяемых, например, в медицинской диагностике и биологических лабораториях на чипах.

Целью настоящей работы является описание процесса формирования новых режимов переориентации как поля директора $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, t)$, так и поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (backflow), возникающего в процессе релаксации поля директора к его равновесному распределению по всему объему микроскопической ЖК-ячейки под действием сильного электрического поля $\mathbf{E}$. Поскольку внешнее электрическое поле $\mathbf{E}$ стремится сориентировать молекулы ЖК-фазы вдоль $\mathbf{E}$, это приводит к возникновению конкуренции с приповерхностными силами, которые транслируются в объем ЖК-фазы посредством ориентационной упругости присущей всем ЖК-материалам. При значениях величины поля $E > E_{\mathrm{th}}$ молекулы ЖК-фазы однородно разворачиваются в сторону вектора $\mathbf{E}$ [11]. Здесь E_{th} — некоторое пороговое значение внешнего электрического поля, при достижении которого начинается переориентация поля директора (переход Фредерикса [11]). Эта величина зависит от конкретного ЖК-материала и его размеров. В случае $E \gg E_{\text{th}}$ ЖК-система может быть выведена из равновесного состояния, и любые малые отклонения начальной ориентации поля директора, вызванные, например, термофлуктуациями, могут начать экспоненциально расти с коэффициентами роста, обратно пропорциональными некоторой эффективной вращательной вязкости ЖК-материала [12]. При классическом переходе Фредерикса однородный поворот молекул ЖК-фазы происходит в плоскости, образованной полем директора $\hat{\mathbf{n}}$ и полем $\mathbf{E}$, и характеризуется сравнительно большим эффективным коэффициентом вращательной вязкости и отсутствием течения ЖК-фазы. С другой стороны, в случае $E \gg E_{\text{th}}$ в процессе переориентации поля директора $\hat{\mathbf{n}}$ могут возникнуть переходные периодические структуры, если соответствующая мода искажения обладает наибыстрейшим откликом и таким образом подавляет все остальные моды, в том числе и однородные [13,14]. При периодическом искажении ЖК-фазы появляется сдвиговая вязкость, уменьшающая общую эффективную вращательную вязкость, связанную с переориентацией поля директора. Возникающие при этом вращающиеся домены способствуют уменьшению эффективной вязкости, характеризующей скорость диссипации энергии, и тем самым создают более выгодные по сравнению с однородным поворотом режимы переориентации поля директора. Исследование этих новых состояний проведено нами в рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксена–Лесли [15,16] с учетом балансов массы, импульсов и моментов, действующих на единицу объема ЖК-материала. Численные исследования характера переориентации поля директора и формирования гидродинамического течения в микрометровых ЖК-ячейках, образованных молекулами 4-n-пентил-4′-цианобифенила (5ЦБ), проведены для случая электрического поля $\mathbf{E}$, направленного практически ортогонально горизонтальным поверхностям ЖК-ячейки.

2. Основные уравнения

Рассмотрим длинную прямоугольную ЖК-ячейку с размерами $2L$ и $2d$ $(L \gg d)$, ограниченную твердыми горизонтальными и вертикальными поверхностями. Допустим, что директор планарно ориентирован на горизонтальных ограничивающих поверхностях и гомеотропно на вертикальных, причем рассмотрим два случая: 1) случай, характеризующийся жестким сцеплением ЖК-молекул со всеми твердыми поверхностями; 2) случай — мягкого сцепления ЖК-молекул с горизонтальными и жесткого сцепления с вертикальными ограничивающими поверхностями. В обоих случаях система координат отсчитывается от центра ЖК-ячейки так, что ось x и орт $\hat{\mathbf{i}}$ совпадают с направлением директора на нижней горизонтальной поверхности $(\hat{\mathbf{i}} \parallel \hat{\mathbf{n}}_{z=-d})$, в

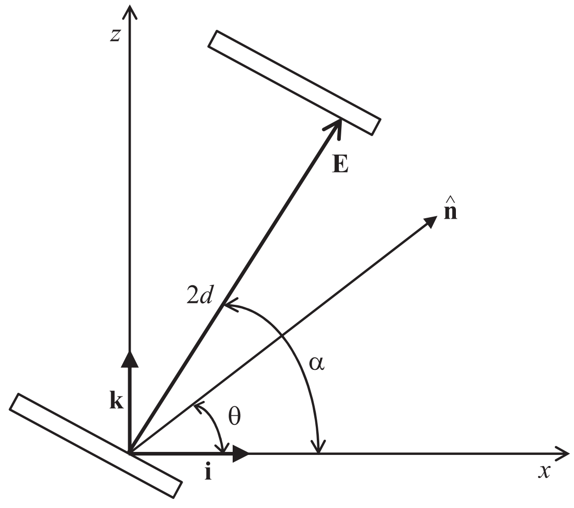

Рис. 1. Система координат, используемая при вычислениях. Орт $\hat{\mathbf{i}}$ направлен параллельно, а орт $\hat{\mathbf{k}}$ перпендикулярно нижней ограничивающей поверхности ЖК-ячейки. Вектор электрического поля $\mathbf{E}$ и вектор поля директора $\hat{\mathbf{n}}$ направлены под углом α и углом θ к нижней горизонтальной ограничивающей поверхности ЖК-ячейки соответственно.

то время как ось z и орт $\hat{\mathbf{k}}$ направлены ортогонально $(\hat{\mathbf{k}} \perp \hat{\mathbf{n}}_{z=-d})$, а орт $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}$ (рис. 1). Таким образом, в начальный момент времени мы имеем дело с планарно и однородно ориентированным жидким кристаллом, образованным молекулами 5ЦБ, при этом вектор электрического поля $\mathbf{E} = E_x\hat{\mathbf{i}} + E_z\hat{\mathbf{k}} = E(z)\cos\alpha\hat{\mathbf{i}} + E(z)\sin\alpha\hat{\mathbf{k}}$ направлен под углом α $(\sim \pi/2)$ к горизонтальным поверхностям ЖК-ячейки. После включения электрического поля $\mathbf{E}$, направленного практически ортогонально к планарно и однородно ориентированному ЖК-образцу, в ЖК-фазе начинается переориентация полярных молекул и, как следствие, переориентация $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, t)$ вдоль направления вектора $\mathbf{E}$. Этот процесс переориентации сопровождается формированием поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ в объеме ЖК-фазы. Будем предполагать, что переориентация поля директора $\hat{\mathbf{n}} = n_x\hat{\mathbf{i}} + n_z\hat{\mathbf{k}} = \cos\theta(x, z, t)\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta(x, z, t)\hat{\mathbf{k}}$ под действием электрического поля $\mathbf{E}$ осуществляется в плоскости xOz. Здесь θ — угол, образованный директором $\hat{\mathbf{n}}$ и ортом $\hat{\mathbf{i}}$. Таким образом, формирование гидродинамического течения $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, обусловленного переориентацией поля директора $\hat{\mathbf{n}}$ под действием сильного электрического поля $\mathbf{E}$, может быть описано в рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксена–Лесли [15,16], которая учитывает баланс массы, импульсов и угловых моментов, действующих на единицу ЖК-фазы, а также закон сохранения зарядов. Принимая во внимание микроскопические размеры ЖК-ячейки, можно предположить, что плотность ЖК-системы постоянна и мы имеем дело с несжимаемой жидкостью. Условие несжимаемости ЖК-материала $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, или $u_x + w_z = 0$, выполняется за счет введения безразмерной функции тока $\bar{\psi} = \frac{4\gamma_1}{\epsilon_0\epsilon_a}\frac{1}{U^2}\psi$, где безразмерные компоненты вектора скорости $\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{i}} + w\hat{\mathbf{k}}$ выражены через ψ как $u = \frac{\partial\psi}{\partial z} = \psi_{,z}$ и $w = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\psi_{,x}$ соответственно. Здесь и далее мы используем безразмерные пространственные переменные $\bar{x} = x/d$ и $\bar{z} = z/d$, а также безразмерное время $\tau = \frac{\epsilon_0\epsilon_a}{\gamma_1}\left(\frac{U}{2d}\right)^2 t$, причем в дальнейшем черта над пространственными переменными и функцией тока будет опущена, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, ϵ_a — диэлектрическая анизотропия ЖК-системы, γ_1 и γ_2 — коэффициенты вращательной вязкости, а $U = 2Ed$ — величина напряжения. Баланс моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, в безразмерном виде может быть записан как

$$\theta_{,\tau} = \delta_1\left[\Delta_1\theta_{,xx} + \Delta_2\theta_{,zz} + \Delta_3\left(-2\theta_{,xz} + \theta_{,x}^2 + \theta_{,z}^2\right) + \Delta_4\theta_{,x}\theta_{,z}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\bar{E}^2(z)\sin 2(\alpha - \theta) + \frac{1}{2}\left(\psi_{,xx} + \psi_{,zz}\right) - \psi_{,z}\theta_{,z} + \psi_{,x}\theta_{,x}$$
$$+ \gamma\left[\sin 2\theta\psi_{,xz} + \frac{1}{2}\left(\psi_{,xx} - \psi_{,zz}\right)\right], \tag{1}$$

где $\Delta_1 = \sin^2\theta + K_{31}\cos^2\theta$, $\Delta_2 = \cos^2\theta + K_{31}\sin^2\theta$, $\Delta_3 = \frac{(1-K_{31})}{2}\sin 2\theta$, $\Delta_4 = \left(K_{31} - 1\right)\cos 2\theta$, $\gamma = \gamma_2/\gamma_1$, $K_{31} = K_3/K_1$, а K_1 и K_3 — коэффициенты упругости, соответствующие изгибным и продольным деформациям.

Безразмерное уравнение Навье–Стокса, записанное с помощью функции тока ψ, имеет вид

$$\delta_2\left[(\Delta\psi)_{,\tau} + \psi_{,z}(\Delta\psi)_{,x} - \psi_{,x}(\Delta\psi)_{,z}\right] = \hat{\mathscr{L}}\psi + \mathscr{F}, \tag{2}$$

где $\Delta\psi = \psi_{,xx} + \psi_{,zz}$, а оба оператора $\hat{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{F}$ приведены в Приложении. Здесь $\delta_1 = \frac{4K_1}{\epsilon_0\epsilon_a U^2}$, $\delta_2 = \frac{\rho\epsilon_0\epsilon_a}{4\gamma_1^2}U^2$ — два параметра ЖК-системы.

В свою очередь безразмерное электрическое поле удовлетворяет основному уравнению электростатики для диэлектриков

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\epsilon_\perp}{\epsilon_a} + \sin\theta\right)\bar{E}(z)\right] = 0, \quad \int_{-1}^{1}\bar{E}(z)dz = 1, \tag{3}$$

где $\epsilon_\perp$ — величина диэлектрической проницаемости ЖК-материала в направлении, перпендикулярном полю директора $\hat{\mathbf{n}}$, а функция $\bar{E}(z) = \frac{2d}{U}\sin\alpha E(z)$ описывает безразмерное электрическое поле.

Будем рассматривать ЖК-ячейку с размерами $L/d = 10$, помещенную между двумя электродами таким образом, что вектор $\mathbf{E}$ направлен под углом α к орту $\hat{\mathbf{i}}$. Будем изучать два случая сцепления ЖК-молекул с ограничивающими стенками: первый (A) — случай жесткого сцепления, когда граничные условия для угла θ могут быть записаны в виде

$$\theta_{-10<x<10, z=\pm 1} = \theta_{x=\pm 10, -1<z<1} = 0, \tag{4}$$

и второй (B) — случай мягкого сцепления на горизонтальных и жесткого сцепления на вертикальных ограничивающих поверхностях, когда граничные условия для угла θ могут быть записаны в виде

$$\left(\theta_{,z}\right)_{-10<x<10, z=\pm 1} = \pm\delta_3\theta_{-10<x<10, z=\pm 1},$$
$$\theta_{x=\pm 10, -1<z<1} = 0, \tag{5}$$

где $\delta_3 = \frac{\mathscr{A}d}{K_1}$ — еще один параметр системы, а $\mathscr{A}$ — плотность энергии сцепления ЖК-молекул с горизонтальными ограничивающими поверхностями.

Поле скорости $\mathbf{v}$ подчиняется условию прилипания на твердых ограничивающих поверхностях ЖК-ячейки, которое может быть записано с помощью безразмерной функции тока как

$$\left(\psi_{,z}\right)_{-10<x<10, z=\pm 1} = \left(\psi_{,z}\right)_{x=\pm 10, -1<z<1} = 0,$$
$$\left(\psi_{,x}\right)_{-10<x<10, z=\pm 1} = \left(\psi_{,x}\right)_{x=\pm 10, -1<z<1} = 0. \tag{6}$$

Уравнения (1)–(3) необходимо дополнить начальными условиями как для поля директора, так и для поля скорости. Начальное условие для угла θ выберем в виде

$$\theta\left(x, z, 0\right) = \theta_0\cos\theta\left(q_z z\right)\cos\theta\left(q_x x\right), \tag{7}$$

где θ_0 — амплитуда, а q_x и q_z — волновые числа соответствующей Фурье-моды. В случае A волновые числа q_x и q_z соответствующей Фурье-моды имеют вид

$$q_x = \frac{\pi}{20}\left(2k + 1\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$q_z = \frac{\pi}{20}\left(2l + 1\right), \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

в то время как в случае B эти волновые числа имеют вид

$$q_x = \frac{\pi}{20}\left(2k + 1\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$q_z = \pm\left(\cot\left(q_z z\right)_{z=\pm 1}\right). \tag{9}$$

В свою очередь начальное условие для скорости $v\left(x, z, 0\right) = 0$, записанное с помощью функции тока, принимает вид

$$\psi\left(x, z, 0\right) = 0. \tag{10}$$

Следует отметить, что в процессе переориентации поля директора под действием сильного электрического поля баланс импульсов и угловых моментов, действующих на единицу ЖК-объема, разворачивает поле директора к его равновесному распределению $\hat{\mathbf{n}}_{\mathrm{eq}}$ по всему объему ЖК-фазы, которое описывается углом $\theta_{\mathrm{eq}}(x, z)$. Время, необходимое для переориентации поля директора в положение $\theta_{\mathrm{eq}}(x, z)$, есть время релаксации $\tau\left(\theta_0, A, B\right)$ системы, и его величина зависит от величины электрического поля $\bar{E}$, угла θ_0, а также от характера сцепления ЖК-молекул с ограничивающими поверхностями. В свою очередь безразмерные волновые числа q_x

и q_z определяются исходя из условия минимума полной энергии $W = W_{\text{elast}} + W_{\text{el}}$, где

$$\frac{2}{\delta_1} W_{\text{elast}} = \int dx \int dz \times \Big[\big((\theta_{\text{eq}})^2_{,x} + (\theta_{\text{eq}})^2_{,z}\big)\big(\sin^2\theta_{\text{eq}} + K_{31}\cos^2\theta_{\text{eq}}\big)\Big] + \int dx \int dz \, (K_{31} - 1)\sin 2\theta_{\text{eq}}(\theta_{\text{eq}})_{,x}(\theta_{\text{eq}})_{,z} \tag{11}$$

— вклад упругих сил, а

$$W_{\text{el}} = -\int dx \int dz \, E(\theta_{\text{eq}})\cos^2(\theta_{\text{eq}} - \alpha) \tag{12}$$

— вклад электрических сил в общую энергию W соответственно.

Таким образом, система уравнений (1)–(3), (8), (9) и (11), (12), дополненная граничными (4)–(6) и начальными (7), (10) условиями, образует самосогласованную систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих эволюцию как поля директора $\hat{\mathbf{n}}$, так и поля скорости $\mathbf{v}$ к их равновесным распределениям по всему объему микрометровой ЖК-ячейки под действием сильного электрического поля $\mathbf{E}$, направленного под углом α к горизонтальным ограничивающим поверхностям.

3. Эволюция поля директора и скорости в ЖК-ячейке под действием сильного электрического поля

Когда сильное электрическое поле $\mathbf{E}$ ($E \sim 100E_{\text{th}}$) включено в момент времени $\tau = 0$ и направлено под углом $\alpha(\sim \frac{\pi}{2})$ к горизонтальным ограничивающим поверхностям ЖК-ячейки, планарно и однородно ориентированный нематик, образованный молекулами 5ЦБ, стремится переориентироваться в направлении вектора $\mathbf{E}$. Этот процесс переориентации описывается углом $\theta(x, z, \tau)$, а инициируемое разворотом директора $\hat{\mathbf{n}}$ поле скорости $\mathbf{v} = u(x, z, \tau)\hat{\mathbf{i}} + w(x, z, \tau)\hat{\mathbf{k}}$ описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1)–(3), (8), (9) и (11), (12), дополненных граничными (4)–(6) и начальными (7), (10) условиями как для угла θ, так и для функции тока ψ, а значения волновых чисел q_x и q_z определяются исходя из условия минимума полной энергии $W = W_{\text{elast}} + W_{\text{el}}$ [13,14]. Для случая нематика, образованного молекулами 5ЦБ, при температуре 300 K и плотности 10^3 kg/m^3, а также величине напряжения $U = 200$ V, приложенного поперек ЖК-ячейки толщиной 200 μm, значения параметров, которые входят в описанные выше уравнения, составляют $\delta_1 = 8.6 \cdot 10^{-6}$, $\delta_2 = 0.19$, $\delta_3 = 19.5$, $\gamma = -1.1$ и $K_{31} = 1.17$. Следует отметить, что величина порогового напряжения в нашем случае равна $E_{\text{th}} \sim 1.05 \cdot 10^4$ V/m, так что $E \sim 100E_{\text{th}}$.

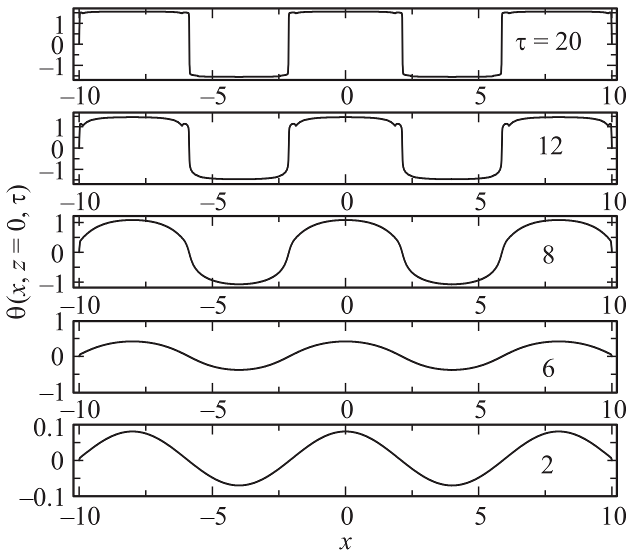

Рис. 2. Эволюция распределения угла поля $\theta(x, z = 0, \tau)$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$ к равновесному распределению $\theta_{\text{eq}}(x, z = 0) = \theta_{\text{eq}}(x, z = 0, \tau = \tau_R(A) = 20)$ для случая A и $E > 0$. Представлены состояния, соответствующие временам $\tau = 2, 6, 8, 12$ и 20.

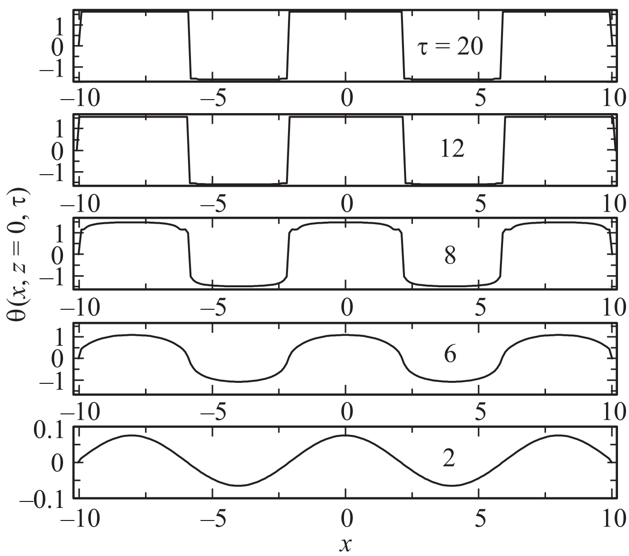

Рис. 3. То же, что на рис. 2, для случая B. Здесь $\tau_R(B) = 12$.

Приведенный нами ранее анализ подобных систем показал, что при определенном балансе упругих, вязких и электрических моментов и импульсов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, существует пороговое значение амплитуды угла θ_0^{th} (см. (7)), выше которого характер переориентации поля директора претерпевает изменение [13,14]. Так, было показано, что при всех прочих равных условиях при $\theta < \theta_0^{\text{th}}$ поле директора $\hat{\mathbf{n}}(x, z, \tau)$ разворачивается в направлении вектора $\mathbf{E}$ ($|\mathbf{E}| \sim 100E_{\text{th}}$) как единое целое, т. е. как монодомен. В то же время при значениях $\theta \geq \theta_0^{\text{th}}$ переориентация поля директора характеризуется формированием периодических структур по всему объему, занимаемому ЖК-фазой [13,14]. На рис. 2 представлены результаты расчета эволюции распределения угла $\theta(x, z = 0, \tau)$ к равновесному распределению $\theta_{\text{eq}}(x, z = 0)$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$, которое достигается спустя $\tau_R(A) = 20$ единиц безразмерного времени ($\sim 0.12\,\text{s}$). Эти расчеты были получены для случая жесткого сцепления ЖК-молекул с ограничивающими поверхностями (случай A). На рис. 3 представлены результаты расчета эволюции распределения угла $\theta(x, z = 0, \tau)$ к равновесному распределению $\theta_{\text{eq}}(x, z = 0)$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$ для случая мягкого сцепления ЖК-молекул с горизонтальными и жесткого с вертикальными ограничивающими поверхностями (случай B). Время релаксации в этом случае практически в 2 раза меньше, чем в случае A, и достигается спустя $\tau_R(B) = 12$ единиц безразмерного времени ($\sim 72\,\text{ms}$). Оба расчета были проведены при значениях углов $\alpha = 1.57(\sim 89.96^\circ)$ и $\theta_0 = 0.01(\sim 1.1^\circ)$, а критерий сходимости итерационной процедуры был выбран равным $\epsilon = |(\theta_{(m+1)} - \theta_{(m)})/\theta_{(m)}| \sim 10^{-4}$, итерационная процедура продолжалась до достижения заданной точности [17]. Состояния на обоих рисунках соответствуют временам $\tau = 2\,(\sim 12\,\text{ms})$, $6\,(\sim 36\,\text{ms})$, $8\,(\sim 48\,\text{ms})$, $12\,(\sim 72\,\text{ms})$ и $20\,(\sim 0.12\,\text{s})$. Здесь безразмерное время $\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_a}{\gamma_1}\left(\frac{U}{2d}\right)^2 t$ отсчитывалось с момента включения электрического поля. В обоих случаях равновесное распределение угла $\theta_{\text{eq}}(x, z = 0)$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$ характеризуется отчетливо выраженной периодической структурой с узлами в точках $x = \pm 2.175$ и ± 5.83 (случай A) и $x = \pm 2.19$ и ± 5.80 (случай B). Таким образом, на положение узлов периодической структуры, которая описывает равновесное распределение угла $\theta_{\text{eq}}(x, z = 0)$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$, характер сцепления ЖК-молекул с ограничивающими поверхностями практически не влияет. Следует также отметить, что на релаксацию распределения угла $\theta(x = 0, z, \tau)$ вдоль оси $z \in [-1, 1]$ к его равновесному распределению $\theta_{\text{eq}}(x = 0, z)$ характер сцепления ЖК-молекул с ограничивающими поверхностями также практически не влияет (рис. 4 и 5). В обоих описанных выше случаях сцепления (A и B) время релаксации $\tau_R(A, B) = 12$ ($\sim 72\,\text{ms}$).

Отметим, что величины волновых чисел q_x и q_z, которые обеспечивают минимум энергии $W_{\text{elast}} + W_{\text{el}}$, в случаях A и B равны $q_x = 0.785$ и $q_z = 64.336$ соответственно. Эволюция распределения безразмерных компонент вектора скорости $\mathbf{v} = u(x, z = 0, \tau)\hat{\mathbf{i}} + w(x, z = 0, \tau)\hat{\mathbf{k}}$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$ для случая B представлена на рис. 6. Здесь кривые *1* соответствуют распределению вертикальной компоненты $w(x, z = 0, \tau)$, а кривые *2* — горизонтальной компоненты $u(x, z = 0, \tau)$ вектора скорости $\mathbf{v}$. Представлены состояния, соответствующие безразмерным временам $\tau = 2\,(\sim 12\,\text{ms})$, $\tau = 6\,(\sim 36\,\text{ms})$, $\tau = 8$ ($\sim 48\,\text{ms}$), $\tau = 12$ ($\sim 72\,\text{ms}$) и $\tau = 20$ ($\sim 0.12\,\text{s}$). Обе безразмерные компоненты вектора скорости $u(x, z = 0, \tau)$ и $w(x, z = 0, \tau)$ растут

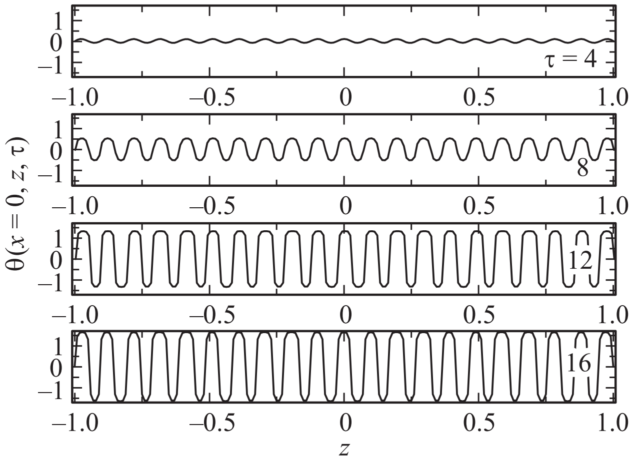

Рис. 4. Эволюция распределения угла $\theta(x = 0, z, \tau)$ вдоль оси $z \in [-1, 1]$ к равновесному распределению $\theta_{\text{eq}}(x = 0, z) = \theta_{\text{eq}}(x = 0, z, \tau = \tau_R(A) = 12)$ для случая A и $E > 0$. Представлены состояния, соответствующие временам $\tau = 4$, 8, 12 и 16.

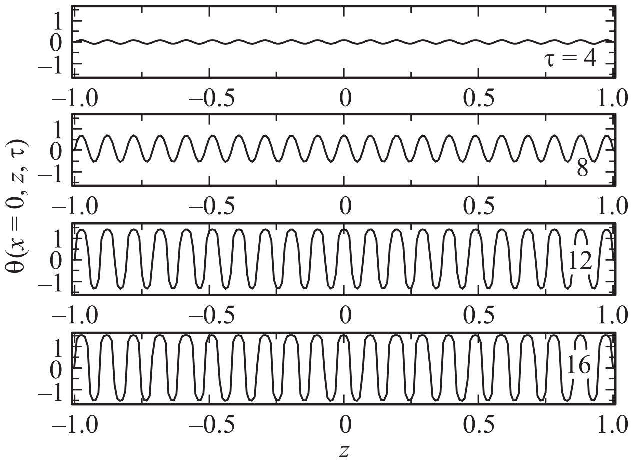

Рис. 5. То же, что на рис. 4, для случая B. Здесь $\tau_R(B) = 12$.

вплоть до максимальных значений, а затем начинают убывать так, что при $\tau_R(B) = 14$ обе компоненты обращаются в нуль. Максимальное значение вертикальной компоненты вектора скорости достигается вблизи узлов решетки $x = \pm 2.175$ и ± 5.83. Так, вблизи узла $x = 2.175$ достигается абсолютный максимум вертикальной компоненты вектора скорости $w(x = 2.175, z = 0, \tau = 8) \approx 0.13$ (или $\sim 5\,\text{mm/s}$). Также наши расчеты указывают на то, что в ЖК-ячейке формируется несколько вихрей, а границы этих вихрей задаются положениями узлов решетки. Так, согласно данным рис. 6, отчетливо наблюдается пять вихрей, вращающихся по часовой стрелке (см. рис. 6 для $\tau = 8$): $-10 < x < -5.83$, $-5.83 < x < -2.175$, $-2.175 < x < 2.175$, $2.175 < x < 5.83$ и $5.83 < x < 10$. Следует отметить, что характер сцепления ЖК-молекул с ограничивающими поверхностями оказывает пренебрежимо малое влияние на характер течения, возникающего в ЖК-ячейке вследствие переориентации поля директора.

Предположим далее, что в момент времени $\tau = \tau_R(A) = 20(\sim 0.12\,\mathrm{s})$ электрическое поле будет выключено, т.е. $E = 0$. В этом случае поле директора $\hat{\mathbf{n}}(x, z, \tau)$ под действием вязких, упругих и поверхностных сил и моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, начинает переориентироваться из состояния, характеризующегося углом $\theta_{\mathrm{eq}}(x, z)$, в состояние, характеризующееся планарной ориентацией ЖК-ячейки, как в случае A, так и в случае B. При этом угол $\theta(x, z, \tau)$ должен стремиться к нулю. Следует отметить, что время релаксации $\tau_R(\mathrm{off})$ в связи с малостью вязких, упругих и поверхностных сил и моментов по сравнению с электрическими значительно больше времен $\tau_R(\mathrm{A})$ и $\tau_R(\mathrm{B})$. На рис. 7 и 8 представлены результаты расчетов эволюции углов $\theta(x, z = 0, \tau)$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$ для случаев A и B. Так, на рис. 7 представлена эволюция угла $\theta(x, z = 0, \tau)$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$ для случая A для следующих после выключения электрического поля 20 единиц безразмерного времени, соответствующая временам $\tau = 22\,(\sim 0.132\,\mathrm{s})$, $\tau = 26\,(\sim 0.156\,\mathrm{s})$, $\tau = 28\,(\sim 0.168\,\mathrm{s})$, $\tau = 32\,(\sim 0.192\,\mathrm{s})$ и $\tau = 40\,(\sim 0.24\,\mathrm{s})$. На рис. 8 представлены результаты расчета эволюции угла $\theta(x, z = 0, \tau)$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$ для случая B и тех же, что и на рис. 7, 20 единиц безразмерного времени, отсчитанных с момента выключения электрического поля. Результаты обоих расчетов указывают на то, что быстрее релаксируют области, удаленные от положений узлов периодической структуры, т.е. $x = \pm 2.175$ и ± 5.83. Безразмерное время релаксации $\tau_R(\mathrm{off})$ поля директора к планарно ориентированному распределению по всему объему ЖК-ячейки равно 400 (или $\sim 2.4\,\mathrm{s}$).

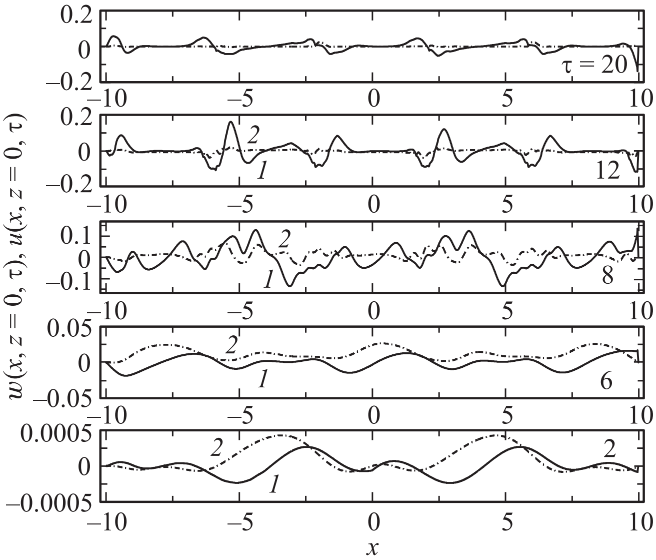

Рис. 6. Эволюция распределения компонент вектора скорости $\mathbf{v} = u(x, z = 0, \tau)\hat{\mathbf{i}} + w(x, z = 0, \tau)\hat{\mathbf{k}}$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$ для случая B и $E > 0$. Представлены состояния, соответствующие временам $\tau = 2, 6, 8, 12$ и 20. Кривые *1* отвечают вертикальной составляющей w, кривые *2* — горизонтальной составляющей u вектора скорости $\mathbf{v}$.

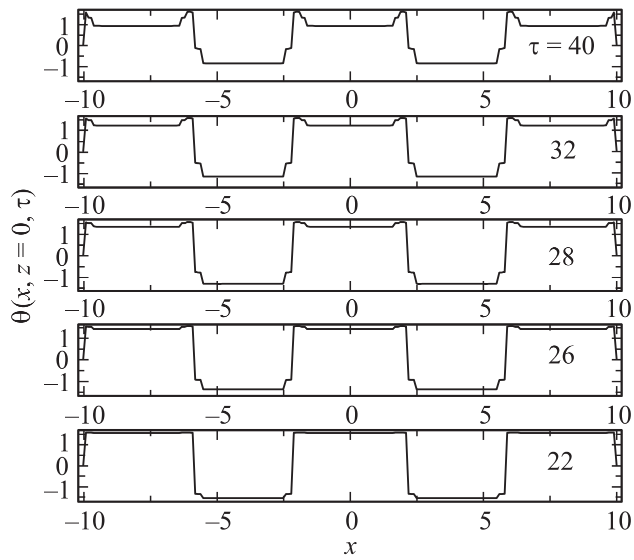

Рис. 7. Эволюция распределения угла $\theta(x, z = 0, \tau)$ вдоль оси $x \in [-10, 10]$ для случая A и $E = 0$. Представлены состояния, соответствующие временам $\tau = 22, 26, 28, 32$ и 40.

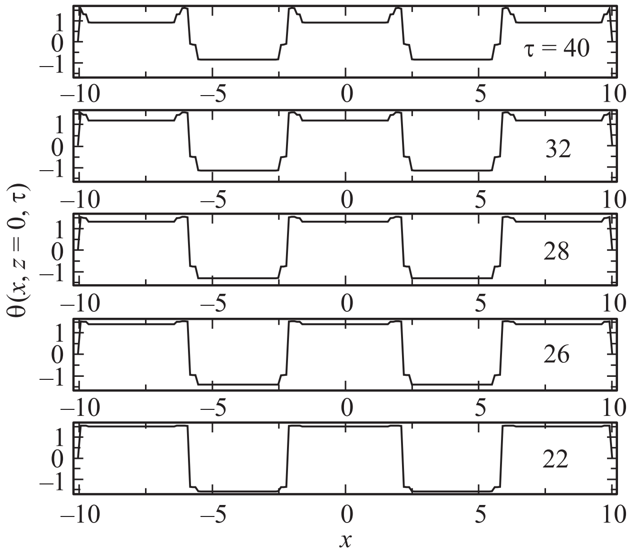

Рис. 8. То же, что на рис. 7, для случая B и $E = 0$.

4. Заключение

В работе представлено исследование эволюции как поля директора $\hat{\mathbf{n}}$, так и поля скорости $\mathbf{v}$, инициируемого переориентацией поля директора в микроскопической, планарно ориентированной ЖК-ячейке под действием сильного электрического поля $E = 100E_{\mathrm{th}}$, направленного под углом $\alpha \sim \pi/2$ к горизонтальным поверхностям прямоугольной ЖК-ячейки. Численные расчеты, выполненные в рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксена–Лесли, показали, что при определенных соотношениях моментов и импульсов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, в процессе переориентации $\hat{\mathbf{n}}$ могут возникнуть переходные периодические структуры, если соответствующая мода искажения обладает наибыстрейшим откликом и таким образом подавляет все остальные моды, в том числе и однородные. На положение узлов этих периодических структур оказывают влияние величина поля E, угол α, а также характер сцепления ЖК-молекул с ограничивающими поверхностями. Было показано, что в случае мягкого сцепления ЖК-молекул с горизонтальными и жесткого сцепления с вертикальными ограничивающими поверхностями ЖК-ячейки время, необходимое для релаксации поля директора к его равновесному распределению, практически в 2 раза меньше времени, необходимого для релаксации поля директора в случае жесткого сцепления. Расчеты, выполненные для нематика, образованного молекулами 4-n-пентил-4′-цианобифенила, указывают на то, что в ЖК-ячейке может формироваться несколько вихрей, вызванных переориентацией поля директора, а границы этих вихрей определяются положениями узлов периодической структуры. Следует отметить, что методы ЯМР-спектроскопии позволяют экспериментально исследовать переориентацию поля директора, описываемую углом $\theta(t)$, под действием сильного электрического поля E [18,19]. Это достигается тем, что ЖК-образец вначале ориентируется сильным магнитным полем $\mathbf{B}$ с соответствующим расщеплением квадрупольного спектра $\Delta\bar{\nu}_0$. Если в какой-то момент времени включить сильное поперечное электрическое поле $\mathbf{E}$, то это ведет к убыванию величины расщепления квадрупольного спектра $\Delta\bar{\nu}$. При этом величина $\Delta\bar{\nu}(t)/\Delta\bar{\nu}_0 = P_2\big(\cos\theta(t)\big)$ связана с углом отклонения $\theta(t)$ поля директора от направления магнитного поля $\mathbf{B}$. Здесь $P_2(x)$ — полином Лежандра второго порядка. Таким образом, ЯМР-спектроскопия позволяет проследить эволюцию угла $\theta(t)$ от его начального значения θ_0 до конечного θ_∞. Располагая зависимостью $\theta(t)$ (или $\Delta\bar{\nu}(t)/\Delta\bar{\nu}_0$), можно сравнивать данные, полученные численными и экспериментальными методами. Что касается величины напряжения $\sim 200\,\mathrm{V}$ и толщины ЖК-ячейки $2d = 200\,\mu\mathrm{m}$, то эти значения близки к значениям этих параметров, использовавшимся при ЯМР-измерениях [12]. Мы полагаем, что данная работа проливает свет на неизученные аспекты динамики переориентации поля директора в микроскопических ЖК-ячейках под действием сильного электрического поля.

5. Приложение. Моменты и компоненты тензора напряжений

Рассмотрим нематический жидкий кристалл, где поле директора задано вектором $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, 0, n_z) = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$, а баланс вращательных моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, состоит из $\mathbf{T}_{\mathrm{elast}} = T_{\mathrm{elast}}\hat{\mathbf{j}} = \frac{\delta\mathscr{W}_F}{\delta\hat{\mathbf{n}}} \times \hat{\mathbf{n}}$ — упругого, $\mathbf{T}_{\mathrm{vis}} = T_{\mathrm{vis}}\hat{\mathbf{j}} = \frac{\delta\mathscr{R}^{\mathrm{vis}}}{\delta\hat{\mathbf{n}}_t} \times \hat{\mathbf{n}}$ — вязкого, $\mathbf{T}_{\mathrm{el}} = T_{\mathrm{el}}\hat{\mathbf{j}} = \frac{\delta\psi_{\mathrm{el}}}{\delta\hat{\mathbf{n}}} \times \hat{\mathbf{n}}$ — электрического вклада [13,14]. Здесь $\mathscr{W}_F = \frac{1}{2}\big[K_1(\nabla\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + K_3(\hat{\mathbf{n}}\times\nabla\times\hat{\mathbf{n}})^2\big]$ — плотность упругой энергии, приходящейся на единицу объема ЖК-фазы; $\psi_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2}\,\epsilon_0\epsilon_a(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})^2$ — плотность электрической энергии;

$$\mathscr{R}^{\mathrm{vis}} = \alpha_1(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{D}_s\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + \gamma_1(\hat{\mathbf{n}}_t - \mathbf{D}_a\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 + 2\gamma_2(\hat{\mathbf{n}}_t - \mathbf{D}_a\cdot\hat{\mathbf{n}})\cdot\big(\mathbf{D}_s\cdot\hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{D}_s\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}\big) + \alpha_4\mathbf{D}_s:\mathbf{D}_s + (\alpha_5+\alpha_6)(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{D}_s\cdot\mathbf{D}_s\cdot\hat{\mathbf{n}})$$

— вязкий вклад в полную функцию Рэлея $\mathscr{R} = \mathscr{R}^{\mathrm{vis}}$; K_1 и K_3 — коэффициенты упругости, соответствующие изгибным и продольным деформациям; $\mathbf{D}_s = \frac{1}{2}\big[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\big]$ и $\mathbf{D}_a = \frac{1}{2}\big[\nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T\big]$ — симметричный и антисимметричный вклады в тензор $\nabla\mathbf{v}$; $\hat{\mathbf{n}}_t = \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt}$ — материальная производная; $\alpha_i (i = 1,\ldots,6)$ — коэффициенты вязкости Лесли, а $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_3 + \alpha_2$ — коэффициенты вращательной вязкости.

Безразмерный тензор напряжений (ТН) представляет собой сумму, состоящую из упругих (σ^{elast}), вязких (σ^{vis}) и электрических (σ^{el}) вкладов за вычетом $P\mathscr{I}$. Компоненты упругого ТН имеют вид

$$\sigma^{\mathrm{elast}}_{xx} = \delta_1\big(-\Delta_1\theta_{,x}^2 + \Delta_3\theta_{,x}\theta_{,z}\big),$$

$$\sigma^{\mathrm{elast}}_{zz} = \delta_1\big(-\Delta_2\theta_{,z}^2 + \Delta_3\theta_{,x}\theta_{,z}\big),$$

$$\sigma^{\mathrm{elast}}_{xz} = \delta_1\big(-\Delta_1\theta_{,x}\theta_{,z} + \Delta_3\theta_{,z}^2\big),$$

$$\sigma^{\mathrm{elast}}_{zx} = \delta_1\big(\Delta_2\theta_{,x}\theta_{,z} + \Delta_3\theta_{,x}^2\big),$$

где $\Delta_1 = \sin^2\theta + K_{31}\cos^2\theta$, $\Delta_2 = \cos^2\theta + K_{31}\sin^2\theta$, $\Delta_3 = \frac{1-K_{31}}{2}\sin 2\theta$, $K_{31} = K_3/K_1$.

Безразмерные компоненты вязкого ТН имеют вид

$$\sigma^{\mathrm{vis}}_{ij} = f^{1,\mathrm{vis}}_{ij}\psi_{,xx} + f^{2,\mathrm{vis}}_{ij}\psi_{,zz} + f^{3,\mathrm{vis}}_{ij}\psi_{,xz} + f^{4,\mathrm{vis}}_{ij}\psi_{,zx},$$

где

$$f^{1,\mathrm{vis}}_{xx} = -\frac{\sin 2\theta}{4}\Big(\frac{2\alpha_1}{\gamma_1} + \gamma^2\cos 2\theta\Big),\quad f^{2,\mathrm{vis}}_{xx} = -f^{1,\mathrm{vis}}_{xx},$$

$$f^{3,\mathrm{vis}}_{xx} = \frac{1}{\gamma_1}\big[\alpha_1\cos 2\theta\cos^2\theta + (\alpha_5+\alpha_6)\cos^2\theta + \alpha_4\big] - \frac{\gamma^2}{4}\sin^2\theta,$$

$$f^{4,\mathrm{vis}}_{xx} = -\frac{\gamma}{2}\big[\sin 2\theta(\Delta_1\theta_{,xx} + \Delta_2\theta_{,zz}) + \Delta_5\big(\theta_{,x}^2 + 2\theta_{,xz} - \theta_{,z}^2 - 2\theta_{,x}\theta_{,z}\big)\big],$$

$$f_{zz}^{1,\text{vis}} = -\frac{\sin 2\theta}{4}\Big(2\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\cos^2\theta - \gamma^2\cos 2\theta\Big),\ \ f_{zz}^{2,\text{vis}} = -f_{zz}^{1,\text{vis}},$$

$$f_{zz}^{3,\text{vis}} = \frac{1}{\gamma_1}\big[\alpha_1\cos 2\theta\sin^2\theta - (\alpha_5+\alpha_6)\cos^2\theta - \alpha_4\big]$$

$$+\frac{\gamma^2}{4}\sin^2\theta,\quad f_{zz}^{4,\text{vis}} = -f_{xx}^{4,\text{vis}},$$

$$f_{xz}^{1,\text{vis}} = \frac{1}{4\gamma_1}\big(-\alpha_1\sin^2 2\theta + 2\gamma_2\cos 2\theta - 2\alpha_4$$

$$-\alpha_5 - \alpha_6 - \gamma_1\big) + \Delta_6^2,$$

$$f_{xz}^{2,\text{vis}} = \frac{1}{4\gamma_1}\big(\alpha_1\sin^2 2\theta + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \gamma_1\big) + \Delta_7,$$

$$f_{xz}^{3,\text{vis}} = -\frac{\sin 4\theta}{4}\Big(\frac{\alpha_1}{\gamma_1} + \gamma^2\Big),$$

$$f_{xz}^{4,\text{vis}} = -\Delta_6\big(\Delta_1\theta_{,xx} + \Delta_2\theta_{,zz}\big)$$

$$-\Delta_3\Delta_6\big(\theta_{,x}^2 + 2\theta_{,xz} - \theta_{,z}^2 - 2\theta_{,x}\theta_{,z}\big),$$

$$f_{zx}^{1,\text{vis}} = -\frac{1}{4\gamma_1}\big(\alpha_1\sin^2 2\theta + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \gamma_1\big) + \Delta_6^2,$$

$$f_{zx}^{2,\text{vis}} = \frac{1}{4\gamma_1}\big(\alpha_1\sin^2 2\theta + 2\gamma_2\cos 2\theta + 2\alpha_4 + \alpha_5$$

$$+\alpha_6 + \gamma_1\big) - \Delta_8^2,\quad f_{zx}^{3,\text{vis}} = -f_{xz}^{3,\text{vis}},$$

$$f_{zx}^{4,\text{vis}} = \Delta_8\big(\Delta_1\theta_{,xx} + \Delta_2\theta_{,zz}\big)$$

$$+\Delta_8\Delta_3\big(\theta_{,x}^2 + 2\theta_{,xz} - \theta_{,z}^2 - 2\theta_{,x}\theta_{,z}\big),$$

где

$$\Delta_5 = \frac{1-K_{31}}{2}\sin^2 2\theta,\ \ \Delta_6 = \frac{1}{2}\big(1-\gamma\cos 2\theta\big),$$

$$\Delta_7 = \frac{1}{4}\big(1-\gamma^2\cos^2 2\theta\big),\ \ \Delta_8 = \frac{1}{2}\big(1+\gamma\cos 2\theta\big).$$

Безразмерный аналог уравнения Навье–Стокса $\rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\cdot\sigma$ принимает вид

$$\delta_2\big[(\Delta\psi)_{,\tau} + \psi_{,z}(\Delta\psi)_{,x} - \psi_{,x}(\Delta\psi)_{,z}\big] = \hat{\mathscr{L}}\psi + \mathscr{F},$$

где $\Delta\psi = \psi_{,xx} + \psi_{,zz}$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{\text{elast}} + \mathscr{F}_{\text{el}}$, а

$$\mathscr{F}_{\text{elast}} = \big(\sigma_{xx}^{\text{elast}} + \sigma_{zz}^{\text{elast}}\big)_{,xz} + \big(\sigma_{zx}^{\text{elast}}\big)_{,zz} - \big(\sigma_{xz}^{\text{elast}}\big)_{,xx},$$

$$\mathscr{F}_{\text{el}} = -\big(\sigma_{zz}^{\text{el}}\big)_{,xz},\ \ \sigma_{zz}^{\text{el}} = \bar{E}^2\sin\alpha\left(\frac{\epsilon_\perp}{\epsilon_a} + \sin^2\theta\right).$$

Оператор

$$\hat{\mathscr{L}}\psi = a_1\psi_{,zzzz} + a_2\psi_{,xzzz} + a_3\psi_{,xxzz} + a_4\psi_{,xxxz}$$

$$+a_5\psi_{,xxxx} + a_6\psi_{,zzz} + a_7\psi_{,xzz} + a_8\psi_{,xxz}$$

$$+a_9\psi_{,xxx} + a_{10}\psi_{,zz} + a_{11}\psi_{,xz} + a_{12}\psi_{,xx},$$

где

$$a_1 = f_{zx}^{2,\text{vis}},\ \ a_2 = f_{zx}^{3,\text{vis}} + f_{xx}^{2,\text{vis}} - f_{zz}^{2,\text{vis}},$$

$$a_3 = f_{zx}^{1,\text{vis}} - f_{xz}^{2,\text{vis}} + f_{xx}^{3,\text{vis}} - f_{zz}^{3,\text{vis}},$$

$$a_4 = f_{xx}^{1,\text{vis}} - f_{zz}^{1,\text{vis}} - f_{xz}^{3,\text{vis}},$$

$$a_5 = -f_{xz}^{1,\text{vis}},\ \ a_6 = f_{xx,z}^{2,\text{vis}} - f_{zz,z}^{2,\text{vis}} + 2f_{zx,z}^{2,\text{vis}},$$

$$a_7 = f_{xx,z}^{2,\text{vis}} - f_{zz,z}^{2,\text{vis}} + f_{xx,x}^{3,\text{vis}} - f_{zz,z}^{3,\text{vis}} + 2f_{zx,z}^{3,\text{vis}} - 2f_{xz,x}^{3,\text{vis}},$$

$$a_8 = f_{xx,x}^{1,\text{vis}} - f_{zz,x}^{1,\text{vis}} + f_{xx,z}^{3,\text{vis}} - f_{zz,z}^{3,\text{vis}} + 2f_{zx,z}^{1,\text{vis}} - 2f_{xz,x}^{3,\text{vis}},$$

$$a_9 = f_{xx,z}^{1,\text{vis}} - f_{zz,z}^{1,\text{vis}} - 2f_{xz,x}^{1,\text{vis}},$$

$$a_{10} = f_{xx,xz}^{2,\text{vis}} - f_{zz,xz}^{2,\text{vis}} + f_{zx,zz}^{2,\text{vis}} - f_{xz,xx}^{2,\text{vis}},$$

$$a_{11} = f_{xx,xz}^{3,\text{vis}} - f_{zz,xz}^{3,\text{vis}} + f_{zx,zz}^{3,\text{vis}} - f_{xz,xx}^{3,\text{vis}},$$

$$a_{12} = f_{xx,xz}^{1,\text{vis}} - f_{zz,xz}^{1,\text{vis}} + f_{zx,zz}^{1,\text{vis}} - f_{xz,xx}^{1,\text{vis}}.$$

Список литературы

[1] R.B. Shoch, J.Y. Han, P. Renaud. Rev. Mod. Phys. **80**, 839 (2008).
[2] T.M. Squires, S.R. Quake. Rev. Mod. Phys. **77**, 977 (2005).
[3] P. Hanggi, F. Marchesoni. Rev. Mod. Phys. **81**, 387 (2009).
[4] S. Lee, R. An, J.A. Hunt. Nature Nanotechnol. **5**, 412 (2010).
[5] S. Samitsu, Y. Takanishi, J. Yamamoto. Nature Mater. **9**, 816 (2010).
[6] S.V. Pasechnik, V.G. Chigrinov, D.V. Shmeliova. Liquid crystals: viscous and elastic properties. Wiley-VCH (2009). 424 p.
[7] H. Ren, S. Xu, S.-T. Wu. Lab Chip **13**, 100 (2013).
[8] R. Daugla, S.C. Kayi, Ch.N. Baroud. Proc. Natl. Acad. Sci. **110**, 853 (2013).
[9] W. Sparreboom, A. van den Berg, J.C.T. Eijkel. New J. Phys. **12**, 011 504 (2010).
[10] D.K. Yang, S.T. Wu. Fundamentals of Liquid Crystal Devices. Wiley, N.Y. (2006). 387 p.
[11] P.G. de Gennes, J. Prost. The physics of liquid crystals. Oxford Univ. Press, Oxford (1995). 400 p.
[12] A. Sugimura, A.V. Zakharov. Phys. Rev. E **84**, 021 703 (2011).
[13] A.A. Vakulenko, A.V. Zakharov. Phys. Rev. E **88**, 022 505 (2013).
[14] A.V. Zakharov, A.A. Vakulenko. J. Chem. Phys. **139**, 244 904 (2013).
[15] J.L. Ericksen. Arch. Ration. Mech. Anal. **4**, 231 (1960).
[16] F.M. Leslie. Arch. Ration. Mech. Anal. **28**, 265 (1968).
[17] И.С. Березин, Н.Р. Жидков. Методы вычислений. Физматгиз, М. (1964). 464 с.
[18] R.Y. Dong. Nuclear magnetic resonance of liquid crystals. 2nd ed. Springer-Verlag, N.Y. (1997). 309 p.
[19] A. Sugimura, G.R. Luckhurst. In: *Nuclear magnetic resonance spectroscopy of liquid crystals* / Ed. R.Y. Dong. World Scientific Publ. Co., Singapore (2009). Ch. 10.