

01

## Метод расчета потенциала элементов космического аппарата в трехмерном пространстве

© Н.Д. Семкин, Р.А. Помельников, В.В. Брагин, М.А. Родина

Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет),  
443086 Самара, Россия  
e-mail: semkin@ssau.ru

(Поступило в Редакцию 19 сентября 2014 г. В окончательной редакции 22 марта 2016 г.)

Предложена методика расчета распределения потенциалов поверхности космического аппарата, основанная на триангуляционном методе аппроксимации поверхностей, методе площадок и аналитическом вычислении элементов матрицы кулоновского взаимодействия. Описанная методика отличается широким диапазоном применимости, включающим как низкие, так и геостационарные и полярные орбиты, а также увеличивает скорость и точность расчета.

### Введение

Взаимодействие космического аппарата (КА) с окружающей космической средой является сложным непрерывным физико-химическим процессом, изучение которого имеет важное научное и прикладное значение [1–3]. Одним из результатов взаимодействия космической среды с КА является электризация, т.е. накопление избыточного заряда на его поверхности, что приводит к возникновению разности потенциалов между элементами поверхности КА и может стимулировать электростатические разряды (ЭСР). В связи с тем что данный процесс приводит к сбоям бортовой аппаратуры (БА), ее отказам, а возможно, и полному выходу из строя, математическое моделирование воздействия космической плазмы на аппарат является актуальной задачей.

В настоящее время существуют несколько программных пакетов математического моделирования электризации КА, основанных на различных аппроксимациях поверхности и математических методиках [4], например, на методе интегральных уравнений (МИУ) или методе конечных элементов (МКЭ). У этих программных пакетов имеются свои преимущества и недостатки.

Существуют следующие программные комплексы для моделирования полярных орбит: NASCAP-LEO, POLAR. Методики расчета для данных программных комплексов обладают рядом недостатков:

- аппроксимация поверхности КА прямоугольной сеткой, обладающей низкой точностью аппроксимации элементов конструкции с малым радиусом кривизны,

- необходимость решения электростатической задачи (распределение плотностей зарядов и полей) на каждом временном шаге полностью.

В [4] устранена необходимость решения электростатической задачи на каждом временном шаге. Однако данная методика предназначена для решения электростатической задачи в разреженной плазме (для геостационар-

ной орбиты), кроме того, собственная емкость элементарной площадки находится через специальные функции.

Применение средств защиты от статического электричества, а также усложнение геометрической и электрофизической поверхности КА, функционирующих на полярной орбите с высотой до 2000 km, требует разработки методики, устраняющей недостатки существующих.

Для построения математической модели электризации КА выбран МИУ. Данный метод пространственного распределения потенциала описывается следующим соотношением:

$$U(r) = \int_S \frac{\sigma(r')}{|r - r'|} dS', \quad (1)$$

где  $U(r)$  — пространственное распределение потенциала,  $\sigma(r')$  — относительная плотность поверхностного заряда,  $r'$  — радиус-вектор центра тяжести  $j$ -го элемента поверхности КА.

Для численного решения данного интегрального уравнения относительно  $\sigma(r)$  производится триангуляция поверхности КА. Плотность поверхностного заряда  $\sigma_i$  на каждом элементе считается постоянной, а, следовательно, интегральное уравнение сводится к системе линейных уравнений относительно плотности зарядов элементов  $\sigma_i$ :

$$\sum_j A_{mn} \sigma_j = U_i^*, \quad (2)$$

где  $A_{mn}$  — матрица кулоновского взаимодействия, обратная по значению матрице собственных емкостей  $A_{mn} = \frac{1}{c_{mn}}$ ;  $U_i^*$  — эффективный потенциал поверхности  $i$ -го элемента.

Искомым решением этой системы является матрица взаимных емкостей элементов поверхности КА.

В ряде случаев в диагональных элементах этой матрицы возникает сингулярное возмущение, поэтому уравнение (1) относится к уравнениям Фредгольма первого рода.

## Методика расчета

Для устранения перечисленных выше недостатков существующих методик расчета потенциала поверхности низкоорбитальных КА разработана методика, которая заключается в следующем.

1. Проведение триангуляции поверхности КА методом Делоне [5,6] так, чтобы геометрические размеры полученных элементов поверхности (треугольников) были меньше радиуса Дебая для свойств плазмы на выбранной высоте и орбите функционирования КА. Это обеспечит высокую точность аппроксимации поверхности.

Для этого находят центры тяжести полученных треугольников и вычисляется интеграл следующего вида [7]:

$$A_{mn} = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad (3)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — радиусы-векторы центра тяжести  $i$ -го треугольника, интегрирование по переменной  $x, y, z$  ведется по площади треугольника.

2. Для упрощения решения уравнения вида (3) и повышения скорости вычислений при каждом вычислении  $i$ -го треугольника переходят к новой системе координат так, чтобы треугольник располагался в плоскости  $XOY$ . Для этого необходимо сдвинуть начало координат в одну из вершин, а затем совершить три обратных поворота вокруг осей координат на углы Эйлера, описанные следующими формулами:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y_1 = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z_1 = z, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta, \\ z_2 = y_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = x_2 \cos \psi + z_2 \sin \psi, \\ y_3 = y_2, \\ z_3 = -x_2 \sin \psi + z_2 \cos \psi. \end{cases} \quad (4)$$

После преобразований координат  $i$ -го треугольника уравнение (3) примет вид

$$A_{mn} = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}. \quad (5)$$

3. Определяются пределы интегрирования уравнения (5). Интегрирование по  $dx$  проводится в пределах от  $x_{pi}$  до  $x_{vi}$ , где  $x_{pi}$  — значение  $x$  составляющей координаты точки пересечения высоты, опущенной из одной вершины  $i$ -го треугольника и противоположного ребра, а  $x_{vi}$  — это значение  $x$  составляющей точки вершины  $i$ -го треугольника (рис. 1). Интегрирование по  $dy$  проводится в пределах от  $(A_1x + B_1)$  до  $(A_2x + B_2)$ ,

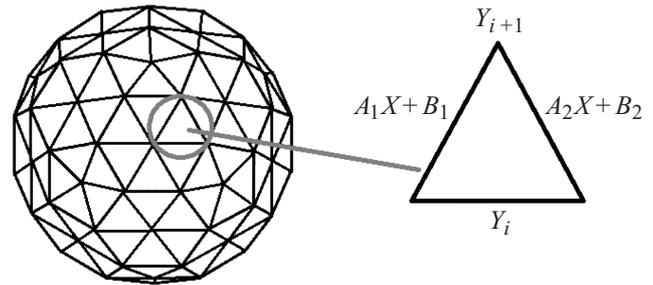


Рис. 1. Определение пределов интегрирования.

где коэффициенты прямых вычисляются по следующим формулам:

$$A = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},$$

$$B = y_i - \frac{x_i}{x_{i+1} - x_i} (y_{i+1} - y_i). \quad (6)$$

После подстановки пределов интегрирования в уравнение (5) получим

$$A_{mn} = \int_{x_{pi}}^{x_{vi}} dx \int_{A_1x - B_1}^{A_2x - B_2} \frac{dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}. \quad (7)$$

4. Находится аналитическое решение уравнения (7), так как оно является сингулярным относительно точек  $x = x_0$  и  $y = y_0$  и нельзя применять численные методы. Нахождение аналитического решения с такими областями интегрирования является сложной математической задачей. Для ее упрощения плоские элементы конструкции КА будем дискретизировать прямоугольными треугольниками, а для случая с элементами поверхности, имеющими радиус кривизны, применяем дополнительное разбиение треугольников, полученных после триангуляции Делоне, на прямоугольные треугольники. Для полученных треугольников найдем центры тяжести, как описано в п. 1, и запишем уравнение

$$A_{mn} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_i}^{Ax+B} \frac{dy}{\sqrt{(x-x_{Ti})^2 + (y-y_{Ti})^2}}. \quad (8)$$

Произведем следующие замены в уравнении (8):

$$C = x - x_{Ti}, \quad D = y - y_{Ti}, \quad dD = dy$$

и получим с учетом изменения области интегрирования следующее уравнение:

$$A_{mn} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_{y_i - y_{Ti}}^{Ax + B - y_{Ti}} \frac{dD}{\sqrt{C^2 + D^2}}. \quad (9)$$

В результате интегрирования (9) получаем разность интегралов

$$A_{mn} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \ln \left( Ax + B - y_{Ti} + \sqrt{(x - x_{Ti})^2 + (Ax + B - y_{Ti})^2} \right) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \ln \left( y_i - y_{Ti} + \sqrt{(x - x_{Ti})^2 + (y_i y_{Ti})^2} \right) dx. \quad (10)$$

Преобразуем натуральные логарифмы в уравнении (10) в обратные гиперболические функции [8] и после преобразований получим

$$A_{mn} = \int_{x_i - x_{Ti}}^{x_{i+1} - x_{Ti}} \text{Arcsh} \left( \frac{Ax + B_{yTi}}{x - x_{Ti}} \right) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \text{Arcsh} \left( \frac{y_i - y_{Ti}}{x - x_{Ti}} \right) dx, \quad (11)$$

где  $B_{yTi} = B - y_{Ti}$ .

В результате решения первого интеграла в выражении (11) получим

$$\int_{x_i - x_{Ti}}^{x_{i+1} - x_{Ti}} \text{Arcsh} \left( \frac{Ax + B_{yTi}}{x - x_{Ti}} \right) dx = |t| \text{Arcsh} \left( \frac{At + M}{t} \right) + \left| \frac{M}{\sqrt{1 + A^2}} \right| \ln \left( 2\sqrt{(1 + A^2)t^2 + M^2 + 2AMt} + \frac{2(AM + t + A^2t)}{\sqrt{1 + A^2}} \right) \Big|_{x_i - x_{Ti}}^{x_{i+1} - x_{Ti}}. \quad (12)$$

После ряда преобразований выражения (12) получим

$$\int_{x_i - x_{Ti}}^{x_{i+1} - x_{Ti}} \text{Arcsh} \left( \frac{Ax + B_{yTi}}{x - x_{Ti}} \right) dx = |t| \text{Arcsh} \left( \frac{At + Ax_{Ti} + B_{yTi}}{t} \right) + \left| \frac{Ax_{Ti} + B_{yTi}}{\sqrt{1 + A^2}} \right| \left( \text{Arcsh} \left( \frac{A(Ax_{Ti} + B_{yTi}) + t + A^2t}{Ax_{Ti} + B_{yTi}} \right) + \ln \left( \frac{2(Ax_{Ti} + B_{yTi})}{\sqrt{1 + A^2}} \right) \right) \Big|_{x_i - x_{Ti}}^{x_{i+1} - x_{Ti}}. \quad (13)$$

Второй интеграл в уравнении (11) есть:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \text{Arcsh} \left( \frac{y_i - y_{Ti}}{x - x_{Ti}} \right) dx = |x - x_{Ti}| \text{Arcsh} \left( \frac{y_i - y_{Ti}}{x - x_{Ti}} \right) + |y_i - y_{Ti}| \text{Arcsh} \left( \frac{x_i - x_{Ti}}{y_i - y_{Ti}} \right) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}}. \quad (14)$$

С учетом равенств (13) и (14) окончательное выражение матрицы взаимных емкостей элементов поверхности КА (11) выглядит следующим образом:

$$A_{mn} = A_1 - A_2 - A_3 + A_4, \quad (15)$$

где

$$A_1 = |x_{i+1} - x_{Ti}| \text{Arcsh} \left( \frac{Ax_{i+1} + B_{yTi}}{t} \right) + \left| \frac{Ax_{Ti} + B_{yTi}}{\sqrt{1 + A^2}} \right| \times \text{Arcsh} \left( \frac{A(Ax_{i+1} + B_{yTi}) + x_{i+1} - x_{Ti} + A^2(x_{i+1} - x_{Ti})}{Ax_{Ti} + B_{yTi}} \right),$$

$$A_2 = |x_i - x_{Ti}| \text{Arcsh} \left( \frac{Ax_{i+1} + B_{yTi}}{t} \right) + \left| \frac{Ax_{Ti} + B_{yTi}}{\sqrt{1 + A^2}} \right| \times \text{Arcsh} \left( \frac{A(Ax_{i+1} + B_{yTi}) + x_i - x_{Ti} + A^2(x_i - x_{Ti})}{Ax_{Ti} + B_{yTi}} \right),$$

$$A_3 = |x_{i+1} - x_{Ti}| \text{Arcsh} \left( \frac{y_i - y_{Ti}}{x_{i+1} - x_{Ti}} \right) + |y_i - y_{Ti}| \text{Arcsh} \left( \frac{x_{i+1} - x_{Ti}}{y_i - y_{Ti}} \right),$$

$$A_4 = |x_i - x_{Ti}| \text{Arcsh} \left( \frac{y_i - y_{Ti}}{x_{i+1} - x_{Ti}} \right) + |y_i - y_{Ti}| \text{Arcsh} \left( \frac{x_i - x_{Ti}}{y_i - y_{Ti}} \right).$$

5. Для случая учета параметров плазмы на низких полярных орбитах в уравнение (1) необходимо добавить радиус Дебая, через который учитываются параметры плазмы для выбранной орбиты:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \iint_S \frac{dy}{|r - r_0|} \exp \left( \frac{-r}{d} \right), \quad (16)$$

где  $d$  — радиус Дебая.

Так как выражение (16) является сингулярным, для упрощения вычислений разложим часть уравнения под внутренним интегралом в ряд относительно  $r$ :

$$\frac{dr}{|r - r_0|} \exp \left( \frac{-r}{d} \right) = \frac{r^n}{n! d^n |r - r_0|}, \quad (17)$$

где  $n$  — порядковый номер элемента ряда.

Для решения уравнения (17) далее можно применить численные методы интегрирования, однако на размер дискрета разбиения поверхности накладывается условие из вышеприведенного п. 1. Это позволяет рассчитывать потенциал и заряд элемента поверхности КА в условиях воздействия факторов космического пространства на низких полярных орбитах.

## Результаты расчета

В качестве примера проведен расчет потенциалов для плоского элемента конструкции КА (солнечной батареи). Получена матрица собственных емкостей, приведенная в таблице.

Матрица собственных емкостей плоской поверхности КА

2.407	0.960	0.519	0.365	0.508	0.724	0.367	0.347
0.960	2.407	0.724	0.508	0.365	0.519	0.347	0.367
0.508	0.724	2.407	0.960	0.353	0.532	0.508	0.724
0.365	0.519	0.960	2.407	0.264	0.350	0.365	0.519
0.519	0.365	0.347	0.264	2.407	0.960	0.519	0.365
0.724	0.508	0.532	0.353	0.960	2.407	0.724	0.508
0.367	0.347	0.519	0.365	0.508	0.724	2.407	0.960
0.347	0.367	0.724	0.508	0.365	0.519	0.960	2.407

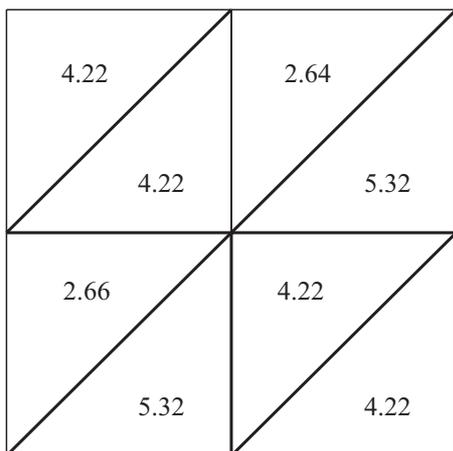


Рис. 2. Распределение заряда на поверхности плоского элемента КА.

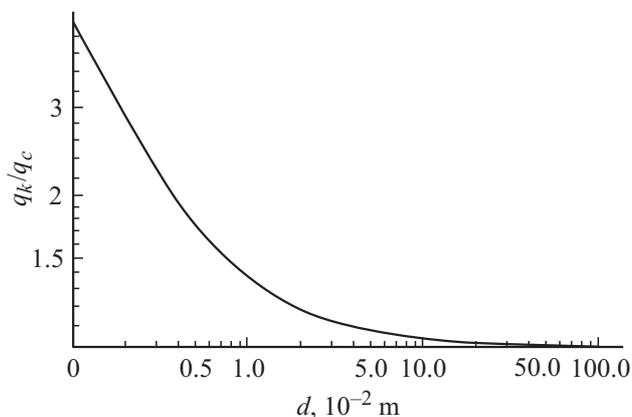


Рис. 3. Зависимость отношения заряда на краю пластины к заряду в центре пластины при постоянном потенциале от радиуса Дебая.

Из матрицы собственных емкостей поверхности получено распределение заряда на поверхности плоского элемента КА, приведенное на рис. 2.

На рис. 3 приведена зависимость величины заряда в центре пластины от радиуса Дебая при том же потенциале на пластине, т. е. зависимость распределения заряда на пластине от параметров плазмы.

На рис. 4 показано изменение распределения заряда в зависимости от величины радиуса Дебая.

Из рис. 4 видно, что плазма экранирует перераспределение заряда из центра пластины на края.

Для устранения неоднородности при решении уравнения (1) в известном методе [4] предлагается при возникновении сингулярного возмущения переразбить выбранный дискрет, как это показано на рис. 5, и перейти к полярной системе координат для центральной окружности.

Из рисунка видно, что при данном решении часть площади дискретного элемента не учитывается. Для уменьшения погрешности можно провести дополнительную триангуляцию неучтенной области, но это приведет к увеличению машинного времени, необходимого для расчета, и не избавит от погрешности полностью. Относительная погрешность известного метода относительно предложенного составляет 6.21% для  $i$ -го элемента поверхности при первой итерации разбиения дискрета, показанного на рис. 5.

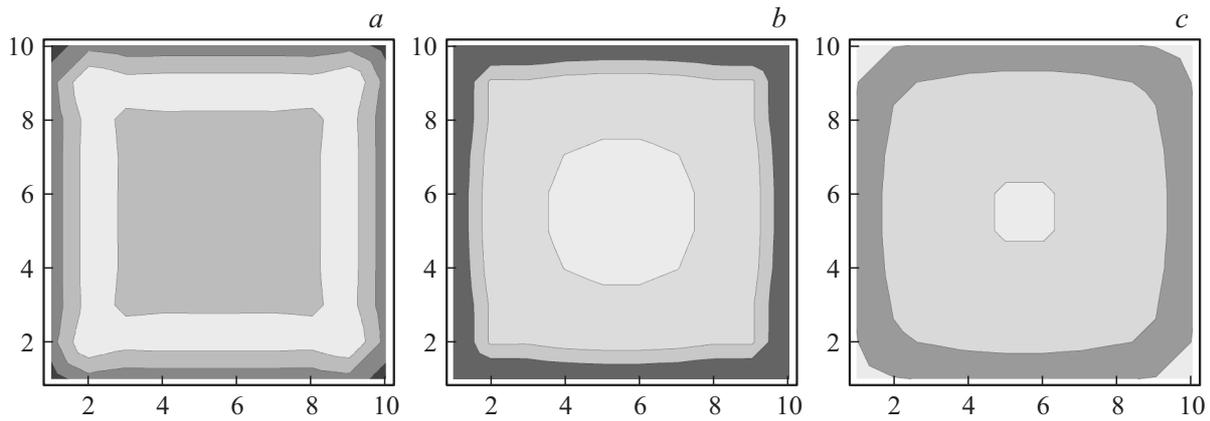
Результаты, полученные при моделировании предложенным методом, совпадают с результатами, полученными многокомпонентной датчиковой аппаратурой „МЕТЕОР“, установленной на малом космическом аппарате „АИСТ“ [9].

## Обсуждение результатов

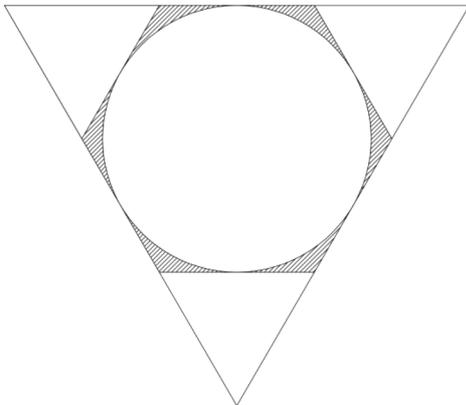
Преимуществом данной методики расчета потенциала элементов поверхности КА является широкий диапазон орбит функционирования, который включает в себя не только низкие, но и геостационарные, а также полярные орбиты.

Применение в предложенной методике триангуляции Делоне обусловлено рядом преимуществ, которые достигаются при аппроксимации поверхности:

- при построении триангуляционной модели используется простое локальное условие и для его проверки достаточно анализа пары смежных треугольников,
- несмотря на локальные условия, триангуляция Делоне является однозначной с точностью до множества точек, лежащих на одной окружности, внутри которой нет других точек,
- следствием условия Делоне является локальное условие максимума минимального угла, поэтому получаемые треугольники наиболее близки к равносторонним, что повышает точность последующей интерполяции поверхности.



**Рис. 4.** Изменение распределения заряда на поверхности пластины от величины радиуса Дебая для случаев: *a* — радиус Дебая много больше линейных размеров пластины, *b* — радиус Дебая соизмерим с линейными размерами пластины, *c* — радиус Дебая соизмерим с линейными размерами дискрета.



**Рис. 5.** Переразбиение дискрета моделируемого объекта.

Это позволяет обеспечить высокую точность построения модели КА любой сложности.

Предложенный аналитический метод нахождения потенциала поверхности КА для геостационарных орбит позволяет увеличить скорость и точность вычислений (так как дает возможность обойти сингулярность, возникающую при нахождении матрицы кулоновского взаимодействия).

Для низких орбит функционирования КА, где наблюдается высокая концентрация плазмы, предложено численное решение экранированного уравнения Пуассона, которое позволяет учесть влияние плазмы на потенциал поверхности КА. На численное решение накладывается ограничение линейных размеров дискрета аппроксимации: линейные размеры треугольника не должны превышать длины радиуса Дебая для выбранной орбиты функционирования КА. Это ограничение приводит к увеличению времени вычислений, например, для КА цилиндрической формы с радиусом 1.5 м и высотой 7 м, для орбиты функционирования 600 км радиус Дебая составляет 0.012 м, а число дискретов — порядка 1600000.

## Заключение

1. Триангуляция Делоне позволяет аппроксимировать поверхность с большей точностью.
2. Данная методика позволяет определить потенциал поверхности низкоорбитальных КА, функционирующих на полярной орбите с высотой до 2000 км.
3. Нет необходимости решать электростатическую задачу на каждом временном шаге полностью.
4. Полученные результаты интегрирования имеют 5% погрешность по сравнению с потенциалом, полученным из аналитического уравнения для сферы.
5. Учитывается влияние характеристик окружающей плазмы на собственную емкость аппарата путем введения в уравнение выражения для радиуса Дебая.
6. Получена зависимость потенциала поверхности КА от его емкости относительно окружающей плазмы.
7. Учет выражения для радиуса Дебая влияет на отношение плотности заряда в центре и по краям, причем заряд в центре плоского элемента больше, чем на его краях, вследствие чего распределение напряженности электрического поля носит такой же характер.
8. Возможно применение данной методики в широком диапазоне орбит функционирования КА.
9. Относительная погрешность известного метода по сравнению с предложенным составляет 6.21% для *i*-го элемента поверхности.

## Список литературы

- [1] Графодатский О.С., Исляев Ш.Н. Взаимодействие спутников связи с окружающей средой. Томск: МГП „РАСКО“, 1993. 208 с.
- [2] Семкин Н.Д., Балакин В.Л., Помельников Р.А., Брагин В.В. // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). 2012. № 2. С. 112–120.

- [3] Семкин Н.Д., Балакин В.Л., Помельников Р.А., Брагин В.В. // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). 2012. № 2. С. 120–126.
- [4] Новиков Л.С., Милеев В.Н., Маклецов А.А., Синолиц В.В. // Модель космоса. Т. 2. Воздействие космической среды на материалы и оборудование космических аппаратов. 2007. Т. 2. С. 276–314.
- [5] Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во томского ун-та. 2002. 128 с.
- [6] Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. 32 с.
- [7] Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат, 1981. 240 с.
- [8] Янпольский А.Р. Гиперболические функции. М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1960. 288 с.
- [9] Брагин В.В. // Матер. III Всероссийской научно-технической конф. „Актуальные проблемы ракетно-космической техники“ (III Козловские чтения). 2013. С. 305–307.