Теория отражения и поглощения света полупроводниковыми объектами пониженной размерности, помещенными в сильное магнитное поле, при монохроматическом и импульсном возбуждении

© И.Г. Ланг, С.Т. Павлов*,**, Л.И. Коровин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
* Facultad de Fisica de la UAZ,
Apartado Postal C-580, 8060 Zacatecas, Zac., Mexico
** Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук,
119991 Москва, Россия

(Поступила в Редакцию 15 января 2004 г.)

Разработаны основы теории отражения и поглощения света полупроводниковыми объектами пониженной размерности (квантовыми ямами, проволоками и точками) как при монохроматическом, так и при импульсном облучении при любой форме импульса. Полупроводниковый объект может быть помещен в сильное стационарное магнитное поле.

В качестве примера рассмотрен случай нормального падения света на поверхность квантовой ямы, ширина которой может быть сравнима с длиной световой волны, а число уровней электронных возбуждений — произвольным. Для Фурье-компонент электрических полей получено интегральное уравнение, напоминающее уравнение Дайсона. Приведены решения этого уравнения в ряде частных случаев.

1. Введение

В последние годы велик интерес к зависящим от времени эффектам оптического отклика полупроводниковых объектов [1–4]. Это связано с развитием техники коротких импульсов, что позволяет исследовать когерентные явления в процессах взаимодействия света с элементарными возбуждениями в различных системах.

Если объект облучается коротким импульсом, то возникает импульс вторичного излучения, форма которого существенно отличается от формы первичного импульса и несет информацию о возбужденных состояниях в объекте, например о времени жизни электронно-дырочных пар, о величине энергетического расщепления в магнетополяронах и т. д.

Вообще вторичное излучение от материальных объектов является мощным средством исследования внутренней структуры этих объектов. Как при монохроматическом, так и при импульсном облучении возникают два рода вторичного излучения. Например, при облучении полупроводниковых объектов пониженной размерности вторичное излучение первого рода обусловливает отражение света от этих объектов, которое может быть резонансным, если частота ω_l возбуждающего света совпадает с частотой ω_0 одного из дискретных уровней энергии электронной системы. В объемном полупроводнике вторичное излучение первого рода обусловливает отличие истинных электромагнитных полей от возбуждающих, т. е. отклонение величины диэлектрической проницаемости ε от единицы.

Второй род вторичного излучения — это рассеяние света, например рамановское, которое не может быть описано в терминах диэлектрической проницаемости.

Как возникает любое вторичное излучение от материальных объектов? Возбуждающий свет создает в системах заряженных частиц наведенные переменные электрические токи и заряды. Токи и колебания заряда обусловливают наведенные электромагнитные поля первого порядка, которые в свою очередь создают электрические токи и заряды и поля второго порядка и т. д. Суммируя поля всех порядков, начиная с первого, получаем точные значения наведенных электромагнитных полей (на самом деле будет решаться уравнение типа уравнения Дайсона).

Если усреднить плотности наведенных токов и зарядов (например, в случае равной нулю температуры — по основному состоянию системы зарядов), то получим вторичное излучение первого рода — без изменения частоты. Вторичное излучение второго рода обусловливается флуктуациями плотности наведенных токов и зарядов и может сопровождаться изменением частоты, как при рамановском рассеянии. В настоящей работе исследуются только вторичное излучение первого рода и поглощение света.

Современные полупроводниковые технологии позволяют изготавливать квантовые ямы высокого качества, когда радиационное уширение линии поглощения может быть сравнимо с вкладом нерадиационных механизмов релаксации или превысить их. В такой ситуации нельзя ограничиться низшим по взаимодействию электронов с электромагнитным полем проближением, а необходимо учитывать все порядки этого взаимодействия [5–13].

В настоящей работе излагаются основы теории вторичного излучения первого рода от полупроводниковых объектов пониженной размерности. Акцент сделан на ситуацию, когда объект помещен в сильное стационарное магнитное поле. Результаты применяются к случаю импульсного облучения с любой формой импульса.

Изложение построено следующим образом. В разд. 2 приведены выражения для средних значений плотностей тока и заряда, наведенных слабым электромагнитным полем в системе заряженных частиц, ограниченной в пространстве. Эти выражения применимы в случае любого стационарного потенциала, любого взаимодействия между частицами и любого по величине постоянного магнитного поля. Разделены вклады, содержащие электрические поля и производные от электрических полей по координатам. В дальнейшем последние вклады считаются малыми и не учитываются.

Далее в разд. 3–8 вычислена средняя плотность наведенного тока в полупроводниковых объектах пониженной размерности без учета кулоновского взаимодействия между электронами и дырками; в конце разд. 8 полученный результат обобщен с учетом экситонного эффекта.

В разд. 9 вводится понятие тензора электропроводности $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega|\mathbf{r})$, который зависит от пространственных координат в случае полупроводниковых объектов пониженной размерности в силу пространственной неоднородности. Получена общая формула для тензора $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega|\mathbf{r})$, применимая для любых объектов: квантовых ям, проволок и точек.

В разд. 10 вычислен тензор электропроводности для случая квантовых ям в нулевом и сильном магнитном поле. В разд. 11 вычислена средняя плотность наведенного тока в частном случае нормального падения света на поверхность квантовой ямы.

В разд. 12 описана модель, соответствующая двум вырожденным валентным зонам и упрощающая выражения для средней плотности наведенного тока. Показано, что этой модели соответствует нулевая плотность наведенного заряда.

В разд. 13 с использованием формулы для запаздывающего потенциала выражен векторный потенциал через интеграл, содержащий среднюю плотность наведенного тока. Зная векторный потенциал, вычислим наведенное электрическое поле. Поскольку плотность наведенного тока зависит от электрического поля, получим для последнего интегральное уравнение.

В разд. 14 интегральное уравнение преобразуется применительно к случаю бесконечно глубокой квантовой ямы.

В разд. 15–17 интегральное уравнение для электрического поля решается в ряде частных случаев. В разд. 15 рассмотрен случай многих уровней электронных возбуждений в узкой квантовой яме, ширина которой много меньше длины волны возбуждающего света. В разд. 16 уравнение решено для случая многих уровней в широкой квантовой яме в низшем порядке по взаимодействию электромагнитного поля с электронами. В разд. 17 точно определены электрические поля для случая одного уровня возбуждения в широкой квантовой яме.

Наконец, в разд. 18 показано, как связаны выражения для наведенных полей с формой возбуждающего импульса.

2. Точные формулы для средних значений наведенных плотностей тока и заряда

В [14] показано, что средние значения наведенных внешним слабым электромагнитным полем плотностей тока и заряда могут быть выражены через величины электрических полей и их производных по координатам следующим образом:

$$\langle 0|j_{1\alpha}(\mathbf{r},t)|0\rangle = \langle 0|j_{1\alpha}(\mathbf{r},t)|0\rangle_{\mathrm{I}} + \langle 0|j_{1\alpha}(\mathbf{r},t)|0\rangle_{\mathrm{II}}, \quad (1)$$

$$\langle 0|\rho_1(\mathbf{r},t)|0\rangle = \langle 0|\rho_1(\mathbf{r},t)|0\rangle_{\mathrm{I}} + \langle 0|\rho_1(\mathbf{r},t)|0\rangle_{\mathrm{II}}, \quad (2)$$

где индекс 1 означает линейное приближение по полям, индексы I и II — вклады, содержащие поля и их производные по координатам соответственно. Получены результаты

$$\langle 0|j_{1\alpha}(\mathbf{r},t)|0\rangle_{\mathrm{I}} = \frac{i}{\hbar}\int d\mathbf{r}' \times \int_{-\infty}^{t} dt' \langle 0|[j_\alpha(\mathbf{r},t), \bar{d}_\beta(\mathbf{r}',t')]|0\rangle E_\beta(\mathbf{r}',t'), \quad (3)$$

$$\langle 0|j_{1\alpha}(\mathbf{r},t)|0\rangle_{\mathrm{II}} = \frac{e}{mc}\langle 0|\bar{d}_\beta(\mathbf{r})|0\rangle \frac{\partial a_\beta(\mathbf{r},t)}{\partial r_\alpha} - \frac{i}{\hbar c}\int d\mathbf{r}' \times \int_{-\infty}^{t} dt' \langle 0|[j_\alpha(\mathbf{r},t)\bar{Y}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}',t')]|0\rangle \frac{\partial a_\beta(\mathbf{r}',t')}{\partial r'_\gamma}, \quad (4)$$

$$\langle 0|\rho_1(\mathbf{r},t)|0\rangle_{\mathrm{I}} = \frac{i}{\hbar}\int d\mathbf{r}' \times \int_{-\infty}^{t} dt' \langle 0|[\rho(\mathbf{r},t), \bar{d}_\beta(\mathbf{r}',t')]|0\rangle E_\beta(\mathbf{r}',t'), \quad (5)$$

$$\langle 0|\rho_1(\mathbf{r},t)|0\rangle_{\mathrm{II}} = -\frac{i}{\hbar c}\int d\mathbf{r}' \times \int_{-\infty}^{t} dt' \langle 0|[\rho(\mathbf{r},t), \bar{Y}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}',t')]|0\rangle \frac{\partial a_\beta(\mathbf{r}',t')}{\partial r'_\gamma}. \quad (6)$$

Использованы следующие обозначения: $\langle 0|\ldots|0\rangle$ — среднее значение по основному состоянию системы, $[\ldots]$ — коммутатор двух операторов, $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ и $\rho(\mathbf{r},t)$ — операторы плотностей тока и заряда в представлении взаимодействия

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \exp(i\mathscr{H}t/\hbar)\,\mathbf{j}(\mathbf{r})\exp(-i\mathscr{H}t/\hbar),$$

$$\rho(\mathbf{r},t) = \exp(i\mathscr{H}t/\hbar)\,\rho(\mathbf{r})\exp(-i\mathscr{H}t/\hbar),$$

где $\mathscr{H}$ — гамильтониан системы, определенный как

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\sum_i p_i^2 + V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N),$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{P}_i - (e/c)\,\mathbf{A}_c(\mathbf{r}_i), \quad \mathbf{P}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i}, \tag{7}$$

$\mathbf{A}_c(\mathbf{r})$ — векторный потенциал, соответствующий постоянному магнитному полю $\mathbf{H}_c = \operatorname{rot}\mathbf{A}_c(\mathbf{r})$, в которое может быть помещена система и которое может быть сильным, $V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ — потенциальная энергия, включающая взаимодействие между частицами и внешний потенциал. Гамильтониан (7) описывает систему из N частиц с зарядом e и массой m.

Операторы $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ определены как

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{j}_i(\mathbf{r}), \quad \rho(\mathbf{r}) = \sum_i \rho_i(\mathbf{r}), \quad \rho_i(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i),$$

$$\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) = (e/2)\big\{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)\big\}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i/m, \tag{8}$$

$\mathbf{r}_i$ — координата i-й частицы. Введены также обозначения

$$\overline{\mathbf{d}}(\mathbf{r}) = \sum_i \overline{\mathbf{r}}_i\rho_i(\mathbf{r}), \quad \overline{Y}_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) = \sum_i (j_{j\gamma}\overline{r}_{i\beta} + \overline{r}_{i\beta}j_{i\gamma})/2,$$

$$\overline{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \langle 0|\mathbf{r}_i|0\rangle, \tag{9}$$

а также

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = -c\int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\mathbf{E}(\mathbf{r}, t').$$

Поля считаем классическими, температуру – равной нулю. При выводе (1)–(6) предполагалось, что на бесконечно удаленных расстояниях отсутствуют заряды и токи, а также то, что на временах $t \to -\infty$ поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ равны нулю, что соответствует адиабатическому включению полей.

3. Представление вторичного квантования

В настоящей работе мы не учитываем вклады с индексом II, содержащие производные от величин электрических полей по координатам, считая, что эти вклады малы по сравнению с основными вкладами с индексом I. Обсуждение этого вопроса см. в [15].

Перейдем к представлению вторичного квантования, используя набор волновых функций частиц Ψ_m, удовлетворяющих условию ортогональности и нормировки

$$\int d\mathbf{r}\,\Psi^*_{m'}(\mathbf{r})\,\Psi_m(\mathbf{r}) = \delta_{mm'}.$$

Тогда операторы плотности тока и заряда, определенные в (8), соответственно имеют вид

$$j_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{e}{2m}\sum_{m,m'}\big\{\Psi^*_{m'}(\mathbf{r})p_\alpha\,\Psi_m(\mathbf{r}) - \Psi_m(\mathbf{r})p_\alpha\,\Psi^*_{m'}(\mathbf{r})\big\}a^+_{m'}a_m,$$

$$\rho(\mathbf{r}) = e\sum_{m,m'}\Psi^*_{m'}(\mathbf{r})\Psi_m(\mathbf{r})a^+_{m'}a_m.$$

Оператор $\overline{\mathbf{d}}(\mathbf{r})$, определенный в (9), в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\overline{d}_\alpha(\mathbf{r}) = e(r_\alpha - r_{0\alpha})\sum_{m,m'}\Psi^*_{m'}(\mathbf{r})\,\Psi_m(\mathbf{r})a^+_{m'}a_m, \tag{10}$$

где

$$r_{0\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{m_0}\int d\mathbf{r}\,\Psi^*_m(\mathbf{r})r_\alpha\,\Psi_m(\mathbf{r}),$$

m_0 — набор N состояний, занятых частицами в основном состоянии $|0\rangle$. Заметим, что величина $r_\alpha - r_{0\alpha}$, входящая в правую часть (10), инвариантна относительно сдвига начала координат, т.е. относительно замены $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r} + \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — любой вектор.

4. Рассмотрение полупроводниковых объектов

Рассмотрим полупроводниковую квантовую яму (КЯ) (проволоку или точку), в которой имеются валентные зоны и зона проводимости. Из группы индексов m выделим индексы v — валентных зон (их может быть несколько) и c — зоны проводимости. Переходами в более высокие зоны пренебрегаем. Прочие индексы обозначим ξ.

Вычислим среднюю наведенную плотность тока, используя исходное выражение (3). В правую часть (3) входят только недиагональные матричные элементы операторов $j_\alpha(\mathbf{r})$ и $\overline{d}_\beta(\mathbf{r})$, поскольку операторы стоят под знаком коммутатора. Поэтому в правую часть (3) следует подставить

$$j^{\mathrm{nd}}_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{e}{2m}\sum_{v,\xi,\xi'}\big\{\Psi^*_{c\xi'}(\mathbf{r})p_\alpha\,\Psi_{v\xi}(\mathbf{r}) - \Psi_{v\xi}(\mathbf{r})p_\alpha\Psi^*_{c\xi'}(\mathbf{r})\big\}a^+_{c\xi'}a_{v\xi} + \text{h.c.},$$

$$\overline{d}^{\mathrm{nd}}_\alpha(\mathbf{r}) = e\sum_{v,\xi,\xi'}\Psi^*_{c\xi'}(\mathbf{r})(r_\alpha - r_{0\alpha})\,\Psi_{v\xi}(\mathbf{r})a^+_{c\xi'}a_{v\xi} + \text{h.c.} \tag{11}$$

В (11) и далее рассматриваются электроны, поэтому $e = -|e|$, масса $m = m_0$, где m_0 — масса свободного электрона. Верхний индекс nd означает часть оператора, имеющую только недиагональные матричные элементы.

5. Приближение эффективной массы

Будем считать, что размеры объекта — ширина d КЯ или размеры проволоки или точки — много больше постоянной решетки a, а также, что расстояния, на которых меняется медленно меняющийся множитель в волновой функции, много больше a. Тогда применимо приближение эффективной массы, согласно которому

$$\Psi_{\mu\xi}(\mathbf{r}) = u_{0\mu}(\mathbf{r})\,\psi_{\mu\xi}(\mathbf{r}), \tag{12}$$

где $u_{0\mu}(\mathbf{r})$ — быстро меняющийся безразмерный множитель, $\psi_{\mu\xi}(\mathbf{r})$ — медленно меняющийся множитель, $\mu = c$ или $\mu = v$.

В (11) пренебрежем действием операторов P_α на медленно меняющиеся множители в волновых функциях (12). Тогда приближенно имеем

$$j_\alpha^{\mathrm{nd}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{e}{2m_0}\sum_v \{u_{0c}^*(\mathbf{r})p_\alpha u_{0v}(\mathbf{r}) - u_{0v}(\mathbf{r})p_\alpha u_{0c}^*(\mathbf{r})\} \times \sum_{\xi,\xi'} \psi_{c\xi'}^*(\mathbf{r})\,\psi_{v\xi}(\mathbf{r}) a_{c\xi'}^+ a_{v\xi} + \text{h.c.}, \tag{13}$$

$$\bar{d}_\alpha^{\mathrm{nd}}(\mathbf{r}) \simeq e\sum_v u_{0c}^*(\mathbf{r})\,u_{0v}(\mathbf{r})(r_\alpha - r_{0\alpha}) \times \sum_{\xi,\xi'} \psi_{c\xi'}^*(\mathbf{r})\,\psi_{v\xi}(\mathbf{r}) a_{c\xi'}^+ a_{v\xi} + \text{h.c.} \tag{14}$$

Избавимся от быстро меняющихся множителей в правых частях (13) и (14). Для этого введем Фурье-компоненты

$$j_\alpha(\boldsymbol{\kappa}) = \int d\mathbf{r}\, j_\alpha(\mathbf{r}) \exp(-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}),$$

$$\bar{d}_\alpha(\boldsymbol{\kappa}) = \int d\mathbf{r}\, \bar{d}_\alpha(\mathbf{r}) \exp(-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}).$$

Если $\kappa a \ll 1$, то приближенно получаем

$$\mathbf{j}^{\mathrm{nd}}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{e}{m_0}\sum_v \mathbf{p}_{cv} \times \sum_{\xi,\xi'} \left\{\int d\mathbf{r}\, \psi_{c\xi'}^*(\mathbf{r})\,\psi_{v\xi}(\mathbf{r}) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}\right\} a_{c\xi'}^+ a_{v\xi} + \text{h.c.},$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\mathrm{nd}}(\boldsymbol{\kappa}) = \sum_v \mathbf{d}_{cv} \times \sum_{\xi,\xi'} \left\{\int d\mathbf{r}\, \psi_{c\xi'}^*(\mathbf{r})\,\psi_{v\xi}(\mathbf{r}) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}\right\} a_{c\xi'}^+ a_{v\xi} + \text{h.c.},$$

где

$$\mathbf{p}_{cv} = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega d\mathbf{r}\, u_{0c}^*(\mathbf{r})\,\mathbf{P}\,u_{0v}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{d}_{cv} = \frac{e}{\Omega}\int_\Omega d\mathbf{r}\, u_{0c}^*(\mathbf{r})\,\mathbf{r}\,u_{0v}(\mathbf{r}), \tag{15}$$

Ω — объем элементарной ячейки кристалла, по которой производится интегрирование.

В первом из равенств (15) мы заменили оператор $\mathbf{p}$ (см. (7)) на $\mathbf{P}$. Если система помещена в сильное магнитное поле $\mathbf{H}_c = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_c(\mathbf{r})$ и в операторе $\mathbf{p}$ присутствует слагаемое $-(e/c)\mathbf{A}_c(\mathbf{r})$, то оно вносит малый вклад в величину $\mathbf{p}_{cv}$ и может быть отброшено в приближении эффективной массы.

Предполагая, что в будущем нас будут интересовать только длинноволновые компоненты $\mathbf{j}^{\mathrm{nd}}(\mathbf{r})$ и $\bar{\mathbf{d}}^{\mathrm{nd}}(\mathbf{r})$, переходим обратно от $\boldsymbol{\kappa}$-представления к $\mathbf{r}$-представлению и получаем

$$\mathbf{j}^{\mathrm{nd}}(\mathbf{r}) = \frac{e}{m_0}\sum_v \mathbf{p}_{cv}\sum_{\xi,\xi'} \psi_{c\xi'}^*(\mathbf{r})\,\psi_{v\xi}(\mathbf{r}) a_{c\xi'}^+ a_{v\xi} + \text{h.c.}, \tag{16}$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\mathrm{nd}}(\mathbf{r}) = \sum_v \mathbf{d}_{cv}\sum_{\xi,\xi'} \psi_{c\xi'}^*(\mathbf{r})\,\psi_{v\xi}(\mathbf{r}) a_{c\xi'}^+ a_{v\xi} + \text{h.c.} \tag{17}$$

6. Волновые функции электронов в КЯ

Рассмотрим два конкретных примера волновых функций электрона в приближении эффективной массы в КЯ. В случае свободных электронов

$$\psi_{\mathbf{k}_\perp, l}(\mathbf{r}) = S_0^{-1/2} \exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp)\,\varphi_l(z),$$

где S_0 — нормировочная площадь, ось z направлена перпендикулярно плоскости ямы, вещественная функция $\varphi_l(z)$ соответствует уровням $l = 1, 2\ldots$ размерного квантования электрона. Для случая КЯ конечной глубины функции $\varphi_l(z)$ и соответствующие им энергетические уровни определены, например, в [16].

Второй пример — случай электронов в КЯ, помещенной в сильное магнитное поле $\mathbf{H}_c$, перпендикулярное поверхности КЯ. Ось z направлена вдоль магнитного поля. Выберем следующую калибровку векторного потенциала:

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_c(0, xH_c, 0).$$

Тогда волновые функции электрона имеют вид

$$\varphi_{nk_y l}(\mathbf{r}) = \Phi_n(x + a_H^2 k_y) \exp(ik_y y)\,\varphi_l(z)/\sqrt{L_y},$$

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!\, a_H}} H_n(x/a_H) \exp(-x^2/2a_H^2),$$

$a_H = \sqrt{c\hbar/|e|H_c}$, $H_n(t)$ — полиномы Эрмита, L_y — номировочная длина.

7. Понятие дырки в валентной зоне

Будем считать, что компоненты квазиимпульса дырки $\mathbf{k}_{h\perp} = -\mathbf{k}_\perp$ и $k_{hy} = -k_y$ (в сильном магнитном поле H_c), а оператор $a_{v\xi}$ уничтожения электрона в валентной зоне равен оператору рождения дырки. Введем набор индексов η, описывающих квантовые числа электронно-дырочной пары (ЭДП) и оператор $a_\eta^+(a_\eta)$ рождения (уничтожения) ЭДП. Тогда из (16) и (17) получаем

$$\mathbf{j}^{\mathrm{nd}}(\mathbf{r}) = (e/m_0)\sum_\eta \{\mathbf{p}_{cv} F_\eta^*(\mathbf{r}) a_\eta^+ + \mathbf{p}_{cv}^* F_\eta(\mathbf{r}) a_\eta\}, \tag{18}$$

$$\bar{\mathbf{d}}^{\mathrm{nd}}(\mathbf{r}) = \sum_\eta \{\mathbf{d}_{cv} F_\eta^*(\mathbf{r}) a_\eta^+ + \mathbf{d}_{cv}^* F_\eta(\mathbf{r}) a_\eta\}, \tag{19}$$

где $F_\eta(\mathbf{r})$ — волновая функция ЭДП при $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_h = \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_e(\mathbf{r}_h)$ — радиус-вектор электрона (дырки).

В случае свободных ЭДП в КЯ

$$F_\eta(\mathbf{r}) = \exp\left[i(\mathbf{k}_{e\perp} + \mathbf{k}_{v\perp})\mathbf{r}_\perp\right] \varphi_{l_e}^e(z)\,\varphi_{l_v}^v(z)/S_0, \tag{20}$$

где набор η включает индексы v, $\mathbf{k}_{e\perp}$, $\mathbf{k}_{v\perp}$, l_e, l_v. Энергия ЭДП, отсчитываемая от энергии основного состояния, равна

$$E_\eta = \hbar\omega_\eta = \hbar\omega_g + \varepsilon_{l_e}^e + \varepsilon_{l_v}^v + \frac{\hbar^2 k_{e\perp}^2}{2m_e} + \frac{\hbar^2 k_{v\perp}^2}{2m_v}, \tag{21}$$

где $\hbar\omega_g$ — ширина запрещенной зоны, $m_e(m_v)$ — эффективная масса электрона (дырки).

В случае пар в КЯ, помещенной в сильное магнитное поле (СМП), имеем

$$F_\eta(\mathbf{r}) = \Phi_{n_e}(x + a_H^2 k_{ey})\Phi_{n_v}(x - a_H^2 k_{vy}) \times \exp\bigl(i(k_{ey} + k_{vy})y\bigr)\,\varphi_{l_e}^e(z)\,\varphi_{l_v}^v(z)/L_y, \qquad (22)$$

набор η включает индексы $v, n_e, n_v, k_{ey}, k_{vy}, l_e, l_v$. Соответствующая энергия равна

$$E_\eta = \hbar\omega_g + \varepsilon_{l_e}^e + \varepsilon_{l_v}^v + \hbar\Omega_{eH}(n_e + 1/2) + \hbar\Omega_{vH}(n_v + 1/2), \qquad (23)$$

$\Omega_{e(v)H} = |e|\,H_c/(m_{e(v)}c)$ — циклотронная частота электрона (дырки). Можно показать, что формулы (18) и (19) применимы и в тех случаях, когда существенно кулоновское взаимодействие между электронами и дырками. Например, при $H_c = 0$ экситонным состояниям соответствуют дискретные уровни энергии в КЯ. Тогда $F_\eta(\mathbf{r})$ есть волновая функция экситона при $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_h = \mathbf{r}$, а η — набор индексов, характеризующих экситон. В присутствии СМП кулоновские силы могут изменить положение энергетических уровней и повлиять на вид функции $F_\eta(\mathbf{r})$.

8. Средние значения наведенной плотности тока в полупроводниковых объектах

Связь между матричными элементами $\mathbf{p}_{cv}$ и $\mathbf{d}_{cv}$, определенными в (15), легко найти, если использовать соотношение $v_\alpha = (i/\hbar)[\mathscr{H}, r_\alpha]$, из которого следует

$$\mathbf{d}_{cv} = -\bigl(ie/(m_0\omega_g)\bigr)\mathbf{p}_{cv}. \qquad (24)$$

Подставляя (24) в (19) и затем (18) и (19) в (3), получаем

$$\langle 0\,|\,j_{1\alpha}(\mathbf{r}, t)\,|\,0\rangle = \frac{e^2}{\hbar\omega_g m_0^2}\int d\mathbf{r}'\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\Theta(t - t') \times \sum_{\eta,\eta'}\Bigl\{p_{cv'\alpha}^* p_{cv\beta} F_{\eta'}(\mathbf{r})F_\eta^*(\mathbf{r}')\langle 0\,|a_{\eta'}(t)a_\eta^+(t')|\,0\rangle + p_{cv'\alpha}p_{cv\beta}^* F_{\eta'}^*(\mathbf{r})F_\eta(\mathbf{r}')\langle 0\,|a_\eta(t')a_{\eta'}^+(t)|\,0\rangle\Bigr\}E_\beta(\mathbf{r}', t'), \qquad (25)$$

где $\Theta(\tau) = 1$ при $\tau > 0$ и $\Theta(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Усреднение по основному состоянию дает результат [17], (7.35)

$$\langle 0\,|a_{\eta'}(t)a_\eta^+(t')|\,0\rangle = \delta_{\eta,\eta'}\exp\bigl[i\omega_\eta(t' - t) - (\gamma_\eta/2)|t - t'|\bigr], \qquad (26)$$

где γ_η — обратное нерадиационное время жизни состояния с набором индексов η.

Подставив (26) в (25) и совершив замену переменной $t' \to t + t'$, получаем

$$\langle 0\,|\,j_{1\alpha}(\mathbf{r}, t)\,|\,0\rangle = \frac{e^2}{\hbar\omega_g m_0^2}\sum_\eta\Bigl\{p_{cv\alpha}^* p_{cv\beta}F_\eta(\mathbf{r}) \times \int d\mathbf{r}'F_\eta^*(\mathbf{r}')\int\limits_{-\infty}^{0} dt' e^{i\omega_\eta t' + (\gamma_\eta/2)t'} + p_{cv\alpha}p_{cv\beta}^*F_\eta^*(\mathbf{r}) \times \int d\mathbf{r}'F_\eta(\mathbf{r}')\int\limits_{-\infty}^{0} dt' e^{-i\omega_\eta t' + (\gamma_\eta/2)t'}\Bigr\}E_\beta(\mathbf{r}', t + t'). \qquad (27)$$

Результат (27) применим в широкой области, например в случае экситонных состояний при нулевом магнитном поле и в СМП, т.е. при учете кулоновского взаимодействия электронов и дырок в тех случаях, когда оно существенно. Разумеется, вид функций $F_\eta(\mathbf{r})$ при учете кулоновских сил будет отличаться от (20) и (22). Кроме того, формула (27) применима в случае других полупроводниковых объектов пониженной размерности, например квантовых проволок или точек.

9. Тензор электропроводности

Выражение (27) запишем в виде

$$\langle 0\,|\,j_{1\alpha}(\mathbf{r}, t)\,|\,0\rangle = \int d\mathbf{r}' \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}', t'\,|\,\mathbf{r}, t)\,E_\beta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \qquad (28)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}', t'\,|\,\mathbf{r}, t)$ — тензор электропроводности. Из (27) следует

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}', t'\,|\,\mathbf{r}, t) = \frac{e^2}{\hbar\omega_g m_0^2}\,\Theta(t') \times \sum_\eta\bigl\{p_{cv\alpha}^* p_{cv\beta}F_\eta(\mathbf{r}) + F_\eta^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,e^{-i\omega_\eta t' - (\gamma_\eta/2)t'} + \text{c.c.}\bigr\}. \qquad (29)$$

Из (29) следует, что тензор $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}', t'\,|\,\mathbf{r}, t)$ не зависит от времени t, если потенциальная энергия $V(\mathbf{r}_1\ldots\mathbf{r}_N)$ из (7) не зависит от t, что мы подразумеваем. Это является следствием однородности времени. Поэтому далее используем обозначение

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}', t'\,|\,\mathbf{r}) = \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}', t'\,|\,\mathbf{r}, t).$$

Совершим преобразование Фурье. Запишем электрическое поле в виде

$$E_\alpha(\mathbf{r}, t) = E_\alpha^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E_\alpha^{(-)}(\mathbf{r}, t), \qquad (30)$$

где

$$E_\alpha^{(+)}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}\int_0^\infty d\omega\, E_\alpha(\mathbf{k},\omega)\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \quad (31)$$

$$E_\alpha^{(-)}(\mathbf{r},t)=\left(E_\alpha^{(+)}(\mathbf{r},t)\right)^*, \quad (32)$$

$$E_\alpha(\mathbf{k},\omega)=\int d\mathbf{r}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, E_\alpha(\mathbf{r},t)\, e^{i(-\mathbf{kr}+\omega t)}.$$

Разбиение (30) обычно производится, чтобы не использовать отрицательные значения частот ω.

Введем Фурье-образ $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}',t'|\,\mathbf{r})$ по переменным $\mathbf{r}', t'$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r})=\int d\mathbf{r}'\int_{-\infty}^{\infty} dt'\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}',t'|\,\mathbf{r})\, e^{i(-\mathbf{kr}'+\omega t')}. \quad (33)$$

Тогда с помощью (28), (31) и (32) получаем

$$\langle 0\,|\,j_{1\alpha}(\mathbf{r},t)|\,0\rangle=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d\mathbf{k}$$

$$\times\int_0^\infty d\omega\,\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r})E_\beta(\mathbf{k},\omega)\, e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}+\text{c.c.} \quad (34)$$

В случае пространственно-однородных систем, например объемных полупроводниковых кристаллов,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r})=\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega).$$

Из (29), совершив преобразования (33) и выполнив интегрирование по t', получаем

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r})=\frac{ie^2}{\hbar\omega_g m_0^2}$$

$$\times\sum_\eta\left\{p^*_{cv\alpha}\,p_{cv\beta}\,F_\eta(\mathbf{r})\,\frac{\int d\mathbf{r}'e^{-i\mathbf{kr}'}F^*_\eta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right.$$

$$\left.+\,p_{cv\alpha}\,p^*_{cv\beta}\,F^*_\eta(\mathbf{r})\,\frac{\int d\mathbf{r}'e^{-i\mathbf{kr}'}F_\eta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right\}. \quad (35)$$

Заметим, что тензор электропроводности обладает свойством

$$\sigma^*_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r})=\sigma_{\alpha\beta}(-\mathbf{k},-\omega\,|\,\mathbf{r}).$$

Подчеркнем, что выражения (34) и (36) в принципе позволяют вычислить среднюю наведенную плотность тока как при монохроматическом, так и при импульсном световом облучении и при любом направлении падающего света, например не только при нормальном, но и при косом падении света на плоскую КЯ.

10. Тензор электропроводности в случае КЯ

Из (20) и (22) следует, что для случаев свободных ЭДП в нулевом или сильном магнитном поле функцию $F_\eta(\mathbf{r})$ можно представить в виде произведения

$$F_\eta(\mathbf{r})=Q_\pi(\mathbf{r}_\perp)\,\phi_\chi(z), \quad (36)$$

где π — набор индексов $v, \mathbf{k}_{e\perp}, \mathbf{k}_{v\perp}$ в случае $H_c=0$ и $v, n_e, n_v, k_{cy}, k_{vy}$ в СМП, χ — набор индексов v, l_e, l_v,

$$\phi_\chi(z)=\varphi^e_{l_e}(z)\,\varphi^v_{l_v}(z). \quad (37)$$

Разбиение (36) применимо и в тех случаях, когда кулоновское взаимодействие электрона и дырки может существенно влиять только на движение частиц вдоль оси z. Это происходит при условии [18] $a^2_{\text{exc}}\gg a^2_H$, где $a_{\text{exc}}=\hbar^2\varepsilon_0/(\mu e^2)$ — радиус экситона Ванье–Мотта в отсутствие магнитного поля, ε_0 — статическая диэлектрическая проницаемость, $\mu=m_em_v/(m_e+m_v)$ — эффективная масса, т.е. в случае достаточно сильных магнитных полей. При $a_{\text{exc}}\gg d$, т.е. для достаточно узких ям, кулоновские силы слабо влияют на движение вдоль оси z, и функции $\phi_\chi(z)$ имеют вид (37). В противоположном случае $a_{\text{exc}}\ll d$ формула (37) неприменима. Для GaAs получаем $a_{\text{exc}}=146\,\text{Å}$, $a^{\text{res}}_H=57.2\,\text{Å}$, где a^{res}_H соответствует магнитному полю H_{res}, при котором имеет место магнетофононный резонанс $\Omega_{eH}=\omega_{LO}$. Используя (36), из (35) получаем

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r})=\frac{ie^2}{\hbar\omega_g m_0^2}\,e^{-i\mathbf{kr}}\sum_\eta\phi_\chi(z)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}dz'\phi_\chi(z')\exp(ik_zz')\left\{p^*_{cv\alpha}p_{cv\beta}Q_\pi(\mathbf{r}_\perp)\right.$$

$$\times\int d\mathbf{r}'_\perp Q^*_\pi(\mathbf{r}'_\perp)\frac{\exp(i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}'_\perp)}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}+p_{cv\alpha}p^*_{cv\beta}Q^*_\pi(\mathbf{r}_\perp)$$

$$\left.\times\int d\mathbf{r}'_\perp Q_\pi(\mathbf{r}'_\perp)\,\frac{\exp(i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}'_\perp)}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right\}. \quad (38)$$

Для случая свободных пар при $H_c=0$

$$Q_\pi(\mathbf{r}_\perp)=S_0^{-1}\exp\left[i(\mathbf{k}_{e\perp}+\mathbf{k}_{v\perp})\mathbf{r}_\perp\right].$$

Подставив это выражение в (38) и выполнив интегрирование по $\mathbf{r}'_\perp$, получаем

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r})=\frac{ie^2}{\hbar\omega_g m_0^2S_0}\exp(-ik_zz)$$

$$\times\sum_\eta\phi_\chi(z)R^*_\chi(k_z)\left\{\frac{p^*_{cv\alpha}p_{cv\beta}\delta_{\mathbf{K}_\perp,\mathbf{k}_\perp}}{\omega-\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}+\frac{p_{cv\alpha}p^*_{cv\beta}\delta_{\mathbf{K}_\perp,-\mathbf{k}_\perp}}{\omega+\omega_\eta+i\gamma_\eta/2}\right\}, \quad (39)$$

где $\mathbf{K}_\perp = \mathbf{k}_{e\perp} + \mathbf{k}_{v\perp}$,

$$R_\chi(k_z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-ik_z z)\,\phi_\chi(z),$$

энергия $\hbar\omega_\eta$ определена в (21). Для случая ЭДП в СМП

$$Q_\pi(\mathbf{r}_\perp) = \Phi_{ne}(x + a_H^2 k_{ey})\,\Phi_{nv}(x - a_H^2 k_{vy}) \times \exp\big[i(k_{ey} + k_{vy})y\big]/L_y. \qquad (40)$$

Подставим (40) в (38) и выполним интегрирование по переменной y' и суммирование по индексам k_{ey} и k_{vy}, от которых не зависят величины энергий $\hbar\omega_\eta$, определенные в (23). Получаем

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r}) = \frac{ie^2}{2\pi\hbar\omega_g m_0^2 a_H^2} \exp(-ik_z z) \sum_\xi \phi_\chi(z) R_\chi^*(k_z)$$
$$\times \left\{ \frac{p_{cv\alpha}^* p_{cv\beta} \Xi_{n_c,n_v}(k_x,k_y)}{\omega - \omega_\xi + i\gamma_\xi/2} + \frac{p_{cv\alpha} p_{cv\beta}^* \Xi_{n_c,n_v}(-k_x,-k_y)}{\omega + \omega_\xi + i\gamma_\xi/2} \right\},$$

$$\Xi_{n_e,n_v}(k_x,k_y) = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \Phi_{n_e}(t)\Phi_{n_v}(t - a_H^2 k_y) e^{ik_x t} \right|^2, \qquad (41)$$

ξ — набор индексов χ, n_e, n_v, энергия $\hbar\omega_\xi = \hbar\omega_\eta$.

Обратим внимание на то, что величины $\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r})$ в случае КЯ (при $H_c = 0$ или $\mathbf{H}_c$ вдоль оси z) зависят только от z, что следует из (39) и (41). Это обусловлено тем, что система неоднородна только вдоль оси z, перпендикулярной плоскости КЯ. Таким образом,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,\mathbf{r}) = \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega\,|\,z).$$

Выражение (34) с подстановкой в него (39) или (41) применимо в случае падения света на КЯ под любым углом к оси z как для монохороматического, так и импульсного облучения.

11. Нормальное падение света на поверхность КЯ

В случае нормального падения электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ зависит только от переменных z и t. Введем Фурье-компоненту поля по переменной t

$$E_\beta(z,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} E_\beta(z,t). \qquad (42)$$

С помощью (34) и (39) можно показать, что среднее значение наведенной плотности тока при $H_c = 0$ равно

$$\langle 0\,|\,j_{1\alpha}(\mathbf{r},t)|\,0\rangle = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{e}{m_0}\right)^2 \frac{1}{\hbar\omega_g S_0}$$
$$\times \sum_\chi \phi_\chi(z) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz' \phi_\chi(z') E_\beta(z',\omega)$$
$$\times \Big\{ p_{cv\alpha}^* p_{cv\beta} \sum_{\mathbf{k}_\perp} (\omega - \omega_\kappa + i\gamma_\kappa/2)^{-1}$$
$$+ p_{cv\alpha} p_{cv\beta}^* \sum_{\mathbf{k}_\perp} (\omega + \omega_\kappa + i\gamma_\kappa/2)^{-1} \Big\}, \qquad (43)$$

где κ — набор индексов χ, $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_{e\perp} = -\mathbf{k}_{v\perp}$,

$$\omega_\kappa = \omega_g + \varepsilon_{l_e}^e/\hbar + \varepsilon_{l_v}^v/\hbar + \hbar k_\perp^2/2\mu.$$

В (43) мы перешли от интегрирования по ω в пределах от 0 до ∞ к интегрированию в пределах от $-\infty$ до ∞, что удобнее для конкретных вычислений, поскольку контур интегрирования по ω можно замыкать в верхнюю или нижнюю полуплоскость.

В случае СМП с помощью (34) и (41) получаем

$$\langle 0|j_{1\alpha}(\mathbf{r},t)|0\rangle = \frac{i}{(2\pi)^2}\left(\frac{e}{m_0}\right)^2 \frac{1}{\hbar\omega_g a_H^2}$$
$$\times \sum_\chi \phi_\chi(z) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz' \phi_\chi(z') E_\beta(z',\omega)$$
$$\times \Big\{ p_{cv\alpha}^* p_{cv\beta} \sum_n (\omega - \omega_\lambda + i\gamma_\lambda/2)^{-1}$$
$$+ p_{cv\alpha} p_{cv\beta}^* \sum_n (\omega + \omega_\lambda + i\gamma_\lambda/2)^{-1} \Big\}, \qquad (44)$$

где

$$\omega_\lambda = \omega_g + \varepsilon_{l_e}^e/\hbar + \varepsilon_{l_v}^v/\hbar + \Omega_{\mu H}(n + 1/2),$$
$$\Omega_{\mu H} = |e|\,H_c/(\mu c).$$

При выводе (44) было использовано соотношение

$$\Xi_{n_e,n_v}(k_x = 0, k_y = 0) = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, \Phi_{n_e}(t)\Phi_{n_v}(t) \right|^2 = \delta_{n_e,n_v},$$

которое соответствует следующему правилу отбора: при нормальном падении света возбуждаются ЭДП с одинаковыми квантовыми числами Ландау у электронов и дырок.

В случае $H_c = 0$ при нормальном падении света возбуждаются пары с нулевым квазиимпульсом в плоскости КЯ, поэтому $\mathbf{k}_{e\perp} = -\mathbf{k}_{h\perp}$, что следует из закона сохранения квазиимпульса в плоскости xy.

Заметим, что выражение (44) для случая СМП отличается от (43) для случая $H_c = 0$ только заменой нормировочной площади S_0 на $2\pi a_H^2$ и индекса $\mathbf{k}_\perp$ на индекс n.

12. Модель, упрощающая выражения для средних плотностей тока

Далее используется модель, которая была применена в [19–27]. Векторы $\mathbf{p}_{cv}$ для двух вырожденных валентных зон I и II имеют вид

$$\mathbf{p}_{cv\mathrm{I}} = \frac{p_{cv}}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y),$$

$$\mathbf{p}_{cv\mathrm{II}} = \frac{p_{cv}}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \qquad (45)$$

где $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ — орты вдоль осей x и y, p_{cv} — вещественная величина. Эта модель соответствует тяжелым дыркам в полупроводнике со структурой цинковой обманки, если ось направлена вдоль оси симметрии четвертого порядка [28,29]. Если использовать векторы круговой поляризации возбуждающего света

$$\mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y),$$

то выполняется свойство сохранения вектора поляризации

$$\sum_{v=\mathrm{I,II}} \mathbf{p}^*_{cv}(\mathbf{e}_l\,\mathbf{p}_{cv}) = \sum_{v=\mathrm{I,II}} \mathbf{p}_{cv}(\mathbf{e}_l\,\mathbf{p}^*_{cv}) = \mathbf{e}_l\,p^2_{cv}.$$

При этом ни волновые функции $\varphi^v_{l_v}$, ни энергетические уровни $\varepsilon^v_{l_v}$ не зависят от номеров валентных зон I и II.

Используя модель (45) и результаты (43) и (44), выражение для средней наведенной плотности тока при $H_c = 0$ и в СМП запишем единым образом:

$$\langle 0|j_{1\alpha}(\mathbf{r},t)|0\rangle = \frac{ic\nu}{8\pi^2}\sum_\rho \gamma_{r\rho}\,\phi_\rho(z)$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dz'\phi_\rho(z')\,E_\alpha(z',\omega)$$
$$\times \left\{(\omega - \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} + (\omega + \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1}\right\}, \qquad (46)$$

где ν — коэффициент преломления света, причем для случая $H_c = 0$

$$\gamma_{r\rho} = \gamma_r = 4\pi\,\frac{e^2}{\hbar c\nu}\,\frac{p^2_{cv}}{m_0^2}\,\frac{1}{S_0\omega_g}, \qquad (47)$$

ρ — набор индексов $l_e, l_h, \mathbf{k}_\perp$, где l_h — квантовое число размерного квантования в валентных зонах I и II, а для случая СМП

$$\gamma_{r\rho} = \gamma_r = 2\,\frac{e^2}{\hbar c\nu}\,\frac{p^2_{cv}}{m_0^2}\,\frac{1}{a_H^2\omega_g} = 2\,\frac{e^2}{\hbar c\nu}\,\frac{p^2_{cv}}{m_0}\,\frac{\Omega_{0H}}{\hbar\omega_g}, \qquad (48)$$

$\Omega_{0H} = |e|H_c/m_0c$, ρ — набор индексов l_e, l_h, n. В правой части (46) величина γ_r снабжена индексом ρ, хотя правые части (47) и (48) от этого индекса не зависят. Это сделано для того, чтобы выражение (46) было применимо и к другим ситуациям, например к случаю магнетополяронного резонанса в СМП. Физический смысл величин $\gamma_{r\rho}$ будет раскрыт далее.

Заметим, что в случае модели (45) выполняется важное свойство, а именно

$$\mathrm{div}\langle 0|\mathbf{j}_1(\mathbf{r},t)|0\rangle = 0,$$

поэтому средняя наведенная плотность заряда равна нулю, что следует из уравнения непрерывности.

13. Вычисление векторного потенциала и электрического поля

Зная распределение средней плотности тока внутри КЯ, можно определить векторный потенциал согласно известной формуле для запаздывающих потенциалов (см., например, [30])

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d\mathbf{r}'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \nu|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \mathbf{A}_0(\mathbf{r},t). \qquad (49)$$

Из (46) следует, что зависимость плотности тока от координат определяется только множителем $\phi_\rho(z)$ под знаком суммы по ρ.

Интеграл

$$I_\rho(\omega,z) = \int d\mathbf{r}'\,\frac{\phi_\rho(z')\exp(i\omega\nu)|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

равен

$$I_\rho(\omega,z) = \frac{2\pi i c}{\omega\nu}$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{z} dz'\phi_\rho(z')\,e^{i\kappa(z-z')} + \int_{z}^{\infty} dz'\phi_\rho(z')\,e^{-i\kappa(z-z')}\right\}, \qquad (50)$$

где $\kappa = \omega\nu/c$. Используя (46), (49) и (50), получим, что векторный потенциал равен

$$A_\alpha(z,t) = A_{0\alpha}(z,t) - \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}\,e^{-i\omega t}$$
$$\times\sum_\rho \gamma_{r\rho}\int_{-\infty}^{\infty} dz'\phi_\rho(z')E_\alpha(z',\omega)$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{z} dz'\phi_\rho(z')\,e^{i\kappa(z-z')} + \int_{z}^{\infty} dz'\phi_\rho(z')\,e^{-i\kappa(z-z')}\right\}$$
$$\times\left\{(\omega-\omega_\rho+i\gamma_\rho/2)^{-1} + (\omega+\omega_\rho+i\gamma_\rho/2)^{-1}\right\}.$$

Поскольку, как указано выше, средняя плотность заряда в случае использования модели (45) равна нулю, равен нулю и скалярный потенциал φ, поэтому

$$\mathbf{E}(z,t) = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}(z,t)}{\partial t}.$$

Соответственно получаем

$$E_\alpha(z,t)=E_{0\alpha}(z,t)-\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{-i\omega t}$$

$$\times\sum_\rho \gamma_{r\rho}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz'\phi_\rho(z')E_\alpha(z',\omega)$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty}^{z}dz'\phi_\rho(z')e^{i\kappa(z-z')}+\int\limits_{z}^{\infty}dz'\phi_\rho(z')e^{-i\kappa(z-z')}\right\}$$

$$\times\left\{(\omega-\omega_\rho+i\gamma_\rho/2)^{-1}+(\omega+\omega_\rho+i\gamma_\rho/2)^{-1}\right\},\qquad(51)$$

где $E_{0\alpha}(z,t)$ — возбуждающее поле. Совершая Фурье-преобразование левой и правой частей (51) с учетом (42), получим

$$E_\alpha(z,\omega)=E_{0\alpha}(z,\omega)-\frac{i}{2}\sum_\rho\gamma_{r\rho}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz'\phi_\rho(z')E_\alpha(z',\omega)$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty}^{z}dz'\phi_\rho(z')e^{i\kappa(z-z')}+\int\limits_{z}^{\infty}dz'\phi_\rho(z')e^{-i\kappa(z-z')}\right\}.$$

Таким образом, получено интегральное уравнение для Фурье-компонент электрического поля. Запишем возбуждающее поле в форме

$$\mathbf{E}_0(z,t)=E_0\mathbf{e}_l\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\, e^{-i\omega p}D_0(\omega)+\text{c.c.},\qquad(52)$$

где $p=t-\omega\nu z/c$. В случае монохроматического возбуждения с частотой ω_l

$$D_0(\omega)=\delta(\omega-\omega_l).$$

$D_0(\omega)$ также может соответствовать импульсам любой продолжительности и формы. Из (52) следует

$$\mathbf{B}_{0\alpha}(z,\omega)=2\pi\,E_0\,e^{i\omega\nu z/c}\left\{\mathbf{e}_lD_0(\omega)+\mathbf{e}_l^*D_0(-\omega)\right\}.$$

Запишем искомое решение в виде

$$\mathbf{E}(z,t)=(\mathbf{e}_l/2\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\exp(-i\omega t)\,\mathscr{E}(z,\omega)+\text{c.c.},\qquad(53)$$

тогда для $\mathscr{E}(z,\omega)$ получаем уравнение

$$\mathscr{E}(z,\omega)=2\pi E_0e^{i\kappa z}D_0(\omega)$$

$$-\frac{i}{2}\sum_\rho\gamma_{r\rho}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz'\phi_\rho(z')\mathscr{E}(z',\omega)$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty}^{z}dz'\phi_\rho(z')e^{i\kappa(z-z')}+\int\limits_{z}^{\infty}dz'\phi_\rho(z')e^{-i\kappa(z-z')}\right\}$$

$$\times\left\{(\omega-\omega_\rho+i\gamma_\rho/2)^{-1}+(\omega+\omega_\rho+i\gamma_\rho/2)^{-1}\right\}.\qquad(54)$$

14. Приближение бесконечно глубокой КЯ

Для большей простоты и наглядности решений рассмотрим случай бесконечно глубокой КЯ, когда волновые функции $\varphi_l(z)$ электронов и дырок строго ограничены пределами КЯ и проникновения в барьер нет, т. е. для свободных пар

$$\varphi_l(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{d}}\sin\left(\frac{\pi lz}{d}+\frac{\pi l}{2}\right),\\ \qquad l=1,2\ldots;\quad -\frac{d}{2}\le z\le\frac{d}{2},\\ 0;\qquad z\le-\frac{d}{2},\ z\ge\frac{d}{2}.\end{cases}$$

$$\varepsilon_l^e=\frac{\hbar^2\pi^2l^2}{2m_ed^2},\quad \varepsilon_l^h=\frac{\hbar^2\pi^2l^2}{2m_hd^2}.\qquad(55)$$

Тогда с помощью (54) получаем

$$\mathscr{E}(z,\omega)=2\pi E_0e^{i\kappa z}D_0(\omega)$$

$$-\frac{i}{2}\sum_\rho\gamma_{r\rho}\int\limits_{-d/2}^{d/2}dz'\phi_\rho(z')\mathscr{E}(z',\omega)$$

$$\times\left\{e^{i\kappa z}\int\limits_{-d/2}^{z}dz'\phi_\rho(z')e^{-i\kappa z'}+e^{-i\kappa z}\int\limits_{z}^{d/2}dz'\phi_\rho(z')e^{i\kappa z'}\right\}$$

$$\times\left\{(\omega-\omega_\rho+i\gamma_\rho/2)^{-1}+(\omega+\omega_\rho+i\gamma_\rho/2)^{-1}\right\}.\qquad(56)$$

15. Решения для КЯ, ширина которой много меньше длины световой волны

Рассмотрим решение уравнения (56) при $\kappa d\ll 1$. В случае монохроматического облучения $\kappa_l=\omega_l\nu/c$, в случае импульсного облучения существенны частоты ω, лежащие в интерале $\pm\Delta\omega$ около несущей частоты ω_l импульса, $\Delta\omega$ порядка $(\Delta t)^{-1}$, где Δt — продолжительность импульса. В любом случае ω порядка ω_g, где $\hbar\omega_g$ — ширина запрещенной зоны полупроводника. Будем искать решение $\mathscr{E}(z,\omega)$ слева и справа за пределами КЯ, где могут распространяться только плоские волны с частотами $\omega=c\kappa/\nu$. Ищем решения в виде

$$\mathscr{E}_\mathrm{l}(z,\omega)=\mathscr{E}_0(z,\omega)+\Delta\mathscr{E}_\mathrm{l}(z,\omega),$$

$$\mathscr{E}_\mathrm{r}(z,\omega)=\mathscr{E}_0(z,\omega)+\Delta\mathscr{E}_\mathrm{r}(z,\omega),$$

$$\Delta\mathscr{E}_\mathrm{l}(z,\omega)=2\pi E_0e^{-i\kappa z}D(\omega),\quad z\le-d/2,$$

$$\Delta\mathscr{E}_\mathrm{r}(z,\omega)=2\pi E_0e^{i\kappa z}D(\omega),\quad z\ge d/2.\qquad(57)$$

Поле внутри КЯ обозначим индексами QW

$$\mathscr{E}_\mathrm{QW}(z,\omega)=\mathscr{E}_0(z,\omega)+\Delta\mathscr{E}_\mathrm{QW}(z,\omega).\qquad(58)$$

Определим интеграл

$$\int_{-d/2}^{d/2} dz\, \phi_\rho(z)\, \mathscr{E}_{\mathrm{QW}}(z, \omega),$$

входящий в правую часть (56), в приближении $\kappa d \ll 1$. Подставив (58) в подынтегральное выражение, получаем

$$\int_{-d/2}^{d/2} dz\, \phi_\rho(z) \mathscr{E}_{\mathrm{QW}}(z, \omega)$$

$$= \int_{-d/2}^{d/2} dz\, \phi_\rho(z) \Delta\mathscr{E}_{\mathrm{QW}}(z, \omega) + 2\pi E_0 D_0(\omega) C_\rho, \quad (59)$$

где

$$C_\rho = \int_{-d/2}^{d/2} dz\, \phi_\rho(z).$$

Функция $\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{QW}}(z)$ нам неизвестна, но на границах КЯ имеем

$$\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{QW}}(-d/2, \omega) = \Delta\mathscr{E}_{\mathrm{l}}(-d/2, \omega) = 2\pi E_0 e^{i\kappa d/2} D(\omega),$$

$$\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{QW}}(d/2, \omega) = \Delta\mathscr{E}_{\mathrm{r}}(d/2, \omega) = 2\pi E_0 e^{i\kappa d/2} D(\omega). \quad (60)$$

Из (60) ясно, что при $\kappa d \ll 1$

$$\Delta\mathscr{E}_{\mathrm{QW}}(z, \omega) \simeq 2\pi E_0 D(\omega). \quad (61)$$

Подставив (61) в (59), получаем

$$\int_{-d/2}^{d/2} dz\, \phi_\rho(z) \mathscr{E}_{\mathrm{QW}}(z, \omega) = 2\pi E_0 \big(D_0(\omega) + D(\omega)\big) C_\rho.$$

Используя первое равенство из (57), запишем уравнение (56) для области $z < -d/2$. В этой области интеграл

$$\int_{-d/2}^{z} dz' e^{-i\kappa z'} \phi_\rho(z'),$$

входящий в правую часть (56), равен 0, а интеграл

$$\int_{z}^{d/2} dz' e^{i\kappa z'} \phi_\rho(z') = \int_{-d/2}^{d/2} dz' \phi_\rho(z') = C_\rho.$$

Получаем уравнение для $D(\omega)$, решение которого есть

$$D(\omega) = -\frac{4\pi\chi(\omega) D_0(\omega)}{1 + 4\pi\chi(\omega)}, \quad (62)$$

$$\chi(\omega) = \frac{i}{8\pi} \sum_\rho \gamma_{r\rho} C_\rho^2 \big\{(\omega - \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} + (\omega + \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1}\big\}.$$

Уравнение (56) для области $z > d/2$ также приводит к (62). В случае свободного движения электронов и дырок вдоль оси z, когда выполняется (37), $C_\rho = \delta_{l_e, l_h}$ и

$$\chi(\omega) = \frac{i}{8\pi} \sum_{\rho_0} \gamma_{r\rho_0} \big\{(\omega - \omega_{\rho_0} + i\gamma_{\rho_0}/2)^{-1} + (\omega + \omega_{\rho_0} + i\gamma_{\rho_0}/2)^{-1}\big\}.$$

ρ_0 — набор индексов при $l_e = l_h = l$, т.е. набор $l, \mathbf{k}_\perp$ для $H_c = 0$ и l, n для случая СМП.

Энергетические уровни соответственно равны

$$\omega_{\rho_0} = \bar{\omega}_{gl} + \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2\mu}, \quad \omega_{\rho_0} = \bar{\omega}_{gl} + \Omega_\mu(n + 1/2),$$

где

$$\bar{\omega}_{gl} = \omega_g + \frac{\hbar^2 \pi^2 l^2}{2\mu d^2}.$$

Для электрических полей слева и справа от КЯ получаем выражения

$$\mathbf{E}_{\mathrm{l(r)}}(z, t) = \mathbf{E}_0(z, t) + \Delta\mathbf{E}_{\mathrm{l(r)}}(z, t), \quad (63)$$

$$\Delta\mathbf{E}_{\mathrm{l(r)}}(z, t) = E_0 \mathbf{e}_l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t \pm z\nu/c)} D(\omega) + \text{c.c.}, \quad (64)$$

где верхний знак относится к индексу l, нижний — к индексу r. С помощью выражений (63) и (64) можно получить формулы для потоков проходящего, отраженного и поглощенного КЯ света в случае любого числа энергетических уровней в КЯ, любой формы возбуждающего импульса (включая монохроматическое облучение) и любого соотношения параметров γ_r и γ (радиационного и нерадиационного затухания возбуждений). Из (64) следует, что наведенные поля $\Delta\mathbf{E}_{\mathrm{l}}(z, t)$ и $\Delta\mathbf{E}_{\mathrm{r}}(z, t)$ отличаются только направлением распространения.

16. Решения для КЯ, ширина которых сравнима с длиной волны. Первый порядок по взаимодействию света с электронами

Величину электрического поля $\mathbf{E}(z, t)$ можно разложить в ряд по взаимодействию поля с электронами

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0(z, t) + \mathbf{E}_1(z, t) + \mathbf{E}_2(z, t) + \dots, \quad (65)$$

где $\mathbf{E}_0(z, t)$ — возбуждающее поле; следующие порядки можно получить методом итераций, используя уравнение (56).

В первом порядке получаем

$$\mathbf{E}_1(z,t) = (\mathbf{e}_l/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \mathscr{E}_1(z,\omega) + \text{c.c.}, \qquad (66)$$

$$\mathscr{E}_1(z,\omega) = -\frac{i}{2} \sum_\rho \gamma_{r\rho} \int_{-d/2}^{d/2} dz' \phi_\rho(z') \mathscr{E}_0(z',\omega)$$

$$\times \left\{ e^{i\kappa z} \int_{-d/2}^{z} dz' e^{-i\kappa z'} \phi_\rho(z') + e^{-i\kappa z} \int_{z}^{d/2} dz' e^{i\kappa z'} \phi_\rho(z') \right\}$$

$$\times \left\{ (\omega - \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} + (\omega + \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} \right\}. \qquad (67)$$

Используя определение

$$\mathscr{E}_0(z,\omega) = 2\pi E_0\, e^{i\kappa z} D_0(\omega),$$

с помощью (66) получаем

$$\mathbf{E}_1(z,t) = -iE_0 \mathbf{e}_l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} D_0(\omega) \sum_\rho (\gamma_{r\rho}/2) R^*_\rho(\kappa)$$

$$\times \left\{ e^{i\kappa z} \int_{-d/2}^{z} dz' e^{-i\kappa z'} \phi_\rho(z') + e^{-i\kappa z} \int_{z}^{d/2} dz' e^{i\kappa z'} \phi_\rho(z') \right\}$$

$$\times \left\{ (\omega - \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} + (\omega + \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} \right\} + \text{c.c.}, \qquad (68)$$

где введено обозначение

$$R_\rho(\kappa) = \int_{-d/2}^{d/2} dz\, \phi_\rho(z) \exp(-i\kappa z). \qquad (69)$$

Для свободных электронов и дырок в бесконечно глубокой КЯ

$$R_\rho(\kappa) = \int_{-d/2}^{d/2} dz\, \varphi_{l_e}(z) \varphi_{l_h}(z) \exp(-i\kappa z), \qquad (70)$$

причем функции $\varphi_l(z)$ определены в (55). Из (68) получаем, что поля слева и справа от КЯ соответственно равны

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{l}}(z,t) = -iE_0 \mathbf{e}_l$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\kappa z - i\omega t} D_0(\omega) \sum_\rho (\gamma_{r\rho}/2) \left(R^*_\rho(\kappa)\right)^2$$

$$\times \left\{ (\omega - \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} + (\omega + \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} \right\} + \text{c.c.}, \qquad (71)$$

$$\mathbf{E}_{1\mathrm{r}}(z,t) = -iE_0 \mathbf{e}_l \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\kappa z - i\omega t} D_0(\omega) \sum_\rho (\gamma_{r\rho}/2) \left|R_\rho(\kappa)\right|^2$$

$$\times \left\{ (\omega - \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} + (\omega + \omega_\rho + i\gamma_\rho/2)^{-1} \right\} + \text{c.c.} \qquad (72)$$

Для поля $\mathbf{E}_{1\mathrm{QW}}(z,t)$ внутри КЯ следует использовать формулу (68). Из (68)–(72) следует, что в случае достаточно широких КЯ становится допустимым рождение ЭДП с квантовыми числами $l_e \neq l_h$, а также появляется зависимость величин полей от ширины КЯ d, содержащаяся в коэффициентах $R_\rho(\kappa)$. Можно показать, что, если использовать функции (55), множитель $R^*_\rho(\kappa)/R_\rho(\kappa)$, входящий в отношение $\mathbf{E}_{1\mathrm{l}}(z,t)/\mathbf{E}_{1\mathrm{r}}(z,t)$, зависит от индексов l_e и l_h следующим образом: если l_e и l_h одинаковой четности, то $R^*_\rho(\kappa)/R_\rho(\kappa) = 1$, если l_e и l_h — разной четности, то $R^*_\rho(\kappa)/R_\rho(\kappa) = -1$.

Подставив результат (67) первого порядка в правую часть (56), получим результат второго порядка, и т.д. В принципе так можно вычислить весь ряд (65). Но мы применим другой метод для вычисления полей в случае широких КЯ, т.е. при условии $\kappa d \geq 1$.

17. Решение для широких КЯ в случае одного энергетического уровня

В случае когда существен один энергетический уровень, уравнение (56) удается решить точно. Введя обозначения

$$\omega_\rho = \omega_0, \quad \gamma_\rho = \gamma, \quad \phi_\rho(z) = \phi(z), \quad \gamma_{r\rho} = \gamma_r,$$

перепишем (56) в виде

$$\mathscr{E}(z,\omega) = 2\pi E_0 e^{i\kappa z} D_0(\omega) - (i/2)\gamma_r M(\omega)$$

$$\times \left\{ e^{i\kappa z} \int_{-d/2}^{z} dz' e^{-i\kappa z} \phi(z') + e^{-i\kappa z} \int_{z}^{d/2} dz' e^{i\kappa z'} \phi(z') \right\}$$

$$\times \left\{ (\omega - \omega_0 + i\gamma/2)^{-1} + (\omega + \omega_0 + i\gamma/2)^{-1} \right\}, \qquad (73)$$

где введено обозначение

$$M(\omega) = \int_{-d/2}^{d/2} dz'\, \phi(z')\, \mathscr{E}(z',\omega).$$

Умножим обе части равенства (73) на $\phi(z)$ и проинтегрируем по z в пределах от $-d/2$ до $d/2$. В результате получаем уравнение для $M(\omega)$, решение которого есть

$$M(\omega) = 2\pi E_0 D_0(\omega) R^*(\kappa) \big\{ 1 + (i/2)\gamma_r J(\kappa)$$

$$\times \left[(\omega - \omega_0 + i\gamma/2)^{-1} + (\omega + \omega_0 + i\gamma/2)^{-1} \right] \big\}^{-1}, \qquad (74)$$

где

$$J(\kappa) = \int_{-d/2}^{d/2} dz\, \phi(z)$$

$$\times \left\{ e^{i\kappa z} \int_{-d/2}^{z} dz' e^{-i\kappa z'} \phi(z') + e^{-i\kappa z} \int_{z}^{d/2} dz' e^{i\kappa z'} \phi(z') \right\}.$$

Можно показать, что

$$J(\kappa) = |R(\kappa)|^2 + iQ(\kappa).$$

Подставив (74) в (73), получаем решение задачи. Используя (53), находим наведенные электрические поля слева и справа от КЯ

$$\Delta\mathbf{E}_{\mathrm{l}}(z,t) = -i\mathbf{e}_l E_0(\gamma_r/2)\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\kappa z - i\omega t} D_0(\omega)\big(R^*(\kappa)\big)^2$$
$$\times\left[(\omega-\omega_0+i\gamma/2)^{-1}+(\omega+\omega_0+i\gamma/2)^{-1}\right]$$
$$\times\Big\{1+i(\gamma_r/2)\big(|R(\kappa)|^2+iQ(\kappa)\big)\big[(\omega-\omega_0+i\gamma/2)^{-1}$$
$$+(\omega+\omega_0+i\gamma/2)^{-1}\big]\Big\}^{-1}+\text{c.c.}, \qquad (75)$$

$$\Delta\mathbf{E}_{\mathrm{r}}(z,t) = -i\mathbf{e}_l E_0(\gamma_r/2)\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\kappa z - i\omega t} D_0(\omega)\big|R(\kappa)\big|^2$$
$$\times\left[(\omega-\omega_0+i\gamma/2)^{-1}+(\omega+\omega_0+i\gamma/2)^{-1}\right]$$
$$\times\Big\{1+i(\gamma_r/2)\big(|R(\kappa)|^2+iQ(\kappa)\big)\big[(\omega-\omega_0+i\gamma/2)^{-1}$$
$$+(\omega+\omega_0+i\gamma/2)^{-1}\big]\Big\}^{-1}+\text{c.c.} \qquad (76)$$

Величина

$$\tilde{\gamma}_r(\omega) = \gamma_r|R(\kappa)|^2$$

при $\omega=\omega_0$ и при учете (48) совпадает с вычисленным в [26] обратным радиационным временем жизни ЭДП в СМП при $n_e=n_h=n$, $\mathbf{K}_\perp=0$ в случае произвольной величины $\omega_0\nu d/c$.

Пренебрегая нерезонансным вкладом $(\omega+\omega_0+i\gamma/2)^{-1}$, получим из (75) и (76) результаты [25][1]

$$\Delta\mathbf{E}_{\mathrm{l}}(z,t) = -i\mathbf{e}_l E_0$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp(-i\kappa z - i\omega t + i\alpha)\big(\tilde{\gamma}_r(\omega)/2\big)D_0(\omega)}{\omega-(\omega_0+\Delta)+i\big(\gamma+\tilde{\gamma}_r(\omega)\big)/2}+\text{c.c.},$$

$$\Delta\mathbf{E}_{\mathrm{r}}(z,t) = -i\mathbf{e}_l E_0$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp(i\kappa z - i\omega t)\big(\tilde{\gamma}_r(\omega)/2\big)D_0(\omega)}{\omega-(\omega_0+\Delta)+i\big(\gamma+\tilde{\gamma}_r(\omega)\big)/2}+\text{c.c.},$$

где

$$\exp(i\alpha) = R^*(\kappa)/R(\kappa), \quad \Delta = (\gamma_r/2)\,Q(\kappa).$$

Заметим, что выше в этом разделе мы не использовали формулу (37), применимую только в случае свободного движения электронов и дырок вдоль оси z, а предполагали только выполнение (36).

[1] В [25] в формулах (47) и (48) вместо $\tilde{\gamma}_r$ следует читать $\tilde{\gamma}_r\exp(-i\kappa d/2)$.

В случае использования (37) с подстановкой функции (55) можно преобразовать выражения для $R(\kappa)$ и $R^*(\kappa)$ к виду

$$R(\kappa) = \frac{1}{2}\int_{-d/2}^{d/2} dz\, e^{-i\kappa z}\Big\{\cos\big[(\pi/d)(l_e-l_h)z+(\pi/2)(l_e-l_h)\big]$$
$$-\cos\big[(\pi/d)(l_e+l_h)z+(\pi/2)(l_e+l_h)\big]\Big\},$$

$$R^*(\kappa) = \frac{1}{2}\int_{-d/2}^{d/2} dz\, e^{-i\kappa z}\Big\{\cos\big[(\pi/d)(l_e-l_h)z-(\pi/2)(l_e-l_h)\big]$$
$$-\cos\big[(\pi/d)(l_e+l_h)z-(\pi/2)(l_e+l_h)\big]\Big\}.$$

В случае узких КЯ при $\kappa d \ll 1$ имеем

$$R(\kappa) = R^*(\kappa) = \delta_{l_e l_h}.$$

Это означает, что свет рождает только пары с одинаковыми числами размерного квантования у электронов и дырок (в пределе бесконечно глубоких ям). В случае $\kappa d \geq 1$ рождаются пары с различными l_e и l_h, т.е. может происходить возбуждение гораздо большего числа энергетических уровней.

18. Монохроматическое и импульсное возбуждение

В [7–15] использовано следующее выражение для импульса возбуждающего света:

$$\mathbf{E}_0(z,t) = E_0(\mathbf{e}_l e^{-i\omega_l p}+\mathbf{e}_l^* e^{i\omega_l p})\big\{\Theta(p)e^{-\gamma_{l1}p/2}$$
$$+\big[1-\Theta(p)\big]e^{\gamma_{l2}p/2}\big\},$$

где ω_l — несущая частота, $p=t-z\nu/c$, $\Theta(p)$ — функция Хевисайда. Разлагая импульс по частотам, получаем

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0\,\mathbf{e}_l\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega p}\,D_0(\omega)+\text{c.c.},$$

где

$$D_0(\omega) = \frac{i}{2\pi}\left[(\omega-\omega_l+i\gamma_{l1}/2)^{-1}-(\omega-\omega_l-i\gamma_{l2}/2)^{-1}\right].$$

При условии $\gamma_{l1}=\gamma_{l2}=\gamma_l$ импульс симметричен, длительность его порядка γ_l^{-1}. При $\gamma_l\to 0$ получаем

$$D_0(\omega) = \delta(\omega-\omega_l),$$

что соответствует монохроматическому облучению. При $\gamma_{l2}\to\infty$ импульс несимметричен и имеет очень крутой фронт.

Случай монохроматического облучения рассмотрен в [25,26], только асимметричный импульс — в [19–21], только симметричный — в [22,23,27], симметричный и асимметричный — в [24].

19. Заключение

Можно выделить в работе два наиболее важных результата. Первый — это выражение (34) и (35) для средней плотности наведенного тока, применимое к любым полупроводниковым объектам в случае любого числа уровней электронных возбуждений и при любой форме возбуждающего импульса, а также при любом направлении света относительно кристаллографических осей.

Второй — интегральное уравнение (54) для Фурье-компонент электрического поля в случае нормального падения света на КЯ, ширина которой может быть сравнима с длиной световой волны, а число уровней возбуждения — любое, что, в частности, соответствует яме, помещенной в СМП. Уравнение применимо как для монохроматического, так и для импульсного возбуждения. С помощью этих результатов возможно решение большого количества задач по оптике полупроводниковых объектов пониженной размерности.

Список литературы

[1] H. Stolz. Time Resolved Light Scattering from Exitons. Springer Tracts in Modern Physics. Springer, Berlin (1994).
[2] J. Shah. Ultrafast Spectroscopy of Semiconductors and Semiconductor Nanostructures. Springer, Berlin (1996).
[3] H. Hang, S.W. Koch. Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors. World Scientific (1993).
[4] Л.Е. Воробьев, Е.Л. Ивченко, Д.А. Фирсов, В.А. Шалигин. Оптические свойства наноструктур. Наука, СПб (2001).
[5] L.C. Andreani, F. Tassone, F. Bassani. Sol. State Commun. **77**, *9*, 641 (1991).
[6] Е.Л. Ивченко. ФТТ **33**, *8*, 2388 (1991).
[7] Е.Л. Ивченко, А.В. Кавокин. ФТТ **34**, *6*, 1815 (1992).
[8] F. Tassone, F. Bassani, L.C. Andreani. Phys. Rev. B **45**, *11*, 6023 (1992).
[9] L.C. Andreani. In: Confined Electrons and Photons / Ed. by Burstein, C. Weinsbuch. Plenum Press. NY. (1995). P. 57.
[10] T. Stroucken, A. Knorr, C. Anthony, P. Thomas, S.W. Koch, M. Koch, S.T. Cungiff, Y. Felgman, E. Göbel. Phys. Rev. Lett. **74**, *9*, 2391 (1995).
[11] T. Stroucken, A. Knorr, P. Thomas, S.W. Koch. Phys. Rev. B **53**, *4*, 2026 (1996).
[12] M. Hubner, T. Kuhl, S. Haas, T. Stroucken, S.W. Koch, R. Hey, K. Ploog. Solid State Commun. **105**, *2*, 105 (1998).
[13] L.C. Andreani, G. Pansarini, A.V. Kavokin, M.R. Vladimirova. Phys. Rev. B **57**, 4670 (1998).
[14] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Х.А. де ла Круз-Алказ, С.Т. Павлов. ЖЭТФ **123**, *2*, 305 (2003); cond-mat/0212549.
[15] С.Т. Павлов, И.Г. Ланг, Л.И. Коровин. ФТТ **45**, *10*, 1903 (2003); cond-mat/0304304.
[16] I.G. Lang, V.I. Belitsky, A. Cantarero, L.I. Korovin, S.T. Pavlov, M. Cardona. Phys. Rev. B **54**, *24*, 17768 (1996).
[17] А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. ГИФМ, М. (1998).
[18] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ **78**, *3*, 1157 (1980).
[19] I.G. Lang, V.I. Belitsky, M. Cardona. Phys. Stat. Sol. (a) **164**, *1*, 307 (1997).
[20] I.G. Lang, V.I. Belitsky. Solid State Commun. **107**, *13*, 577 (1998).
[21] I.G. lang, V.I. Belitsky. Phys. Lett. A **245**, *3–4*, 329 (1998).
[22] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **42**, *12*, 2230 (2000); cond-mat/0006364.
[23] D.A. Contreras-Solorio, S.T. Pavlov, L.I. Korovin, I.G. Lang. Phys. Rev. B **62**, *23*, 16815 (2000); cond-mat/0002229.
[24] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **43**, *6*, 1117 (2001); cond-mat/0004178.
[25] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **43**, *11*, 2091 (2001); cond-mat/0104262.
[26] И.Г. Ланг, Л.И. Коровин, Д.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **44**, *11*, 2084 (2002); cond-mat/0001248.
[27] Л.И. Коровин, И.Г. Ланг, В.А. Контрерас-Солорио, С.Т. Павлов. ФТТ **44**, *9*, 1681 (2002); cond-mat/0203390.
[28] J.M. Luttinger, W. Kohn. Phys. Rev. **97**, 869 (1955).
[29] И.М. Цидильковский. Зонная структура полупроводников. Наука, М. (1978).
[30] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М. (1973).