01;03

Метод локальных флуктуаций и моделирование неоднородных сред

© *Л.Э. Меламед*

Центр физико-технических проектов „Атомэнергомаш“, Москва
E-mail: lev.melamed@yandex.ru

Поступило в Редакцию 15 апреля 2016 г.

Предложен новый метод, позволяющий при моделировании любых физических процессов вводить в рассмотрение неоднородности физических сред простым и единообразным образом, причем без задания их как геометрических объектов. Метод формирует эти неоднородности как флуктуации физических свойств среды. С помощью данного метода могут рассчитываться как неоднородные твердые среды (композитные, пористые и пр.), так и жидкие и газообразные (двух- и многофазные). Метод позволяет учитывать изменения неоднородностей (их формы и размеров) в ходе физического процесса, т. е. ставить и решать широкий круг задач. Появляется возможность рассчитывать неоднородные среды без упрощений постановки задачи при любой конфигурации расчетных областей.

Круг задач, включающих в рассмотрение неоднородные среды, очень велик. Но особенно важными и сложными среди них являются задачи гидродинамики, связанные с движением многофазных потоков и потоков с включениями. К этому же классу относятся задачи о потоках через засыпки, а также рассмотрение турбулентности как течения через „вихревую засыпку“ [1]. Поэтому далее будет рассмотрен прежде всего этот класс задач. Количество практических применений таких задач огромно [2]. Велико также количество теоретических разработок и экспериментальных исследований, к которым относятся и работы [3,4]. Что касается методов практических расчетов, пригодных для широкого круга пользователей, их число невелико и охватывает далеко не все потребности практики. Такие методы имеются в ряде программных комплексов, в частности в Comsol Multiphysics и Ansys, но их возможности ограничены. Поэтому предлагаются методы, расширяющие эти возможности и позволяющие детализировать и упростить решение подобных задач. Такие методы объединены термином „методы локализации“ [5].

Суть этих методов состоит в детальном рассмотрении одной, зачастую малой, части пространства или одного из свойств течения и затем в использовании результатов этого рассмотрения для воссоздания всей картины течения. К таким методам относятся, прежде всего, метод фрагментации [6] и метод траекторного анализа [5]. В данной работе предлагается развитие этого подхода. Метод локальных флуктуаций дает возможность подробного, „локализованного" задания частицы среды (включения) и распространения его на всю расчетную область регулярным, массовым образом. Этот результат достигается заданием единого аналитического выражения для пространственно-временных свойств среды без задания включений или частиц как геометрических объектов. Этот метод является методом компьютерного моделирования, но может использоваться и в аналитических исследованиях.

Для формирования расчетного поля используется понятие о характеристической функции $\theta(M)$, которая определяет множество Ω так: $\theta(M) = 1$, если точка M принадлежит множеству Ω, и $\theta(M) = 0$, если не принадлежит. Характеристическая функция может быть одномерной, двух- и трехмерной. На расчетной сетке она образует пространство нулей с вкрапленными „островами" единиц, которые можно назвать „носителями" определенных свойств.

Характеристические функции используются следующим образом. Зададим в качестве некоторой характеристики поля, например вязкости μ, выражение

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\theta,$$

где θ — характеристическая функция системы включений. Получим, что характеристикой основного поля, где $\theta = 0$, будет величина μ_1, а характеристикой всех включений, где $\theta = 1$, будет величина μ_2. Если необходимо задать свойство μ не только в объемах флуктуаций, но и на их поверхностях (оболочках), эта величина представляется в виде

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\theta_1 + \mu_3\theta_2. \tag{1}$$

Здесь μ_1 — характеристика несущей среды, μ_2 — характеристика внутренних объемов флуктуаций, μ_3 — характеристика оболочек флуктуаций, θ_1 и θ_2 — характеристические функции объемов и оболочек.

Конкретное задание характеристических функций может опираться на два подхода — использование обычных функций или функций логики. Рассмотрим примеры первого подхода. Его основой является функция

Хевисайда $\eta(x)$ (единичный скачок). Эта функция равна нулю, если ее аргумент отрицателен, и единице, если положителен. Реализовать функцию Хэвисайда можно, например, выражением $(x/|x|+1)/2$. Характеристическую функцию $\theta(x,y)$ прямоугольника $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$ с помощью функции Хэвисайда можно задать так:

$$\theta(x,y) = \theta_1(x,a_1,a_2)\theta_2(y,b_1,b_2),$$

где

$$\theta(x,a_1,a_2) = \eta(x-a_1) - \eta(x-a_2).$$

Рассмотрим возможности создания системы носителей. Повторяемость некоторого описания с периодом a можно осуществить с помощью функций $[x/a]$, $\{x/a\}$, где квадратные скобки означают ближайшее целое слева, а фигурные — ближайшее целое справа. Примером периодической функции, чередующей нули и единицы, является функция $f(x)$, равная $(1-(-1)^{[x/a]})/2$ и использующая функцию „ближайшее целое слева". Произведение $F = f(x)f(y)$ описывает квадратные участки, на которых функция F равна единице. Эти участки вкраплены регулярным прямоугольным образом в основной массив плоскости, описываемый нулями. Объемные носители в форме кубиков моделируются функцией $f(x)f(y)f(z)$. Чтобы создать две системы носителей, сдвинутых в пространстве одна относительно другой на некоторую величину a, используем линейную комбинацию функций $c_1\varphi(x,y) + c_2\varphi(x-a,y-a)$, которая создает шахматное расположение двух групп носителей, например двух фаз.

Второй подход — использование функций алгебры логики. Рассмотрим этот подход на примере круглых и шарообразных включений. Пусть требуется задать в плоской расчетной области систему круглых включений с радиусом R, расположенных в прямоугольном порядке, с расстоянием a между их центрами по оси x и b по оси y. Решение может быть таким:

$$f(x,y) = \big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\big) \leqslant R^2.$$

Здесь $x_0 = ([x/a] + \{x/a\})/(2/a)$, $y_0 = ([y/b] + \{y/b\})/(2/b)$ — набор координат центров кругов. Пример тракта с круглыми включениями на основе этих выражений представлен на рис. 1. Видно, что включения автоматически распространяются на всю область — при любой ее форме.

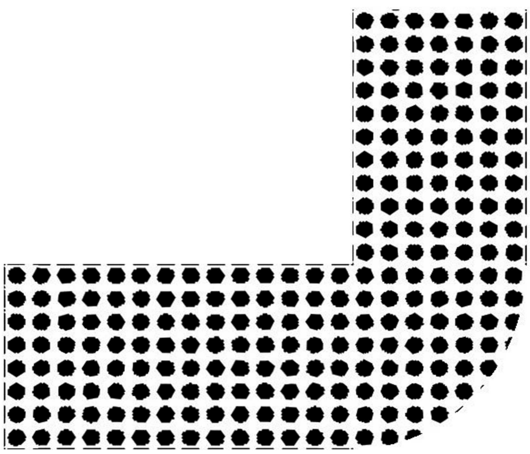

Рис. 1. Пример тракта с круглыми включениями.

Систему прямоугольных носителей также можно задать с помощью логической функции $(|x - x_0) \leqslant a_x)(|y - y_0| \leqslant a_y)$. Здесь x_0 и y_0 — координаты центров прямоугольников, задаваемые так же, как и ранее; $2a_x$ и $2a_y$ — размеры прямоугольников по осям x и y. Эти формулы легко обобщаются на трехмерный случай.

Рассмотрим дополнительные возможности метода. Немного изменив свойства характеристической функции, а именно, положив, что на множестве Ω $\theta(M) \neq 0$ (вместо $\theta(M) = 1$), получим возможность вводить зависимость от координат непосредственно в характеристическую функцию. Примером является функция

$$\theta(x, y, a, b, m) = \varphi(x, a, m)\varphi(y, b, m) + \varphi(x + a, a, m)\varphi(y + b, b, m),$$

где

$$\varphi(x, a, m) = (\sin^m(x/a) + |\sin^m(x/a)|)/2.$$

Функция $\theta(x, y, a, b)$ дает шахматное распределение синусоидальных по амплитуде пятен вязкости (или плотности) в плоской области. При этом каждый носитель — это прямоугольник размером $a \times b$. На рис. 2 представлены изоконтуры этого распределения при взгляде сверху. При расчете потока можно ввести зависимость параметров от времени, т. е.

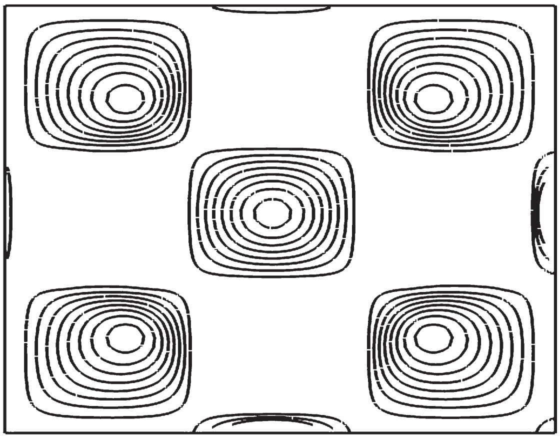

Рис. 2. Контуры равных высот флуктуаций синусоидальной формы при их шахматном расположении (вид сверху).

изменение размеров флуктуаций и их взаимное перемещение, а также зависимость от скорости потока, в котором они движутся. Достаточно увеличив вязкость, можно придать флуктуациям свойства твердого тела.

Рассмотрим вопрос об отдельном задании границ флуктуаций, их оболочек. Эти границы могут описываться δ-функциями (или их аппроксимациями). Так, δ-функцию на окружности радиуса R можно представить выражением $(\alpha/\pi)/(\alpha^2(R-r)^2+1)$ (при достаточно большом α). Можно использовать и логическую форму. Если эту же окружность заменить кольцом шириной ε, то ее характеристической функцией будет выражение $(r \leqslant R)\big(r \geqslant (R-\varepsilon)\big)$. Учет оболочек при их тонкости предъявляет серьезные требования к расчетной сетке и объему памяти.

В качестве примера применения вышеизложенного метода рассмотрим моделирование потока жидкости в трубе с мелкими пузырьками газа. Рассматривается ламинарное восходящее движение воды в вертикальной трубе. Расчетная область — цилиндр диаметром 0.01 m и высотой 0.01 m. Пузырьки пара радиусом 0.5 mm равномерно распределены по объему. Расходное объемное паросодержание равно $\beta = 0.1$. Этому объемному паросодержанию в данной области соответствует наличие порядка 150 пузырьков. На рис. 3 представлена в четырех

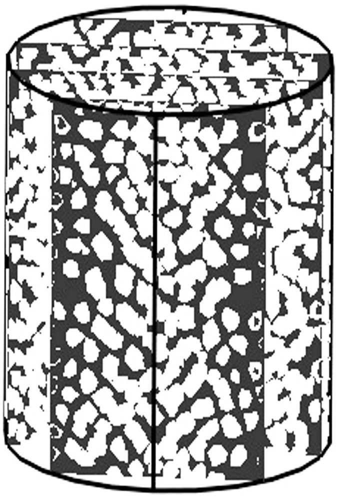

Рис. 3. Вязкость воды и пузырьков пара в трубе (в четырех сечениях).

сечениях картина вязкости системы (пузырьки белого цвета). Вязкость и плотность системы были введены по формуле (1), в которой были использованы описанные выше характеристические функции в их трехмерной логической форме.

Расчетная модель включала не только паровую внутренность пузырьков, но и их оболочку. Толщина оболочки была принята равной 0.01 от радиуса пузырька, вязкость оболочки — в 200 раз больше вязкости воды. Профиль скоростей на входе — параболический. Расчеты велись в системе Comsol Multiphysics, поскольку в ней есть возможность задавать физические свойства потока в виде математических выражений. Для сравнения были использованы экспериментальные результаты [7]. Расчеты перепадов давления и коэффициентов сопротивления потока в диапазоне чисел Рейнольдса от 100 до 1000 дали результаты, отличающиеся от экспериментальных не более чем на 10%. Эти результаты можно признать вполне удовлетворительными, поскольку разброс экспериментальных данных в подобных системах превышает эту величину. В результате расчета были получены также поля скоростей как несущей среды, так и входящих в нее пузырьков — включений.

Предложенный метод может использоваться в расчетах любых неоднородных сред, как движущихся (см. пример выше), так и неподвижных. Метод впрямую применим к анализу влияния размера наночастиц на теплопроводность содержащей их системы [8], расчету теплопередачи и влияния на кипение капиллярно-пористых покрытий [9], определению свойств новых пористых материалов [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-08-00442а).

Список литературы

[1] *Меламед Л.Э.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 24. С. 23.
[2] *Crowe C.T.* (ed.) Multiphase flow handbook. CRC Press, 2006. 1128 p.
[3] *Меламед Л.Э., Тропкина А.И., Фальковский Л.Н.* // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2013. № 1–2. С. 26.
[4] *Меламед Л.Э., Филиппов Г.А., Тропкина А.И.* // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2014. № 5–6. С. 13.
[5] *Меламед Л.Э., Тропкина А.И.* // Теоретические основы химической технологии. 2013. Т. 47. № 2. С. 139.
[6] *Меламед Л.Э., Филиппов Г.А., Тропкина А.И.* // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2011. № 3–4. С. 3.
[7] *Кутателадзе С.С.* Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. Справочное пособие. М.: Энергоатомиздат, 1990. 366 с.
[8] *Шахов Ф.М., Мейлахс А.П., Эйдельман Е.Д.* // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42. В. 5. С. 57.
[9] *Суртаев А.С., Павленко А.Н., Калита В.И.* и др. // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42. В. 8. С. 1.
[10] *Перетятько П.И., Куликов Л.А., Мелихов И.В.* и др. // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 20. С. 8.