

03

Закон сопротивления для турбулентного течения Тейлора–Куэтта при очень больших числах Тейлора

© А.М. Балонишников

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: balonishnikov@mail.ru

(Поступило в Редакцию 2 ноября 2015 г.)

Выполнены исходя из полуэмпирической модели переноса удельной скорости диссипации турбулентной энергии законы сопротивления для турбулентного течения Тейлора–Куэтта при вращении как внешнего, так и внутреннего цилиндров при очень больших числах Тейлора.

Введение

Турбулентное течение жидкости в зазоре между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами является одним из важнейших типов течений для понимания механизмов развитой турбулентности. Основными параметрами такого течения являются: a — радиус внутреннего цилиндра, b — радиус внешнего цилиндра, ρ — плотность жидкости, ν — коэффициент молекулярной кинематической вязкости, длина каждого из цилиндров, ω_1 — угловая скорость вращения внутреннего цилиндра, ω_2 — угловая скорость вращения внешнего цилиндра,

$$G = T/(\rho\nu^2L) = 2\pi a^2 u_1^{*2}/\nu^2, \quad (1)$$

где G — безразмерный и T — размерный моменты сил соответственно, действующих на боковую поверхность внутреннего цилиндра:

$$T = \rho u_1^{*2} 2\pi a L a = 2\pi \rho a^2 L u_1^{*2},$$

u_1^* — скорость трения на боковой поверхности внутреннего цилиндра.

Законы сопротивления в рамках обобщенной модели локального баланса

В работе [1] была представлена однопараметрическая модель турбулентности, основанная на приближении локального баланса турбулентной энергии и уравнения переноса удельной скорости диссипации турбулентной энергии. В качестве граничных условий использовались логарифмические профили скорости. Сшивание аналитических решений уравнений модели для турбулентного течения Тейлора–Куэтта с этими профилями определили следующий закон сопротивления типа Прандтля–Кармана:

$$4\pi q u_1^* \kappa^{-1} (q^4 - 1) J_0 + u_1^* q \kappa^{-1} \ln[Cu_1^*(b-a)/\nu] + u_2^* \kappa^{-1} \ln[Cu_2^*(b-a)/\nu] = V_2 + V_1 q, \quad (2)$$

где $q = b/a > 1$, a и b — радиусы цилиндров, u_1^* и u_2^* — скорости трения на поверхности цилиндров, $\kappa = 0.4$ и $C = 9.5$ — константы Прандтля–Кармана логарифмического профиля средней скорости, V_1 и V_2 — линейные скорости вращения точек боковых поверхностей цилиндров, вращающихся в противоположных направлениях (или один из них покоится), предполагается справедливость известного соотношения для турбулентного течения Тейлора–Куэтта: $u_1^* a = u_2^* b$, выражающие закон сохранения углового момента:

$$J_0 = \int_1^q dx \left\{ x \csc[\pi(x^4 - 1)/(q^4 - 1)] - (q^4 - 1)(4\pi)^{-1}(x - 1)^{-1} - (q^4 - 1)(4\pi)^{-1}q^{-2}(q - x)^{-1} \right\}. \quad (3)$$

В рамках предложенной модели соотношение (2) справедливо для турбулентного течения Тейлора–Куэтта при произвольных угловых скоростях вращения цилиндров ω_1 и ω_2 , а также для произвольных радиусов цилиндров a и b , если вблизи поверхностей цилиндров существуют логарифмические профили средней скорости Прандтля–Кармана. Отметим, что в работе [2] получено предельное выражение для закона сопротивления (2) в случае очень больших чисел Рейнольдса для вращения только внутреннего цилиндра ($\omega_2 = 0$ и $V_2 = 0$). Однако представляет большой интерес вид законов сопротивления развитого турбулентного течения Тейлора–Куэтта как при вращении только одного из двух цилиндров, так и в случае двух вращающихся соосных цилиндров. Для исследования этого общего случая правую часть уравнения (2) можно заменить выражением $b(\omega_2 + \omega_1)$, так как

$$V_2 + V_1 q = b\omega_2 + a\omega_1 q = b(\omega_2 + \omega_1)$$

(при такой записи предполагалось вращение цилиндров в противоположных направлениях, или один из них находился в покое).

Теперь будем считать, что положительной будет угловая скорость того цилиндра, который вращается с наибольшей по модулю угловой скоростью. Тогда правую часть уравнения (2) следует записать как $b|\omega_2 - \omega_1|$. Алгебраическое уравнение (1) принимает вид

$$4\pi q u_1^* \kappa^{-1} (q^4 - 1)^{-1} J_0 + u_1^* q \kappa^{-1} \ln [C u_1^* (b - a) / \nu] + u_1^* q^{-1} \kappa^{-1} \ln [C u_1^* q^{-1} (b - a) / \nu] = b|\omega_2 - \omega_1|, \quad (4)$$

где использовано соотношение $u_2^* = u_1^* q^{-1}$.

Случай $\omega_2 = \omega_1$ соответствует твердотельному вращению, когда цилиндры вращаются в одну сторону и, конечно, моделью не описываются.

Выведем алгебраическое уравнение, определяющее безразмерный момент силы G от чисел Рейнольдса Re_1 и Re_2 :

$$Re_1 = \frac{(b - a)|\omega_1|a}{\nu}, \quad Re_2 = \frac{(b - a)|\omega_2|b}{\nu},$$

выражая угловые скорости ω_1, ω_2 через неотрицательные числа Рейнольдса Re_1, Re_2 , а скорость трения через величину G :

$$u_1^* = \frac{\nu}{a} \sqrt{\frac{G}{2\pi}},$$

опуская очевидные упрощения из соотношения (4) получим искомое алгебраическое уравнение

$$4\pi q (q^4 - 1)^{-1} J_0 \sqrt{\frac{G}{2\pi}} + q \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \ln \left(C (q - 1) \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \right) + q^{-1} \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \ln \left(C q^{-1} (q - 1) \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \right) = (q - 1)^{-1} \kappa |q Re_1 \text{sign}(\omega_1) - Re_2 \text{sign}(\omega_2)|. \quad (5)$$

В работе [3] было предложено исследовать этот общий случай, вводя число Тейлора Ta следующим выражением:

$$Ta = \frac{1}{4} \sigma d^2 (a + b)^2 (\omega_1 - \omega_2)^2 \nu^{-2}, \quad (6)$$

где $\sigma = \left(\frac{1+\eta}{2\sqrt{\eta}}\right)^4$, отношение радиусов цилиндров $\eta = \frac{a}{b} = q^{-1}$, ширина канала $d = b - a$.

В качестве зависимой переменной предлагалось использовать безразмерный момент сил трения G , действующих со стороны вращающей жидкости на цилиндрическую поверхность внутреннего цилиндра.

В той же работе [3] предложена следующая эмпирическая зависимость:

$$G \propto Ta^{0.88}, \quad \text{при } Ta \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Для сравнения с нашей моделью перепишем модуль разности угловых скоростей вращающихся цилиндров, используя соотношение (6), через число Тейлора Ta :

$$|\omega_1 - \omega_2| = \sqrt{\frac{4Ta}{\sigma}} \frac{\nu}{d(a + b)}. \quad (8)$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$\frac{4\pi q}{\kappa(q^4 - 1)} J_0 \sqrt{\frac{G}{2\pi}} + \frac{q}{\kappa} \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \ln \left[C (q - 1) \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \right] + \frac{1}{q\kappa} \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \ln \left[C q^{-1} (q - 1) \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \right] = \frac{q}{q^2 - 1} \sqrt{\frac{4Ta}{\sigma}}, \quad (9)$$

где

$$\sigma = \left(\frac{1 + \eta}{2\sqrt{\eta}}\right)^4 = \left(\frac{1 + q}{2\sqrt{q}}\right)^4.$$

Алгебраическое уравнение (9) определяет неявным образом зависимость безразмерного момента сил G от числа Тейлора Ta , параметрами которой служат две константы Кармана: C, κ и отношение радиусов цилиндров q .

Для определения асимптотического поведения момента сил G при стремлении числа Тейлора к бесконечности: $Ta \rightarrow \infty$ поступим так же, как в работе [2] для определения предельного закона сопротивления устремляли число Рейнольдса к бесконечности. Для удобства введем новые переменные:

$$Ta_1 = \sqrt{\frac{4Ta}{\sigma}}, \quad G_1 = \sqrt{\frac{G}{2\pi}}.$$

В новых переменных соотношение (9) примет вид

$$\frac{4\pi q}{\kappa(q^4 - 1)} J_0 G_1 + \frac{q}{\kappa} G_1 \ln [G_1 C (q - 1)] + \frac{1}{q\kappa} G_1 \ln [G_1 C q^{-1} (q - 1)] = \frac{q}{q^2 - 1} Ta_1. \quad (10)$$

Для дальнейшего анализа перепишем соотношение (10) в следующем виде:

$$\frac{4\pi J_0}{\kappa(q^2 + 1)} G_1 + \frac{q^4 - 1}{\kappa q^2} G_1 \ln G_1 + \frac{q^2 - 1}{\kappa} G_1 \ln [C (q - 1)] + \frac{q^2 - 1}{\kappa q^2} G_1 \ln [C q^{-1} (q - 1)] = Ta_1. \quad (11)$$

Поскольку натуральный логарифм — функция медленно растущая, то в нулевом приближении $G_1 \propto Ta_1$, при таком поведении второй член в левой части (11) будет ведущим, и мы можем приближенно считать

$$\frac{q^4 - 1}{\kappa q^2} G_1 \ln G_1 \approx Ta_1. \quad (12)$$

Проведем дальнейшее упрощение соотношения (12)

$$\frac{q^4 - 1}{\kappa q^2} G_1 \ln Ta_1 \approx Ta_1. \quad (13)$$

Откуда:

$$G_1 = \frac{\kappa q^2 Ta_1}{(q^4 - 1) \ln Ta_1}. \quad (14)$$

Для оправдания сделанных приближений поделим обе части соотношения (11) на величину Ta_1 и подставим полученную зависимость (14) в это соотношение. Первый, третий и четвертый члены левой части уравнения устремятся к нулю, как

$$\frac{1}{\ln Ta_1} \quad \text{при} \quad Ta_1 \rightarrow \infty,$$

второй член устремится к единице, поскольку

$$\frac{\ln(\ln Ta_1)}{\ln Ta_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Ta_1 \rightarrow \infty,$$

что и доказывает справедливость асимптотического поведения величины G_1 в рамках авторской модели турбулентности. Возвращаясь к исходным переменным G и Ta , получим

$$G = \frac{32\pi\kappa^2 q^4 Ta}{(q^4 - 1)^2 \sigma \ln^2(4Ta/\sigma)} \quad \text{при} \quad Ta \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Можно также написать асимптотически эквивалентную формулу

$$G = \frac{32\pi\kappa^2 q^4 Ta}{(q^4 - 1)^2 \sigma \ln^2(Ta)} \quad \text{при} \quad Ta \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Похожие логарифмические поправки с другими степенями логарифмов были предложены в теоретических работах [4,5].

В некоторых экспериментальных работах [6,7] представлена зависимость безразмерного момента сил G от числа Рейнольдса Re . В случае вращения только внутреннего цилиндра используется число $Re_1 = \omega_1 ad/v$. В случае вращения только внешнего цилиндра используется число $Re_2 = \omega_2 bd/v$.

Рассмотрим случай вращения только внутреннего цилиндра: $\omega_2 = 0$, $\omega_1 = \frac{Re_1 v}{ad}$. Тогда из соотношения (4) получаем алгебраическое уравнение, определяющее неявную зависимость безразмерного момента сил G от числа Рейнольдса Re_1 :

$$4\pi q \kappa^{-1} \sqrt{\frac{G}{2\pi}} (q^4 - 1)^{-1} J_0 + q \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \kappa^{-1} \ln \left[C(q-1) \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \right] + q^{-1} \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \kappa^{-1} \ln \left[Cq^{-1}(q-1) \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \right] = \frac{q Re_1}{(q-1)}. \quad (17)$$

Для упрощения этого выражения используем ранее введенную переменную G_1 вместо переменной G :

$$\frac{4\pi q J_0}{q^4 - 1} G_1 + G_1 q \ln [C(q-1)G_1] + G_1 q^{-1} \ln [CG_1 q^{-1}(q-1)] = \frac{\kappa q Re_1}{q-1}. \quad (18)$$

Найдем асимптотику зависимости $G_1 = G(Re_1)$ при $Re_1 \rightarrow \infty$. Из уравнения (18) видно, что в нулевом

приближении $G_1 \propto Re_1$. В этом случае ведущим членом в левой части выражения будет $G_1(q + q^{-1}) \ln G_1$, что позволяет написать приближенное равенство

$$G_1(q + q^{-1}) \ln G_1 = \frac{\kappa q Re_1}{q-1}. \quad (19)$$

Учитывая приближенную прямую пропорциональность $G_1 \propto Re_1$, заменим в соотношении (19) $\ln G_1 = \ln Re_1$, что даст искомую зависимость

$$G_1 = \frac{\kappa q^2 Re_1}{(q-1)(q^2+1) \ln Re_1}. \quad (20)$$

Так же как это было проделано при выводе соотношения (15), можно убедиться, что выражение (20) есть асимптотика зависимости $G_1 = G_1(Re_1)$, определяемой алгебраическим выражением (18). Возвращаясь к исходной переменной G , получим окончательное выражение

$$G = \frac{2\pi\kappa^2 q^4 Re_1^2}{(q-1)^2 (q^2+1)^2 \ln^2 Re_1} \quad \text{при} \quad Re_1 \rightarrow \infty, \quad (21)$$

где G — безразмерный момент сил, действующий на вращающийся внутренний цилиндр (внешний цилиндр покоится), Re_1 — число Рейнольдса, q — отношение радиуса внешнего цилиндра к радиусу внутреннего цилиндра, $\kappa = 0.4$ — константа Кармана.

Рассмотрим случай вращения только внешнего цилиндра (внутренний цилиндр покоится $\omega_1 = 0$), $\omega_2 = \frac{Re_2 v}{bd}$. Тогда из уравнения (4) получим алгебраическое уравнение, определяющее неявным образом зависимость безразмерного момента сил G от числа Рейнольдса Re_2 :

$$\frac{4\pi q J_0}{q^4 - 1} \sqrt{\frac{G}{2\pi}} + q \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \ln \left[C(q-1) \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \right] + q^{-1} \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \ln \left[Cq^{-1}(q-1) \sqrt{\frac{G}{2\pi}} \right] = \frac{\kappa Re_2}{(q-1)}. \quad (22)$$

Рассуждая, как и в случае вращения только внутреннего цилиндра, опустив промежуточные выкладки, получим окончательный предельный закон сопротивления для безразмерного момента сил G , действующего, как и в выражении (21), на внутренний цилиндр

$$G = \frac{2\pi\kappa^2 q^2 Re_2^2}{(q-1)^2 (q^2+1)^2 \ln^2 Re_2} \quad \text{при} \quad Re_2 \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Отметим, что в промежуточном диапазоне чисел Рейнольдса и Тейлора для расчета законов сопротивления следует использовать исходные законы сопротивления (9), (17), (22).

Иногда в качестве зависимой переменной в законах сопротивления используют квазичисло Нуссельта Nu_ω ,

$$Nu_\omega = G/G_{lam}, \quad (24)$$

где G_{lam} — безразмерный момент силы, действующий на внутренний цилиндр со стороны жидкости при ламинарном движении, согласно [6],

$$G_{lam} = 2\nu^{-1}a^2b^2|\omega_1 - \omega_2|(b^2 - a^2)^{-1}. \quad (25)$$

Учитывая соотношения (5) и (25), мы можем связать G_{lam} с числом Тейлора Ta :

$$G_{lam} = \frac{4q^2\sqrt{Ta}}{\sqrt{\sigma}(q^2 - 1)^2}. \quad (26)$$

Комбинируя соотношения (24) и (26), получим

$$Nu_\omega = \frac{G\sqrt{\sigma}(q^2 - 1)^2}{4q^2\sqrt{Ta}}. \quad (27)$$

Используя асимптотическую формулу (16), получим окончательную формулу для квазичисла Нуссельта

$$Nu_\omega = \frac{8\pi\kappa^2q^2\sqrt{Ta}}{(q^2 + 1)^2\sqrt{\sigma}\ln^2 Ta} \quad \text{при } Ta \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Отметим, что иногда вместо числа Тейлора Ta , используют число Рейнольдса Re :

$$Re = \frac{2ad|\omega_2 - \omega_1|}{(1 + \eta)\nu}. \quad (29)$$

Легко показать, что справедливо соотношение

$$Ta = \sigma^2 Re^2. \quad (30)$$

Сравнение с экспериментами

Результаты сравнения предсказаний модели обобщенного локального баланса с более ранними экспериментами для развитого турбулентного течения Тейлора–Куэтта были представлены в работах [1,2].

На рис. 1. представлено сопоставление зависимостей безразмерного момента сил G , действующего на боковую поверхность вращающегося внутреннего цилиндра (внешний цилиндр покоится) от числа Рейнольдса Re_1 по данным эксперимента [6] для отношения радиусов цилиндров $\eta = 0.35$, и рассчитанной по уравнению (18). Это алгебраическое уравнение после деления обеих частей на величину G_1 решалось итеративным методом Ньютона–Рафсона. Можно говорить о сравнительно неплохом согласии теории и эксперимента, имея в виду отсутствие в теории дополнительных подгоночных констант для этого типа течения, кроме двух известных констант Прандтля–Кармана. На рис. 2 представлено сопоставление двух теоретических зависимостей величины от числа Тейлора Ta , полученных путем решения алгебраического уравнения (10) методом Ньютона–Рафсона и асимптотической явной зависимостью (15), и экспериментальной зависимостью, полученной в работе [7]. Эта экспериментальная зависимость представлена также в работе [8], откуда и были перенесены данные на рис. 2.

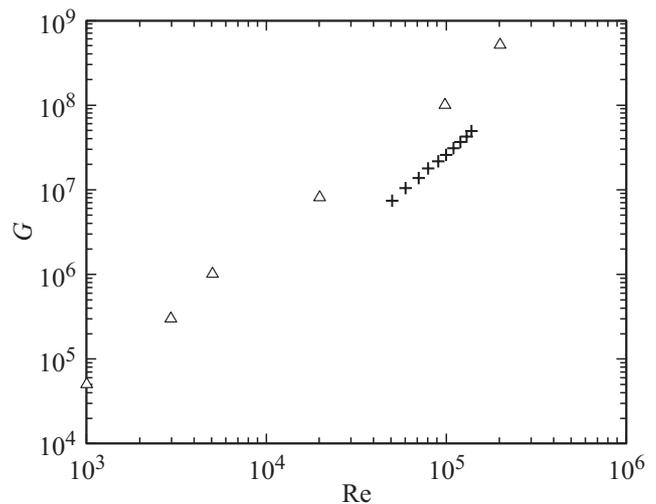


Рис. 1. Экспериментальные измерения (треугольники) [6] и решение уравнения (10) (+) для определения безразмерного момента сил G как функция числа Рейнольдса Re .

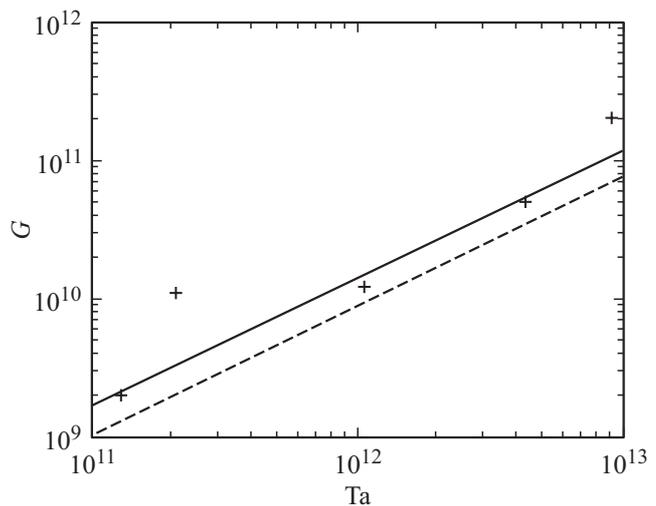


Рис. 2. Экспериментальные измерения [7] (+), решения уравнения (10) (сплошная линия), формула (15) (штриховая линия) для определения безразмерного момента сил G как функции числа Тейлора Ta .

Переход от числа Рейнольдса Re к числу Тейлора Ta осуществлялся по формуле (30). Из-за размытости данных [7] (данные работы [3] еще более размыты, что видно из работы [8]), для сравнения была отобрана серия данных, соответствующая экстраполяции [7] к бесконечному числу Россби Ro_∞ , где число Россби определяется как

$$Ro = (\omega_1 - \omega_2)/\omega_2 = (Re_1/\eta Re_2) - 1.$$

Видно хорошее согласие обеих теоретических кривых и экспериментальных данных. Обсуждение имеющихся к настоящему моменту экспериментальных данных по течению Тейлора–Куэтта опубликовано в работе [9].

Заключение

В целом на наш взгляд, модель обобщенного локального баланса является одной из лучшей среди существующих теорий для развитого турбулентного течения Тейлора–Куэтта, что показывает сравнение предсказаний модели и экспериментами. Однако в рамках этой модели остаются нерешенные вопросы. Является ли размытость экспериментальных данных следствием дополнительной, детерминированной, более слабой зависимости момента сил G от соотношения частот вращения, как утверждается в экспериментальных работах [3,7,8]? Или это следствия детерминированного хаоса, являющегося неотъемлемой частью этого типа течения, и нужно привлекать для расчетов нестационарные уравнения модели [1]?

Список литературы

- [1] *Balonishnikov A.M.* // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 61. N 2. P. 1390–1394.
- [2] *Балонишников А.М.* // ЖТФ 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 139–140.
- [3] *Van Gils D.P.M., Huisman S.G., Bruggert G.-W., Sun C., Lohse D.* // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 024 502.
- [4] *Kraichnan R.H.* // Phys. Fluids 1962. Vol. 5. P. 1374.
- [5] *Dubrulle B., Hersant F.* // Eur. Phys. J. 2002. Vol. B26. P. 379.
- [6] *Burin M.J., Schartman E., Ji H.* // Exp. Fluids. 2010. Vol. 48. P. 763.
- [7] *Paoletti M.S., Lathrop D.P.* // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 024 501.
- [8] *Paoletti M.S., van Gils D.P.M., Dubrulle B., Chao Sun, Lohse D., Lathrop D.P.* // Astronom. Astrophys. 2012. Vol. 547. A. 64
- [9] *Nordsiek F., Huisman S.G., van der Veen R.C.A., Chao Sun, Lohse D., Lathrop D.P.* // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 774. P. 342.