01

Электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе при униполярной инжекции заряда

© В.А. Ильин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990 Пермь, Россия
e-mail: ilin1@psu.ru

(Поступило в Редакцию 3 марта 2016 г. В окончательной редакции 7 июня 2016 г.)

Изучена электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном плоском конденсаторе при униполярной инжекции заряда. В одномерном случае исследована динамика переноса заряда через неподвижную изотермическую жидкость в модулированном электрическом поле. Изучено влияние амплитуды и частоты модуляции на пространственно-временные распределения плотности заряда и потенциала электрического поля. В двумерном случае исследованы нелинейные режимы электроконвекции неизотермической слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле. Изучены гистерезисные переходы между двумя разными по интенсивности режимами электроконвекции.

DOI: 10.21883/JTF.2017.01.44010.1787

Введение

Несмотря на ряд экспериментальных и теоретических работ [1–3], остаются открытыми вопросы, связанные с возникновением и эволюцией нелинейных электроконвективных движений [4]. В рамках существующих задач хорошо изучена конвекция в постоянном электрическом поле. Вопросам конвекции в переменных и модулированных электрических полях уделяется недостаточно внимания.

Существуют диэлектрофоретический [5], электрокондуктивный [6] и инжекционный [7–9] механизмы электроконвекции в жидких диэлектриках. В настоящей работе исследована динамика переноса заряда через слабопроводящую жидкость в постоянном или модулированном электрическом поле горизонтального плоского конденсатора при униполярной инжекции заряда. Используется электрогидродинамическое приближение, когда магнитными эффектами пренебрегают по сравнению с электрическими. Рассматривается модель, в которой плотность электрических зарядов, инжектируемых с катода, прямо пропорциональна нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля в конденсаторе [4,9,10]. Инжектируемые с поверхности катода заряды движутся через слой жидкости, изменяя в нем распределение электрического поля.

В работах [9,10] проведены линейный анализ и нелинейное исследование в двумерном случае в постоянном электрическом поле, в [10] — изотермический, в [9] — неизотермический случаи. В настоящей работе рассмотрена одномерная задача в модулированном электрическом поле, двумерная задача в постоянном электрическом поле.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости в вертикальном модулированном электрическом поле. Ось x направлена вдоль нижней границы слоя, ось z — перпендикулярна границам слоя. Два плоских электрода лежат в плоскостях $z = 0$ и $z = h$, h — толщина слоя.

Идеально тепло- и электропроводные пластины конденсатора нагреты до разной температуры — $T(0) = \Theta$, $T(h) = 0$. Здесь T — температура, отсчитываемая от температуры верхнего электрода, Θ — характерная разность температур. Случай $\Theta > 0$ соответствует нагреву снизу. На катоде (нижнем электроде) потенциал электрического поля равен нулю $\varphi(0) = 0$, на аноде (верхнем электроде) — модулируется по закону $\varphi(h) = U\big(1 + \eta \sin(2\pi\nu t)\big)$. Здесь U — напряжение, η, ν — амплитуда и частота модуляции электрического поля. С катода происходит униполярная инжекция электрического заряда. Плотность зарядов у катода пропорциональна нормальной составляющей вектора напряженности поля $\rho_e = aE_z$, где a — коэффициент, характеризующий степень инжекции.

Движение жидкости и свободных зарядов в слое описывается системой уравнений электрогидродинамики

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \rho\nu_0\Delta\mathbf{v} + \rho_e\mathbf{E} + \rho\mathbf{g},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)T = \chi\Delta T, \quad \mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad \rho = \rho_0(1-\beta T),$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}) = \rho_e, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi,$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_e\mathbf{v} - b\rho_e\mathbf{E}) = 0, \qquad (1)$$

где ρ — массовая плотность жидкости, $\mathbf{v}$ — вектор скорости жидкости, p — давление, ν_0 — коэффициент кинематической вязкости, ρ_e — плотность свободных зарядов, χ — коэффициент температуропроводности, β — коэффициент теплового расширения жидкости, ε — диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 — электрическая постоянная, b — подвижность зарядов, $\mathbf{E}$ — напряженность, φ — потенциал поля.

Границы слоя считаются твердыми, непроницаемыми, на них выполняются условия прилипания — скорость равна нулю:

$$z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \rho_e = aE_z = -a\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \ \ T = \Theta,$$

$$z = h : \mathbf{v} = 0, \ \varphi = U\big(1 + \eta\sin(2\pi\nu t)\big), \ T = 0. \qquad (2)$$

Используем безразмерные переменные на основе масштабов: времени — время вязкой диссипации h^2/ν_0, расстояния — расстояние между электродами h, скорости — ν_0/h, потенциала — U, поля — U/h, давления — $\rho\nu_0^2/h^2$, температуры — Θ, частоты — ν_0/h^2, плотности заряда — $\varepsilon\varepsilon_0 U/h^2$.

После обезразмеривания система уравнений (1) с граничными условиями (2) может быть приведена к виду

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v} - \mathrm{Gr}_e\rho_e\nabla\varphi + \mathrm{Gr}T\boldsymbol{\gamma},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)T = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \quad \Delta\varphi + \rho_e = 0,$$

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho_e = B(\rho_e^2 - \nabla\varphi\cdot\nabla\rho_e), \qquad (3)$$

где $\gamma = (0, 0, 1)$, p — превышение давления над гидростатическим. Граничные условия перепишутся

$$z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \rho_e = -A\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad T = 1,$$

$$z = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 1 + \eta\sin(2\pi\nu t), \quad T = 0. \qquad (4)$$

Здесь введены безразмерные параметры — тепловое (Gr) и электрическое (Gr_e) числа Грасгофа, подвижность зарядов B и параметр инжекции A:

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu_0^2}, \quad \mathrm{Gr}_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0^2U^2}{\rho\nu_0^2}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu_0}{\chi},$$

$$B = \frac{bU}{\nu_0}, \quad A = \frac{ah}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (5)$$

Числа Грасгофа и подвижность зарядов перепишем [8]

$$\mathrm{Gr} = \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}}, \quad \mathrm{Ra} = \frac{g\beta\theta h^3}{\nu_0\chi}, \quad \mathrm{Gr}_e = \frac{T_e^2}{M^2}, \quad \mathrm{B} = \frac{T_e}{M^2},$$

$$T_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U}{b\rho\nu_0}, \quad M = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\rho}}, \qquad (6)$$

где Ra — тепловое число Рэлея, T_e и M — новые электрические параметры.

Рассматриваются плоские возмущения $\mathbf{v} = (u, 0, w)$ и $\partial/\partial y = 0$, вводится функция тока ψ и вихрь скорости Φ:

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \Phi = (\mathrm{rot}\mathbf{v}) = -\Delta\psi. \qquad (7)$$

Вследствие малой инжекции нелинейную задачу можно решать в безындукционном приближении, в котором предполагается, что изменение распределения заряда, возникающее в результате появления электроконвективных структур, по сравнению с равновесным не вызывает заметного изменения потенциала электрического поля [10]. Система (3) в безындукционном приближении примет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \Delta\Phi - E\frac{T_e^2}{M^2}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\rho_e}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\rho_e}{\partial x} = \frac{T_e}{M^2}\left(\rho_e^2 + E\frac{\partial\rho_e}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T, \qquad (8)$$

со следующими граничными условиями

$$z = 0: \quad \psi = 0, \quad \partial\psi/\partial z = 0, \quad q = AE, \quad T = 1,$$

$$z = 1: \quad \psi = 0, \quad \partial\psi/\partial z = 0, \quad T = 0. \qquad (9)$$

На боковых границах для всех искомых функций выполняются условия периодичности.

В постоянном электрическом поле в работе [10] найдены распределения равновесных значений потенциала и заряда (при $\mathbf{v} = 0$). Равновесные распределения потенциала, заряда и температуры имеют вид

$$\varphi_0(z) = \frac{(1 + 2Az)^{3/2} - 1}{(1 + 2A)^{3/2} - 1}, \quad \rho_{e0} = \frac{-3A^2(1 + 2Az)^{-1/2}}{(1 + 2A)^{3/2} - 1},$$

$$T_0 = -z + 1. \qquad (10)$$

В [9,10] безразмерные параметры варьировались в зависимости от параметра F, характеризующего величину приложенного напряжения: $\mathrm{Ge}_e = 5000F^2$, $B = 5F$. Такие соотношения в рамках нашей задачи соответствуют значению параметра $M = 14.14$ и определяют связь между F и T_e следующим образом: $T_e = 10^3F$.

В [9,10] проведено исследование линейной устойчивости равновесия без нагрева. В этих работах для безразмерного параметра инжекции $A = 0.25$ были вычислены критические параметры, при которых равновесие жидкости в слое теряет устойчивость. При $F* = 5.44$ возникает неустойчивость относительно возмущений с волновым числом $k* = 4.6$ (периодом $L = 1.37$).

В [9] учтен неоднородный нагрев — неустойчивость при подогреве снизу связана с монотонной модой, при нагреве сверху возможна колебательная неустойчивость.

Нелинейные режимы изотермической электроконвекции в одномерном случае

В изотермическом случае в модулированном электрическом поле был исследован перенос заряда через слабопроводящую жидкость, находящуюся в равновесии.

В этом случае задача сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = B\left(\rho_e^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \rho_e}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\rho_e. \qquad (11)$$

Для ее решения использовался метод конечных разностей. Для решения уравнения Пуассона — метод последовательной верхней релаксации [11]. В качестве начальных распределений для потенциала и плотности заряда были взяты распределения (10). Задача решалась на сетке с числом узлов $n = 100$. При вычислениях использовались следующие значения параметров: параметр инжекции $A = 0.25$, подвижность зарядов $B = 25$ (это ниже критического значения $B* = 27.2$, начиная с которого возникает конвекция,).

Рассмотрим результаты вычислений для частоты модуляции $\upsilon = 10$ с амплитудой $\eta = 0.1$.

На рис. 1 представлены зависимости потенциала от времени до $t = 1.025$ в разных точках слоя: $z = 1/4$ (*1*), $z = 1/2$ (*2*), $z = 3/4$ (*3*), $z = 1$ (*4*). Амплитуда колебаний потенциала возрастает от катода к аноду.

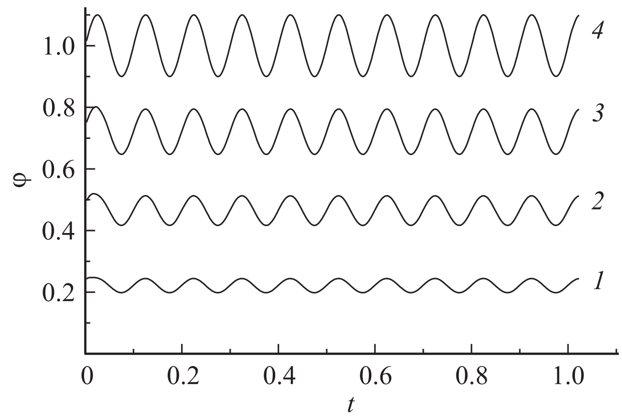

Рис. 1. Зависимость потенциала от времени в разных точках слоя z: 1/4 (*1*), 1/2 (*2*), 3/4 (*3*), 1 (*4*). Частота $\nu = 10$, амплитуда $\eta = 0.1$.

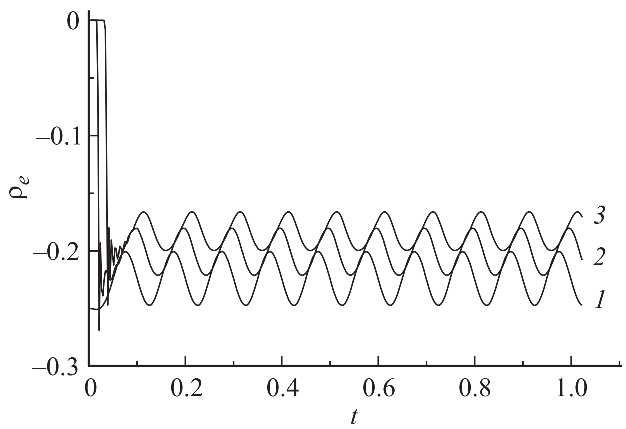

Рис. 2. Зависимость плотности заряда от времени в разных точках слоя z: 0 (*1*), 1 /2 (*2*), 1 (*3*). Частота $\nu = 10$, амплитуда $\eta = 0.1$.

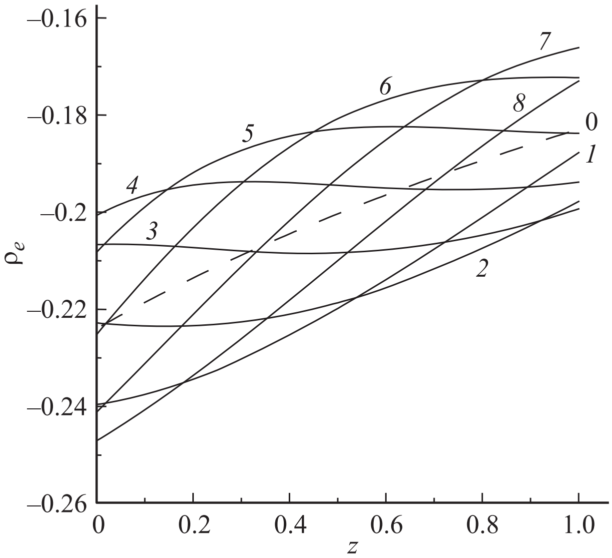

Рис. 3. Распределения плотности заряда в слое в постоянном поле (0), в модулированном поле в разные моменты времени на периоде (за начало отсчета времени взят момент $t = 1.025$, см. рис. 1): $T/8$ (*1*), $T/4$ (*2*), $3T/8$ (*3*), $T/2$ (*4*), $5T/8$ (*5*), $3T/4$ (*6*), $7T/8$ (*7*), T (*8*). Частота $\nu = 10$, период колебаний $T = 0.1$, амплитуда $\eta = 0.1$.

На рис. 2 изображены зависимости плотности заряда от времени до момента $t = 1.025$ в разных точках слоя: $z = 0$ (*1*), $z = 1/2$ (*2*), $z = 1$ (*3*). Модуль плотности заряда уменьшается от катода к аноду. Максимумы и минимумы заряда в близких к аноду точках наступают позднее по времени, чем в точках, расположенных ближе к катоду.

Потенциал и плотность заряда колеблются с одинаковой частотой — частотой модуляции около значений, соответствующих постоянному полю.

На рис. 3 приведены распределения плотности заряда от вертикальной координаты в слое в постоянном поле (0) и в модулированном поле в разные моменты времени на периоде: $T/8$ (*1*), $T/4$ (*2*), $3T/8$ (*3*), $T/2$ (*4*), $5T/8$ (*5*), $3T/4$ (*6*), $7T/8$ (*7*), T (*8*). За начало отсчета времени взят момент $t = 1.025$ (рис. 1). От катода к аноду через слой жидкости распространяется волна заряда.

Фазовая скорость волны заряда при разных частотах модуляции в среднем оказалась одинаковой и приблизительно равна 28 безразмерных единиц.

Для других частот модуляции вид распределений и их эволюция качественно остаются такими же. При увеличении частоты модуляции при одинаковой амплитуде модуляции увеличивается частота колебания заряда и потенциала. Увеличение амплитуды модуляции при постоянной частоте приводит к увеличению амплитуды колебаний переменных. Отклонение потенциала на аноде от значения в постоянном поле становится более сильным.

Было рассмотрено влияние параметра инжекции A для тех же значений частоты и амплитуды модуляции.

Параметр инжекции практически не влияет на распределение потенциала. Влияние же на плотность заряда существенно. При увеличении инжекции изменяются начальные распределения переменных, растут значение модуля и амплитуда колебаний плотности заряда. Но общая картина эволюции остается прежней.

Нелинейные режимы электроконвекции в двумерном случае

Система (8)–(9) аппроксимировалась конечно-разностными отношениями. Эволюционные уравнения решались по явной схеме, конвективные слагаемые в уравнении для заряда и температуры аппроксимировались разностями „против потока" [11]. Для уравнения переноса тепла использовались центральные разности. Для удобства работы с условиями периодичности к сетке добавлялись два вертикальных ряда. Вихрь скорости на горизонтальных границах вычислялся по формуле Тома. Для решения уравнения Пуассона использовался метод последовательной верхней релаксации.

Для вычислений выбиралась прямоугольная ячейка с пространственными размерами $L_z = 1$, $L_x = 2$. Горизонтальная длина ячейки соответствует волновому числу $k = 3.14$. Размер сетки брался 21×41 узлов. Расчеты проведены при разных числах Ra, $A = 0.25$, $M = 14.14$, $\mathrm{Pr} = 10$. Были обнаружены два режима стационарной конвекции, между которыми наблюдались гистерезисные переходы. На рис. 4 представлены результаты численных расчетов зависимости максимальной функции тока от параметра T_e для $\mathrm{Ra} = 500$.

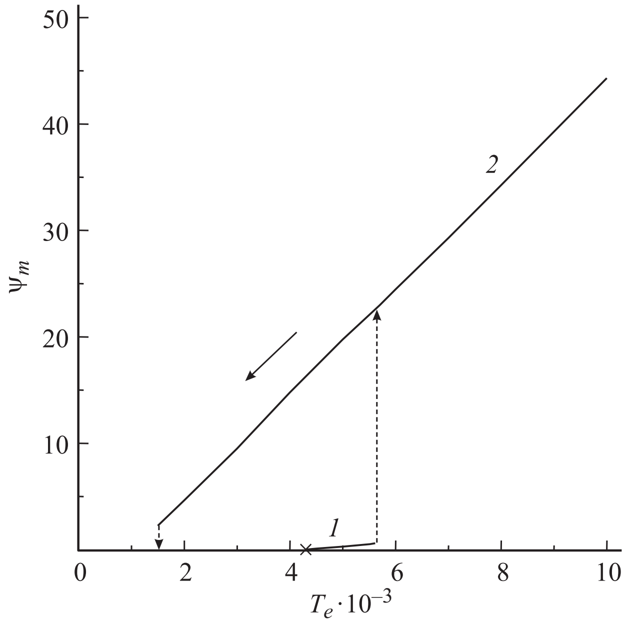

Рис. 4. Зависимость максимальной функции тока от параметра T_e, *1* — режим с маленькой интенсивностью вихрей, *2* — режим с большой интенсивностью вихрей ($\mathrm{Ra} = 500$).

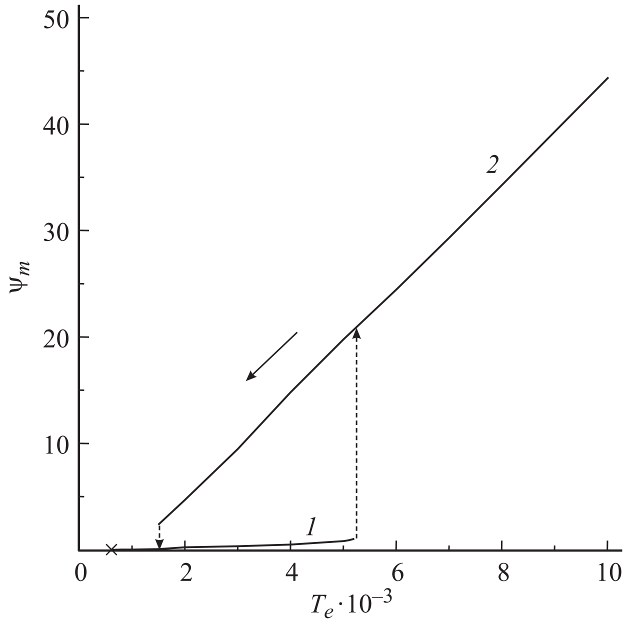

Рис. 5. Зависимость максимальной функции тока от параметра T_e, *1* — режим с маленькой интенсивностью вихрей, *2* — режим с большой интенсивностью вихрей ($\mathrm{Ra} = 1500$).

Для $\mathrm{Ra} = 500$ при расчете с постоянными начальными условиями было обнаружено, что электроконвекция возникает мягким образом при $T_e = 4.4 \cdot 10^3$, что согласуется с данными линейной теории, и наблюдается режим *1* с маленькой интенсивностью вихрей. С ростом поля при $T_e = 5.7 \cdot 10^3$ происходит скачкообразный переход к режиму конвекции *2* с большей интенсивностью вихрей. Интенсивность этого режима растет с ростом поля.

В интервале $4.4 \cdot 10^3 \le T_e \le 5.6 \cdot 10^3$ был обнаружен гистерезис, в котором поведение системы существенно зависит от начальных условий. При вычислении методом продолжения по параметру было обнаружено, что при движении в пространстве параметров справа налево режим *2* существует до $T_e = 1.5 \cdot 10^3$. При меньшей напряженности поля $T_e < 1.5 \cdot 10^3$ в системе независимо от начальных условий затухают все возмущения, и устанавливается равновесное распределение переменных.

В интервале $1.5 \cdot 10^3 \le T_e \le 4.3 \cdot 10^3$ в зависимости от начальных условий в системе будет либо равновесие, либо стационарный режим *2*, при большем поле $4.4 \cdot 10^3 \le T_e \le 5.6 \cdot 10^3$ — реализуется либо режим *1*, либо режим *2*. При $T_e > 5.6 \cdot 10^3$ сколь угодно малые возмущения равновесия приводят систему после переходных процессов к стационарному режиму *2*.

Нелинейный анализ выявил, что при определенных начальных условиях электроконвекция может начаться жестко (пороговым образом) при меньшем электрическом поле, чем предсказывает линейная теория.

При других значениях нагрева ($\mathrm{Ra} = 1000$, 1250, 1500, 2000) пороговые значения переходов меняются. Результаты представлены в таблице. В ней приведены

Пороги режимов электроконвекции

Ra	Порог возникновения режима *2*, T_e	Порог возникновения режима *1*, T_e	Порог перехода от режима *1* к режиму *2*, T_e
500	$1.5 \cdot 10^3$	$4.4 \cdot 10^3$	$5.7 \cdot 10^3$
1000	$1.6 \cdot 10^3$	$2.5 \cdot 10^3$	$5.5 \cdot 10^3$
1250	$1.4 \cdot 10^3$	$1.6 \cdot 10^3$	$5.4 \cdot 10^3$
1500	$1.5 \cdot 10^3$	$0.7 \cdot 10^3$	$5.3 \cdot 10^3$
2000	$1.4 \cdot 10^3$	0	$5.1 \cdot 10^3$

пороги возникновения режимов *1* и *2*, пороги перехода от режима *1* к режиму *2*.

Пороги режима *2* (левая точка гистерезиса) при разных нагревах в среднем не меняются, пороги режима *1* уменьшаются с ростом нагрева, правая точка гистерезиса с ростом нагрева уменьшается. При малых Ra режим *2* возникает жестко раньше мягко возникающего режима *1*. С ростом числа Рэлея порог режима *1* уменьшается и сравнивается с порогом режима *2*. При дальнейшем увеличении Ra режим *1* начинается раньше режима *2*. Это видно из рис. 5, на котором представлены результаты численных расчетов зависимости максимальной функции тока от параметра T_e для $\mathrm{Ra} = 1500$.

Заключение

В настоящей работе в модулированном электрическом поле горизонтального плоского конденсатора в одномерном случае при униполярной инжекции заряда исследована динамика переноса заряда через изотермическую неподвижную слабопроводящую жидкость. В аналогичной постановке также проведено исследование нелинейных режимов электроконвекции неизотермической слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле в двумерном случае.

В одномерном случае инжектированный с катода заряд распространяется через слой жидкости в виде волны. При увеличении частоты или амплитуды модуляции поля растут соответственно частота или амплитуда колебаний заряда и потенциала. Параметр инжекции практически не влияет на распределение потенциала. Влияние параметра инжекции на плотность заряда существенно. При увеличении параметра инжекции растет амплитуда колебаний заряда.

В двумерном случае существуют два разных по интенсивности нелинейных режима электроконвекции неизотермической слабопроводящей жидкости в постоянном электрическом поле. Эти режимы изучены. Исследованы пороги режимов и гистерезисные переходы между ними.

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-00171-а, 14-01-31253-мол_*a*).

Список литературы

[1] *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Физматгиз, 1972. 292 с.
[2] *Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А.* Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 320 с.
[3] *Стишков Ю.К., Остапенко А.А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 172 с.
[4] *Жакин А.И.* // УФН. 2006. Т. 176. № 3. С. 289–310.
[5] *Ильин В.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 8. С. 38–48.
[6] *Ильин В.А.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 1. С. 64–73.
[7] *Смородин Б.Л., Тараут А.В.* // ЖЭТФ. 2014. Т. 145. Вып. 1. С. 180–188.
[8] *Traore Ph., Perez A.T., Koulova D., Romat H.* // J. Fluid. Mech. 2010. Vol. 658. P. 279–293.
[9] *Ильин В.А., Мордвинов А.Н., Петров Д.А.* // ЖЭТФ. 2015. Т. 147. Вып. 1. С. 181–188.
[10] *Верещага А.Н.* Унарная электроконвекция в плоском слое. Гидродинамика и процессы тепломассопереноса. Свердловск: УрО АН СССР, 1989. С. 42.
[11] *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. С. 228.