Лондоновский предел для решеточной модели сверхпроводника

© С.А. Ктиторов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
Электротехнический университет,
197376 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ktitorov@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 30 марта 2004 г.)

Изучено влияние дискретности кристаллической решетки на электромагнитные свойства сверхпроводников в лондоновском пределе. В рамках решеточной модели получена зависимость сверхпроводящего тока от модуля параметра порядка; вычислена зависимость критического тока от степени отклонения от континуального приближения.

В течение последнего времени интенсивно исследовалось влияние внешнего магнитного поля на сверхпроводящее состояние вблизи верхнего критического поля для сверхпроводников второго рода. Было в частности показано [1], что сильное магнитное поле делает флуктуации параметра порядка вблизи верхнего критического поля сильными благодаря их квазиодномерности. Неперенормируемость соответствующей теории делает неэффективным применение метода ренормализационной группы. Установлено [2], что нарушение непрерывной трансляционной симметрии кристаллической решеткой восстанавливает перенормируемость теории. При этом кинетический член эффективного действия приобретает форму оператора Харпера, что обеспечивает трехмерный характер флуктуаций в случае соизмеримости магнитного потока через плакет решетки с величиной лондоновского кванта потока. С другой стороны, продвижение в сторону все больших температур сверхпроводящего перехода заставляет разрабатывать новые подходы, позволяющие работать в режиме сильной связи, что наиболее естественно делать на основе решеточных моделей. Важность явного учета дискретности трансляционной симметрии была отмечена уже в пионерской работе Нозье и Шмидт-Ринка, посвященной проблеме сильной связи в теории сверхпроводимости [3]. Представляет интерес исследовать все возможные физические следствия такой формы действия Гинзбурга–Ландау и в более общем плане — ограниченности спектра соответствующего оператора, вытекающего из кристаллической тренсляционной симметрии сверхпроводника. Однако, сложная математическая природа этого оператора делает дальнейшее продвижение весьма затруднительным. Другой важный аспект нашей работы исследование устойчивости сверхпроводящего состояния при наличии тока. В наиболее последовательном виде рассмотрение тока в сверхпроводнике как термодинамической переменной было предпринято в работе [4]. В настоящей работе рассмотрен феноменологический подход к сверхпроводнику сильной связи, аналогичный тому, который известен в теории устойчивости токового состояния, основанной на обычном уравнении Гинзбурга–Ландау в лондоновском пределе [5].

1. Уравнения электродинамики для узкозонного сверхпроводника

Начнем с феноменологического подхода, аналогичного использованному в [5].

Решеточная версия уравнения Гинзбурга–Ландау была выведена из микроскопической теории в работе [6]. Функционал свободной энергии имеет вид

$$F = \int d\mathbf{x}\left[\psi^*(\mathbf{x})\varepsilon\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\right)\psi(\mathbf{x}) + \tau\psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\right] + \frac{g}{2}\int d\mathbf{x}\left[\left(\psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\right)^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}\right], \tag{1}$$

где $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ — магнитная индукция, $\tau = \alpha(T - T_c)/(T_c)$, T_c — температура сверхпроводящего перехода в приближении самосогласованного поля в отсутствие внешнего поля и тока, $\varepsilon\mathbf{p}$ — функция квазиволнового вектора с периодом $(2\pi)/(a_1)$, $(2\pi)/(a_2)$, $(2\pi)/(a_3)$. Операторы ∇ и $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ коммутируют, если выбрать калибровку $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$. Этот функционал можно записать также в представлении Блоха

$$F = \sum_{\mathbf{k}}\left[\varphi^*_{\mathbf{k}}\varepsilon\left(\mathbf{k} - \frac{2e}{\hbar c}\,\mathbf{A}\left(i\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\right)\right)\varphi_{\mathbf{k}} + \tau\varphi^*_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}\right] + \sum_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4=0}\frac{g}{2}\,\varphi^*_{\mathbf{k}_1}\varphi_{\mathbf{k}_2}\varphi^*_{\mathbf{k}_3}\varphi_{\mathbf{k}_4} + \int d\mathbf{x}\,\frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}. \tag{2}$$

Векторы $\mathbf{m}$ нумеруют узлы решетки в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Варьируя (1) по векторному потенциалу $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, получим уравнение Максвелла

$$\frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j} \tag{3}$$

со следующей плотностью тока:

$$\mathbf{j} = \frac{e}{2}\left(\psi^*(\mathbf{x})\,\mathbf{v}\left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\right)\psi(\mathbf{x}) + \psi^*(\mathbf{x})\,\mathbf{v}\left(i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\right)\psi(\mathbf{x})\right), \tag{4}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = (\partial\varepsilon)/(\partial\mathbf{p})$ — групповая скорость волнового пакета параметра порядка. Представим комплексный параметр порядка $\psi(\mathbf{x})$ в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x})\, e^{i\varphi(\mathbf{x})}, \tag{5}$$

где $R^2 = n_s$ — плотность сверхпроводящих электронов. Когда длина когерентности мала по сравнению с глубиной проникновения, τ велико, что эквивалентно присутствию малого параметра в кинетическом члене. Тогда в качестве модуля параметра порядка R можно взять пространственно-однородное решение уравнения (1)

$$\tau(T)\, R_0 = -g\, R_0^3, \tag{6}$$

справедливое почти всюду. Последнее замечание вытекает из того известного факта, что малый параметр перед старшей производной не гарантирует полной пространственной однородности решения: именно благодаря этой „лазейке" существуют вихревые решения в лондоновском пределе. Полагая модуль параметра порядка постоянным, а фазу — медленно меняющейся, приходим к следующему выражению для тока в лондоновском пределе:

$$\mathbf{j} = en_s^0\, \mathbf{v}\left(\nabla\varphi - \frac{2e}{\hbar c}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\right), \tag{7}$$

где $n_s^0 = R_0^2$. Вводя калибровочно-инвариантное векторное поле

$$\mathcal{A} = \mathbf{A} - \frac{\hbar c}{2e}\,\nabla\varphi, \tag{8}$$

можно переписать уравнение Максвелла (3) в следующем виде:

$$\frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathcal{A} = -e\, R_0^2 \mathbf{v}\left(\frac{2e}{\hbar c}\,\mathcal{A}\right). \tag{9}$$

Уравнение (9) может быть легко сведено в континуальном приближении $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}/m$ к стандартному уравнению Лондонов

$$\delta^2\nabla^2\mathbf{A} - \mathbf{A} = 0, \tag{10}$$

где $\delta^2 = (mc^2)/(4\pi e^2 R^2)$ и $m^{-1} = (\Delta a^2)/(\hbar^2)$. Используем уравнение (9) для исследования классической проблемы критического тока с целью выяснения специфических особенностей, возникающих благодаря понижению трансляционной симметрии в кристалле.

2. Критический ток в тонкой пленке

Рассмотрим кристалл с тетрагональной симметрией и кинетическим членом вида $\varepsilon(\mathbf{p})$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta_\perp\left(2 - \cos\frac{p_x a}{\hbar} - \cos\frac{p_y a}{\hbar}\right) + \Delta_\parallel\left(1 - \cos\frac{p_z b}{\hbar}\right). \tag{11}$$

Пусть по пленке толщиной d течет ток $\mathbf{j}$ параллельно оси x. Предположим, что $d \ll \xi(T)$, $d \ll \delta(T)$, где $\xi(T)$ — длина когерентности, что обеспечивает однородность по толщине пленки соответственно параметра порядка R и плотности тока $\mathbf{j}$. Используя уравнения (1), (5), (7) и (8), можно записать следующие условия минимума свободной энергии (пренебрегая влиянием магнитного поля так, как это обычно делается в теории критического тока):

$$j_x = -e\, R^2\, v_x\left(\frac{2e}{\hbar c}\,\mathcal{A}\right), \tag{12}$$

$$\varepsilon_x\left(\frac{2e}{\hbar c}\,\mathcal{A}\right)R + \tau R + gR^3 = 0. \tag{13}$$

Здесь

$$\varepsilon_x(k_x) = \Delta_\perp(1 - \cos k_x a), \tag{14}$$

$$v_x(k_x) = \hbar^{-1}\partial\varepsilon_x(k_x)/(\partial k_x) = (a\Delta_\perp/\hbar)\sin k_x a. \tag{15}$$

Исключая v_x и ε_x из уравнений (14) и (15) с использованием соотношения

$$\varepsilon_x = \Delta_\perp\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\hbar v_x}{a\Delta_\perp}\right)^2}\,\right], \tag{16}$$

получим следующую связь между j_x и R:

$$\Delta_\perp R\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\hbar}{ea\Delta_\perp}\right)^2 \frac{j_x^2}{R^4}}\right) - |\tau|\, R + gR^3 = 0. \tag{17}$$

Введем безразмерные переменные J и f согласно формулам

$$j_x = \frac{ea\Delta_\perp R_0^2}{\hbar}\, J, \tag{18}$$

$$R = f\, R_0. \tag{19}$$

В результате получим

$$1 - \sqrt{1 - \frac{J^2}{f^4}} = k(1 - f^2), \tag{20}$$

где $k = |\tau|/(\Delta_\perp)$. В пределе $\hbar v_x/(a\Delta_\perp) \to 0$, следовательно, $k \to 0$, уравнение (20) переходит в известное

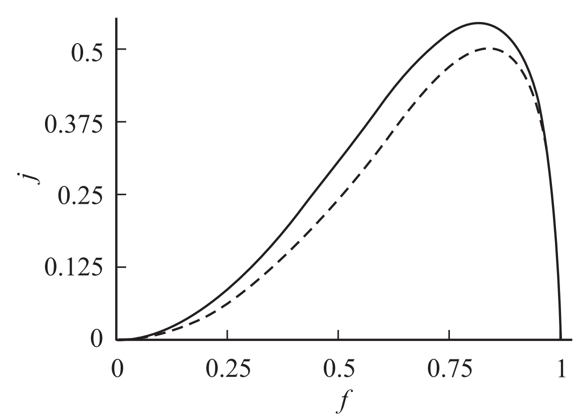

Рис. 1. Зависимость тока от параметра порядка для тонкой пленки. Сплошная линия — континуальный предел; штриховая — случай узкой зоны при $k = 1$. Положение максимума соответствует величине критического тока.

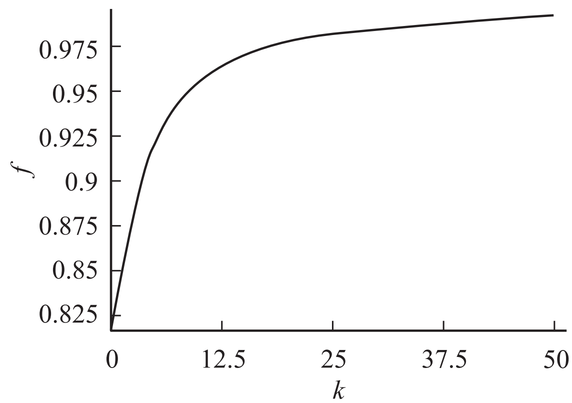

Рис. 2. Положение максимума тока как функция k.

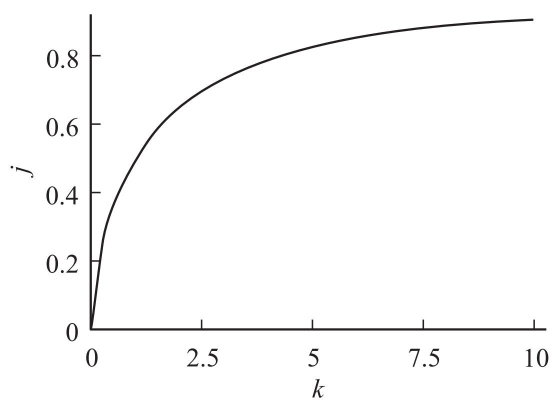

Рис. 3. Величина безразмерного критического тока J_m как функция k.

выражение, справедливое в континуальном приближении [5]

$$J^2 = 2kf^4(1 - f^2). \tag{21}$$

Две кривые зависимости безразмерного тока J от безразмерного параметра порядка f представлены на рис. 1 для случаев $k \to 0$ и $k = 1$. Зависимость положения максимума f_m и J_m от k дана на рис. 2, 3.

3. Проникновение поля

Вернемся к уравнению (9). В случае, когда кинетический член имеет форму (11), можно переписать уравнение (9) в виде

$$\frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathcal{A} = -e\,R_0^2\mathbf{v}\left(\frac{2d}{\hbar c}\,\mathcal{A}\right) \tag{22}$$

или в лондоновской калибровке $\mathrm{div}\,\mathcal{A} = 0$

$$\frac{c}{4\pi}\,\nabla^2\mathcal{A} - eR_0^2\mathbf{v}\left(\frac{2e}{\hbar c}\,\mathcal{A}\right) = 0. \tag{23}$$

Предполагая справедливым закон дисперсии (11), можно переписать уравнение (23) для x-компоненты

$$\nabla^2\mathcal{A}_x - \frac{4\pi e R_0^2 a\Delta}{\hbar c}\sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0}\,\mathcal{A}_x a\right) = 0, \tag{24}$$

где $\Phi_0 = (2\pi\hbar c)/(2e)$ — квант потока Лондона–Онзагера. В пределе слабого поля это уравнение принимает вид (10). Здесь удобно ввести новую переменную

$$\frac{2\pi}{\Phi_0}\,\mathcal{A}_x a = \chi. \tag{25}$$

Тогда (24) принимает вид

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{\delta^2}\sin\chi = 0. \tag{26}$$

Рассмотрим классическую проблему проникновения магнитного поля [5], основываясь на уравнении (24). В одномерном случае оно принимает вид

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}\sin\chi = 0. \tag{27}$$

Это хорошо известное уравнение, отличающееся знаком от уравнения маятника. Одномерное проникновение поля описывается решением следующего вида [7]:

$$\chi = \arcsin\left\{\pm\,\mathrm{cn}\left[-\frac{x - x_0}{\kappa\delta};\,\kappa\right]\right\}, \tag{28}$$

где $\mathrm{cn}\,(x)$ — эллиптический косинус, κ — эллиптический модуль. Отметим близкое математическое сходство с проблемой флюксона в одномерном джозефсоновском контакте.

В заключение отметим, что согласно уравнению (18), критический ток в сверхпроводнике в режиме сильной связи стремится к нулю при стремлении к нулю ширины „разрешенной зоны“ Δ. Однако, при этом можно ожидать проявление сильного „решеточного“ пиннинга вихрей, который будет рассмотрен в следующей работе.

Автор благодарен Е.К. Кудинову, Б.Н. Шалаеву и Ю.И. Кузьмину за полезное обсуждение.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, № 02-02-17667.

Список литературы

[1] E. Brezin, D.R. Nelson, A. Thiaville. Phys. Rev. B **31**, *11*, 7124 (1985).
[2] S.A. Ktitorov, B.N. Shalaev, L. Jastrabik. Phys. Rev. B **49**, *21*, 15 248 (1994).
[3] P. Nozieres, S. Schmitt-Rink. J. Low. Temp. Phys. **59**, 195 (1985).
[4] Е.К. Кудинов. ФТТ **30**, 2594 (1988).
[5] П. де Женн. Сверхпроводимость металлов и сплавов. Мир, М. (1968).
[6] S.A. Ktitorov, V.S. Sherstinov, L. Jastrabik, L. Soukup. In: Weak Superconductivity / Ed. by S. Benachka, P. Seidel, V. Strib. Bratislava (1994). P. 300–305.
[7] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. Мир, М. (1980).