03

Комбинированное энергосиловое воздействие на источник в режиме постоянного числа Маха с заданной внешней силой

© А.Н. Кучеров

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Московская область, Россия
e-mail: ank@aerocentr.msk.su, ank19512006@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 21 апреля 2016 г.)

Изучено комбинированное воздействие на источник, истекающий в затопленное пространство или в вакуум в режиме постоянного числа Маха. Воздействие внешней силой задано с постоянной функцией распределения (сила задана на единицу объема) и с функцией распределения, пропорциональной плотности газа (сила задана на единицу массы). Исследования выполнены для цилиндрического и сферического источников. Проанализированы сходство и различия, преимущества и недостатки вышеперечисленных случаев и вариантов. Показано значительное увеличение энтальпии в дозвуковом потоке (при числе Маха меньше единицы), в цилиндрическом источнике в несколько раз и в сферическом источнике более чем в десять раз. Прирост полной энтальпии увеличивается с ростом протяженности зоны воздействия, с увеличением координаты замыкающего сечения.

DOI: 10.21883/JTF.2017.02.44123.1863

Введение

Возможные режимы течений в источнике, стоке, вихреисточнике, вихрестоке: дозвуковые в затопленное пространство и из затопленного пространства и два сверхзвуковых, в вакуум и из разреженного пространства (из вакуума) [1–3]. В невозмущенном вихреисточнике (стоке) есть минимальный радиус, на котором радиальное число Маха равно единице. От этого сечения начинаются (или в нем заканчиваются) дозвуковая и сверхзвуковая ветви решения, описывающие четыре режима вихреисточника (стока).

Энергоподвод или внешняя сила могут изменить число Маха так, что на расстояниях больше минимального радиуса радиальное число Маха обращается в единицу. Стационарный расход не может выполниться, наступает кризис аналогично тому, как это происходит в строго одномерном потоке с параллельными линиями тока [4,5]. Исследование течений вихреисточника с энергообменом и (или) воздействием внешней силой [6,7] показывает, что достижение радиальным числом Маха значения единица возможно как за счет энергоподвода (нагрева), так и за счет теплоотвода (охлаждения) [8], за счет ускоряющего действия внешней силы [9], или тормозящего (сила направлена против потока).

Проблема управления течением вихреисточника, источника (стока) включает режимы с постоянным числом Маха [10]. Анализ показывает, что раздельное применение энергетического и силового механизмов [6,7] воздействия на источник (сток) газа с расходом m, с интенсивностью энергоподвода $g(r)$ или интенсивностью внешней силы $F(r)$ допускает четыре ситуации поддерживания числа Маха постоянным:

1) $m > 0$, источник, $g(r) > 0$, энергоподвод (нагрев), внешняя сила равна нулю $F(r) = 0$;

2) $m > 0$, источник, $g(r) = 0$, энергоподвода нет, сила $F(r) < 0$, торможение газа;

3) $m < 0$, сток, $g(r) = 0$, без энергообмена, сила $F(r) < 0$, ускорение потока;

4) $m < 0$, сток, $g(r) < 0$, охлаждение (энергоотвод), сила отсутствует $F(r) = 0$.

В ситуациях 1 и 4 температура T, модуль скорости u (направление скорости указывает знак расхода m), полная энтальпия H возрастают с ростом координаты r, плотность ρ и давление p — убывают. В ситуациях 2 и 3 все перечисленные газодинамические величины возрастают с уменьшением координаты.

Комбинированное использование энергоподвода и силового воздействия может расширить возможности управления параметрами источника и вместе с тем усложнить анализ течения, реализацию в эксперименте и приложениях. Комбинированное применение энергоподвода и внешнего силового воздействия в настоящей работе рассматривается для источника ($m > 0$), с постоянным распределением внешней силы $F(r) = \mathrm{const}$ (заданным на единицу объема) или пропорциональным плотности газа $F(r) = \mathrm{const} \times \rho(r)$ (заданным на единицу массы). Распределение энергоподвода $g(r)$ подбирается из условия постоянства числа Маха. Рассмотрим цилиндрический и сферический источники. Особое внимание уделим изменениям полной энтальпии вследствие воздействия силой и энергоподводом, рассмотрим также ориентировочную границу (по параметрам подобия) уменьшения энтальпии до нуля. Исследуем зависимости основных характеристик от параметров подобия.

1. Постановка задачи

В общем случае управление источником описывается системой безразмерных уравнений сохранения массы, импульса, энергии (1)–(3) и уравнением состояния газа (5) [8–10]:

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dr} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr} + \frac{n}{r} + 0,$$

$$r^n \rho u = m \equiv \frac{m_0}{2^n \pi \rho_0 u_0 r_0^n}, \tag{1}$$

$$u\frac{du}{dr} + \frac{\gamma-1}{2\gamma\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{F(r)}{2\rho},$$

$$F(r) = \begin{cases} \rho F_Q f_Q(r) \\ F_E f_E(r) \end{cases}, F_E = \frac{\varphi_{0E} r_0}{2^n \pi \rho_0 h_0}, F_Q = \frac{\varphi_{0Q} r_0}{2^n \pi h_0}, \tag{2}$$

$$\frac{dT}{dr} - \frac{\gamma-1}{\gamma\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{g(r)}{\rho u},$$

$$g(r) = \begin{cases} E g_E(r) \\ \rho(r) Q g_Q(r) \end{cases}, E = \frac{g_{0E} r_0}{2^n \pi \rho_0 u_0 h_0}, Q = \frac{g_{0Q} r_0}{2^n \pi u_0 h_0}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} f_Q(r) dr = 1, \quad \int\limits_{r_1}^{r_2} g_E(r) r^n dr = 1, \tag{4}$$

$$p = \rho T. \tag{5}$$

В уравнениях (1)–(5) показатель степени равен $n = 1$ или 2 для цилиндрического или сферического источника, m_0 — размерный физический расход, m — соответствующий безразмерный расход, r_1, r_2 — начало и конец зоны воздействия. Характерные величины следующие: минимальный радиус r_0, на котором в невозмущенном источнике радиальное число Маха равно единице, $M_r(r_0) = 1$, давление p_0, температура T_0, энтальпия $h_0 = C_p T_0$, (C_p — теплоемкость при постоянном давлении), плотность ρ_0 — в затопленном пространстве, скорость $u_0 = \sqrt{(2h_0)}$. Параметры подобия: показатель адиабаты γ, силовые параметры F_E, F_Q, которые описываются физическими удельными величинами силы $\varphi_{0E}, \varphi_{0Q}$, заданными в единицу объема, N/m^3 или на единицу массы, N/kg (приняли $\varphi_{0E} = \rho_0 \varphi_{0Q}$). Энергоподвод и энергетические параметры подобия E, Q задаются удельными величинами энерговыделения g_{0E}, g_{0Q} в единицу объема, W/m^3 или на единицу массы, W/kg (приняли $g_{0E} = \rho_0 g_{0Q}$). В настоящей работе энегоподвод $g(r)$ подбирается таким образом, чтобы число Маха M_r внутри зоны сохраняло свое значение, равное значению на входе $M_r = M_{r1} = \text{const}$.

Нормировочные интегралы (4) безразмерных функций распределения $f_Q(r)$, $f_E(r)$, $g_E(r)$, $g_Q(r)$ берутся при необходимости по модулю. В общем случае нормировку функций $g_Q(r)$, $f_E(r)$ можно делать без функции плотности $\rho(r)$ под знаком интеграла, как функций $g_E(r)$, $f_Q(r)$. Результат — изменение энтальпии — можно пересчитывать с учетом найденной плотности $\rho(r)$ так, чтобы силовые и энергетические параметры количественно совпадали с изменением полной энтальпии $\Delta H = H_2 - H_1$ или потока полной энтальпии $m\Delta H$. Уравнение для полной энтальпии $H = T + u^2$ следует из уравнений (2), (3):

$$\frac{dH}{dr} = \frac{g(r)}{\rho u} + \frac{F(r)}{\rho}. \tag{6}$$

Исследуем ситуации, в которых направление течения совпадает с направлением координаты r. Энергоподвод $g(r)$ и внешняя сила $F(r)$ могут быть и положительными и отрицательными. Силу $F(r)$ будем задавать, энергоподвод „сформируем“, используя безразмерное уравнение для числа Маха, так, чтобы получить постоянное значение M_r, равное M_{r1} на входе в зону воздействия (здесь и далее нижний индекс „1“ означает „на входе“, „2“ — „на выходе“):

$$\frac{1-M_{r1}^2}{M_{r1}}\frac{dM_r}{dr} = -n\frac{1+M_{r1}^2(\gamma-1)/2}{r} + \frac{(\gamma M_{r1}^2+1)g(r)}{2pu} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{F(r)}{2p} = 0. \tag{7}$$

Для искомой функции распределения силы $g(r)$ отсюда следует

$$\frac{g(r)}{\rho u} = \frac{nT(r)}{D_1 r T_1} + \frac{F(r)}{s D_1 \rho(r)},$$

$$s = 2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \frac{1}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{r1}^2, \quad D_1 = \frac{\gamma M_{r1}^2 + 1}{2}. \tag{8}$$

Условие постоянного числа Маха дает и связь температуры $T(r)$ со скоростью $u(r)$

$$\frac{2u^2(r)}{(\gamma-1)T(r)} = M_{r1}^2, \quad T(r) = \frac{2u^2(r)}{(\gamma-1)M_{r1}^2}. \tag{9}$$

С учетом (9) и начального условия $H_1 = 1 = T_1 + u_1^2 = T_1[1 + (\gamma-1)M_{r1}^2/2] = u_1^2[1 + 2/(\gamma-1)M_{r1}^2]$ интеграл безразмерного уравнения (6) сохранения полной энтальпии $H = T + u^2$ есть

$$H = T + u^2 = T(r)\left[1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{r1}^2\right] = \frac{T(r)}{T_1} = \frac{u^2(r)}{u_1^2} = 1 + \int\limits_{r_1}^{r}\left[\frac{g(r)}{\rho u} + \frac{F(r)}{\rho}\right] dr. \tag{10}$$

В левой части уравнения (10) — полезные связи функций $H, T, u(r)$. Далее из (6) получим решения, описывающие управление источником в режиме постоянного числа Маха.

2. Комбинированное воздействие при заданных функциях распределения внешней силы $f_Q(r) = \text{const}$, $f_E(r) = \text{const}$. Уравнения и решения

Примем функцию распределения внешней силы $F(r)$ в виде

$$F(r) = \begin{cases} F_E C_{FE} \\ \rho(r) F_Q C_{FQ} \end{cases}, C_{FE} = \frac{1}{r_2 - r_1} = C_{FQ},$$

$$f_E(r) = C_{FE}, \quad f_Q(r) = C_{FQ}. \tag{11}$$

Тогда при поддерживании числа Маха M_{r1} постоянным, согласно (7), (8), функция энергоподвода имеет следующий вид:

$$\frac{g(r)}{\rho u} = \frac{nT}{D_1 T_1 r} + \frac{1}{sD_1} \begin{cases} F_E C_{FE}/\rho(r) \\ F_Q C_{FQ}. \end{cases} \tag{12}$$

2.1. Сила задана на единицу массы, F_Q-вариант

Подстановка выражений (11), (12) в уравнение (6) дает уравнение и решение

$$\frac{dH}{dx} = \alpha_{2n} \frac{H(x)}{x} + \alpha_{01}, \quad x = \frac{r}{r_1},$$

$$\alpha_{01} = F_Q C_{FQ} r_1 s_2, \quad \alpha_{2n} = \frac{n}{D_1}, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{sD_1}, \tag{13}$$

$$H = (1 - \alpha_{1n}) \left(\frac{r}{r_1}\right)^{n/D_1} + \alpha_{1n} \frac{r}{r_1},$$

$$\alpha_{1n} = \frac{\alpha_{01}}{1 - n/D_1}. \tag{14}$$

2.2. Сила задана в единицу объема, F_E-вариант

Уравнение (6) после подстановки $F(r), g(r)$ из (11), (12) имеет вид (15), решение (16):

$$\frac{dZ}{dx} = \beta_{2n} \frac{Z(x)}{x} + \beta_{0n} x^n,$$

$$\beta_{0n} = \frac{F_E C_{FE} u_1 r_1^{n+1} s_2}{2m}, \quad \beta_{2n} = \frac{n}{2D_1}, \tag{15}$$

$$Z = \frac{u(r)}{u_1} = (1 - \beta_{1n}) \left(\frac{r}{r_1}\right)^{n/2D_1} + \beta_{1n} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{n+1},$$

$$\beta_{1n} = \frac{\beta_{0n}}{n + 1 - n/2D_1}. \tag{16}$$

Все искомые газодинамические функции связаны между собой благодаря условию постоянного числа Маха $M_r = M_{r1} = \text{const}$ и исходным уравнениям сохранения и состояния газа (1)–(5) (см. также левую часть (10))

$$H(r) = \frac{T}{T_1} = \left(\frac{u(r)}{u_1}\right)^2, \quad \frac{\rho(r)}{\rho_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-n} \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-1/2},$$

$$\frac{p(r)}{p_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-n} \left(\frac{T}{T_1}\right)^{1/2}. \tag{17}$$

При анализе решений внимание обратим, прежде всего, на различия вариантов $n = 1$ и 2, цилиндрический и сферический источники, F_E и F_Q-вариантов (сила задана в единицу объема и на единицу массы).

3. Результаты

3.1. Распределения газодинамических величин внутри зоны энергосилового воздействия

На рис. 1, *a* приведены распределения полной энтальпии $H(r)$ в зоне воздействия при $M_{r1} = 1.5$, в цилиндрическом источнике ($n = 1$) для трех вариантов со значениями силового параметра $F_Q = 0$ (*1*), 0.52 (*2*), -0.52 (*3*). В последнем случае в замыкающем сечении полная энтальпия $H_2 = H(r_2 = 3)$ близка к нулю.

Кривая *1* ($F_Q = 0$) соответствует чисто энергетическому варианту поддерживания числа Маха постоянным $M_{r1} = \text{const}$ внутри зоны $[r_1, r_2]$ за счет подбора функции энергоподвода $g(r)$ согласно (7), (8):

$$g(r) = \frac{nmT(r)}{D_1 T_1 r^{n+1}} = \frac{mn}{D_1 r_1^{n+1}} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{n/D_1 - n - 1}, \tag{18}$$

$$\frac{T(r)}{T_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{n/D_1} = H = \frac{u^2}{u_1^2}, \quad \frac{\rho(r)}{\rho_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-n-n/2D_1},$$

$$\frac{p(r)}{p_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{n/2D_1 - n}. \tag{19}$$

Назовем его базовым. На рис. 1, *b* построены распределения внешней силы $F(r)$, кривые *1–3* и функции энергоподвода $g(r)$, кривые *4–6* при значениях силового параметра $F_Q = 0$ (*1*), 0.52 (*2*), -0.52 (*3*). Вариант с отрицательным силовым параметром $F_Q = -0.52$ (торможение) отличается тем, что в этом случае и энергоподвод (кривая *6*) является отрицательным (т. е. происходит энергоотвод, охлаждение). Этот факт является следствием выбора функции энергообмена $g(r)$ из условия $M_{r1} = \text{const}$.

При равном по модулю силовом параметре $F_Q = 0.52$ полная энтальпия в конце зоны комбинированного энергосилового воздействия увеличилась более чем в 3 раза. Энергоподвод $g(r)$, кривая *5*, по всей зоне положительный, как и в базовом варианте, кривая *4*.

Аналогичный анализ выполнен для варианта сферического источника ($n = 2$) при $F_Q = 0, 0.69, -0.69$; последний вариант соответствует энтальпии $H_2 = H(r_2 = 3)$, близкой к нулю (рис. 2, *c*, кривая 2). Значение полной

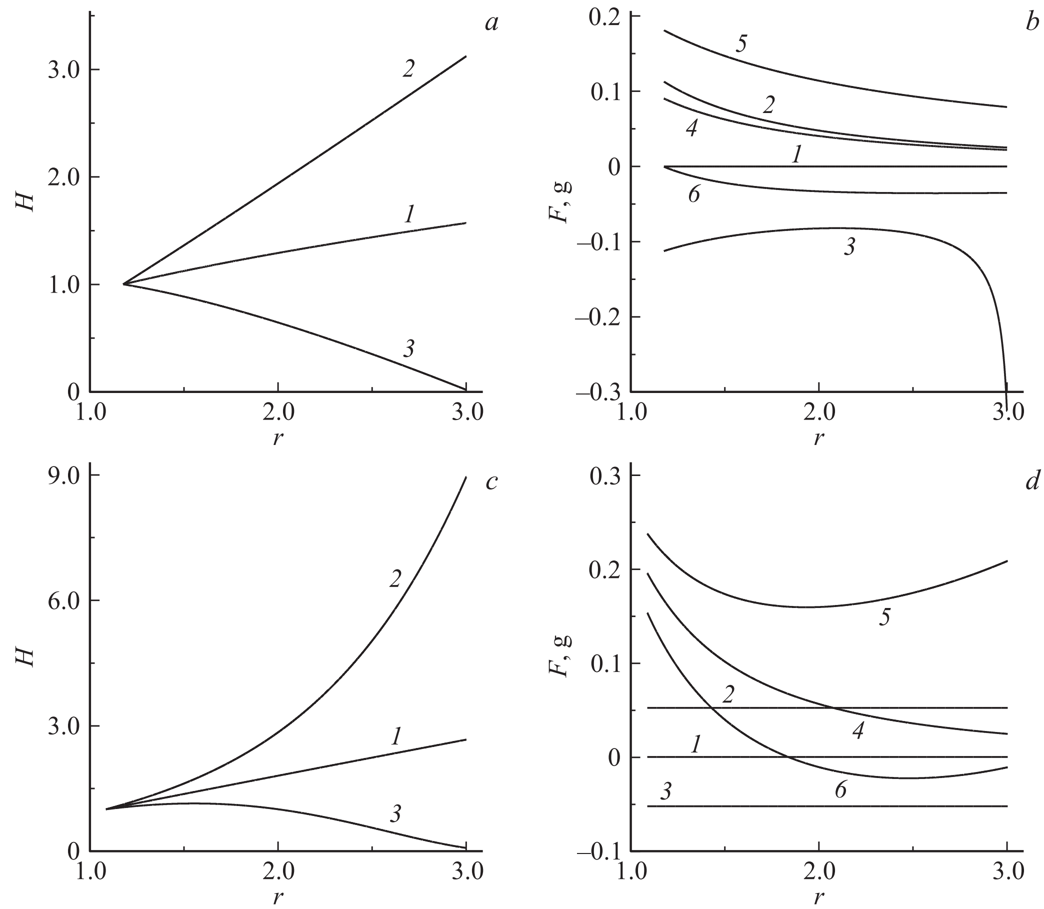

Рис. 1. *a* — полная энтальпия $H(r)$ в цилиндрическом источнике $(n = 1)$ с числом Маха $M_{r1} = 1.5$ при комбинированном воздействии: *1* — $F_Q = 0$, *2* — 0.52, *3* — -0.52; $r_2 = 3$; *b* — внешняя сила $F(r) = \rho(r)F_QC_Q$, кривые *1–3* ($F_Q = 0$, 0.52, -0.52); энергоподвод $g(r)$, кривые *4–6* ($F_Q = 0$, 0.52, -0.52); *c* — сферический источник $(n = 2)$, полная энтальпия $H(r)$: *1* — $F_E = 0$, *2* — 0.1, *3* — -0.1; $r_2 = 3$, $M_{r1} = 1.5$; *d* — $F(r) = F_EC_E$, кривые *1–3* ($F_E = 0$, 0.1, -0.1); $g(r)$, кривые *4–6* ($F_E = 0$, 0.1, -0.1).

энтальпии в варианте $F_Q = 0.69$ в конце зоны воздействия превысило первоначальное значение более чем в 5 раз. Функция энергоподвода $g(r)$ положительная, кривая *5*, как и в базовом варианте, кривая *4*. В варианте $F_Q = -0.69$ функция энергоподвода $g(r)$ на завершающем участке, протяженностью около двух третей от полной длины зоны, отрицательная (охлаждение). Функция распределения внешней силы $F(r)$ при отрицательных значениях силового параметра F_Q, как в цилиндрическом источнике $(n = 1)$, так и в сферическом $(n = 2)$ имеет максимум во второй половине зоны и минимумы в начале и в конце (рис. 1, *b*).

На рис. 1, *c*, *d* рассматриваются ситуации с заданными значениями силового параметра $F_E = 0$ (кривая *1*), 0.1 (*2*), -0.1 (*3*) для сферического источника и обсуждаются варианты при $F_E = 0$, 0.2, -0.2 для цилиндрического источника. В последнем случае при $F_E = -0.2$ полная энтальпия в конце зоны $H_2 = H(r_2 = 3)$ близка к нулю; в сферическом источнике, как видим на рис. 1, *c*, при $F_E = -0.1$ полная энтальпия H_2 также близка к нулю.

Увеличение энтальпии H_2 в конце зоны при $F_E = 0.1$ почти девятикратное в сферическом источнике (рис. 1, *c*, кривая *2*) и шестикратное в цилиндрическом источнике.

Сопоставление распределений внешней силы $F(r)$ для отрицательных значений силового параметра ($F_E = -0.1$; $F(r), g(r)$ — кривые *3, 6* на рис. 1, *d*) в случаях сферического $(n = 2)$ и цилиндрического источника ($n = 1$, $F_E = -0.2$, графики $F(r), g(r)$ аналогичны кривым *3, 6* на рис. 1, *b*) показало, что, как и в F_Q-вариантах, функция энергоподвода $g(r)$ полностью отрицательна (охлаждение) в цилиндрическом источнике и отрицательна во второй половине зоны в сферическом источнике (кривая *6*, рис. 1, *d*).

Строго говоря, предел значений силового параметра F_{Q0} или F_{E0}, при котором энтальпия в замыкающем сечении обращается в нуль, составляет согласно решениям $H(r_2) = 0$:

$$F_{Q0} = \frac{1}{(1 - 1/A_1)A_0},\ A_0 = \frac{C_Q s_2 r_1}{1 - n/D_1},\ A_1 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n/D_1 - 1}, \tag{20}$$

$$F_{E0} = \frac{1}{(1 - 1/B_1)B_0}, \quad B_0 = \frac{C_E s_2 u_1 r_1^{n+1}}{n + 1 - n/2D_1},$$

$$B_1 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n/2D_1 - 1 - n}. \tag{21}$$

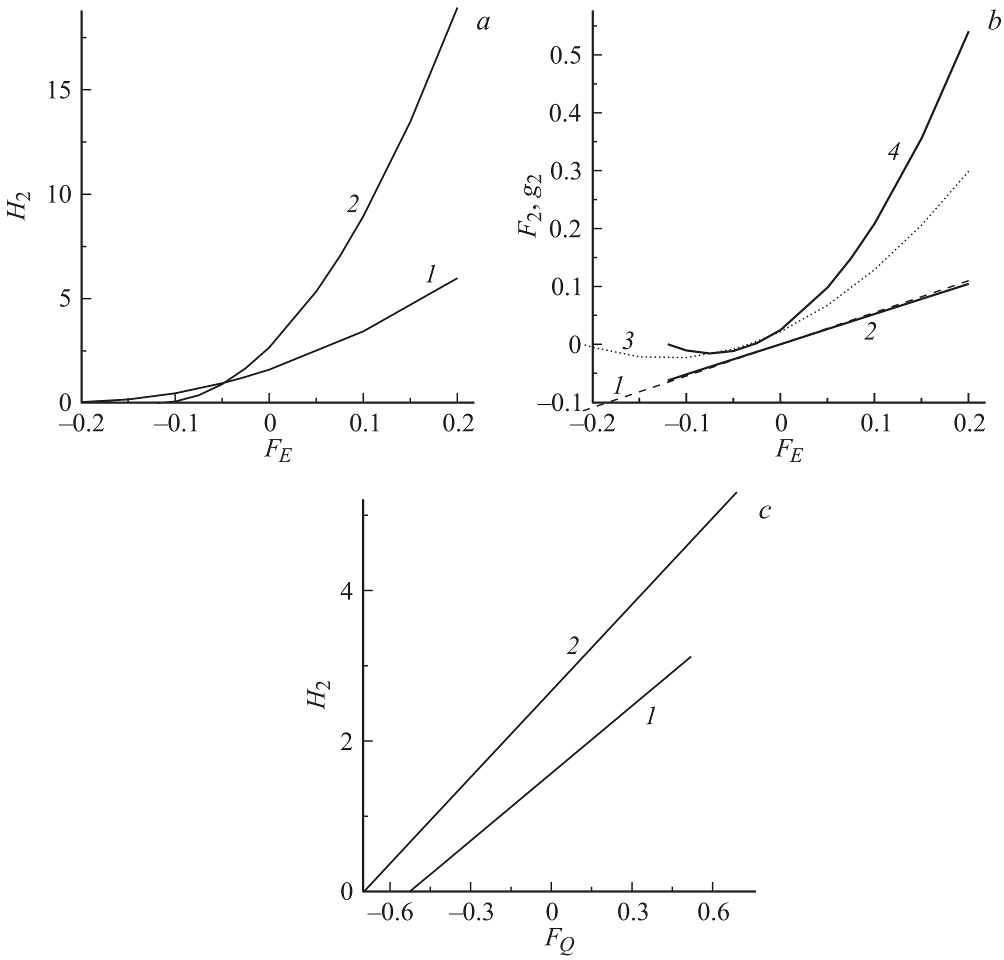

Рис. 2. *a* — энтальпия $H_2 = H(r_2)$ как функция силового параметра F_E в конце зоны $r_2 = 3$, $M_{r1} = 1.5$: *1* — цилиндрический источник, $n = 1$, *2* — сферический, $n = 2$; *b* — внешняя сила $F_2 = F(r_2) = F_E C_{FE}$ как функция силового параметра F_E, кривые *1, 2* ($n = 1$ и 2); энергоподвод $g_2 = g(r_2)$, кривые *3, 4* ($n = 1$ и 2); *c* — энтальпия H_2 как функция силового параметра F_Q, кривые *1, 2* ($n = 1$ и 2).

Для примеров, рассмотренных выше, значения силового параметра F_{Q0} составили $F_{Q0} \approx 0.5261$ $(n = 1)$, -0.6967 $(n = 2)$, силового параметра $F_{E0} \approx -0.2101$ $(n = 1)$, -0.1200 $(n = 2)$.

При некоторых достаточно малых значениях температуры газа T_2 модель совершенного газа несправедлива, например, для воздуха, рассматриваемого как смесь азота и кислорода (температура перехода в жидкое состояние 70 и 90 K) [11–13]. Аналогично при достаточно больших температурах, например для воздуха свыше 1000 K, модель совершенного газа требует поправок, в первую очередь, для теплоемкости.

3.2. Полная энтальпия H_2 за зоной как функция силового параметра F_Q, F_E

Итоговые изменения полной энтальпии к концу зоны $H_2 = H(r_2)$ сопоставим при различных значениях силовых параметров F_Q, F_E.

На рис. 2, *a* собраны зависимости полной энтальпии $H_2 = H(r_2)$ в конце зоны от силового параметра F_E в диапазоне $(-0.2, 0.2)$ для цилиндрического источника, кривая *1*, $n = 1$, и для сферического источника, кривая *2*, $n = 2$. Такие изменения энтальпии H_2 обусловлены внешней силой $F(r)$ ($F_2 = F(r_2)$, кривые *1, 2* на рис. 2, *b* как функции от силового параметра F_E) и энергоподводом $g(r)$ (кривые *3, 4*, $g_2 = g(r_2)$). Отметим, что функции распределения внешней силы $F(r)$ совпадают, с небольшим отклонением, на общем интервале значений силового параметра $F_2 = F(r_2)$ в диапазоне F_E от -0.12 до 0.2 (см. кривые *1, 2*) для цилиндрического и сферического источников. Функции энегоподвода $g_2 = g(r_2)$ в конце зоны при изменении силового параметра от значений -0.075 до 0 также близки при $n = 1$ и 2 (цилиндрический источник, кривая *3*; сферический источник, кривая *4*). С ростом F_E, например до значений 0.1, 0.2, величина g_2 для сферического источника проходит заметно выше, чем для цилиндрического в режиме постоянного числа Маха $M_{r1} = \text{const}$ $(= M_{r1} = 1.5$ в данном случае).

На рис. 2, *c* приведены зависимости энтальпии H_2 от силового параметра F_Q, аналогичные зависимостям

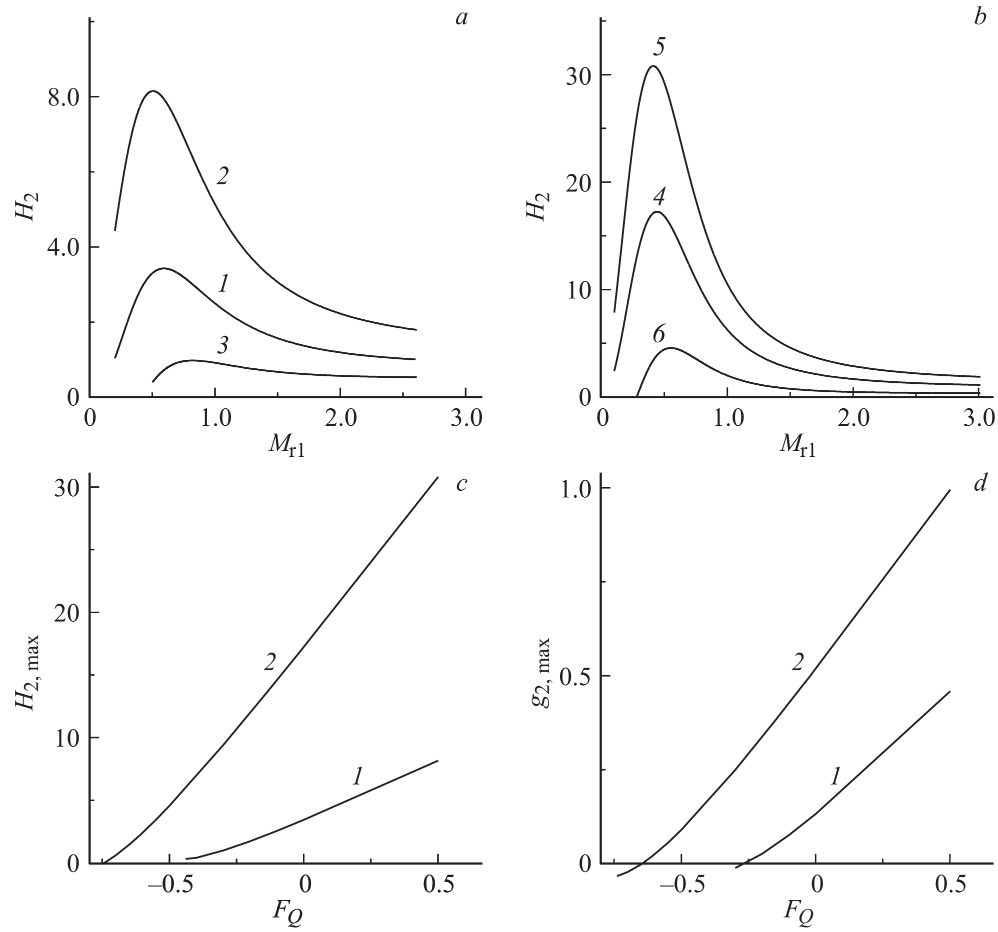

Рис. 3. a — энтальпия на выходе H_2 как функция числа Маха на входе M_{r1}: *1* — $F_Q = 0$, *2* — 0.5, *3* — -0.3, цилиндрический источник $n = 1$, замыкающая координата $r_2 = 3$; b — энтальпия H_2 как функция M_{r1}: *4* — $F_Q = 0$, *5* — 0.5, *6* — -0.5, сферический источник $n = 2$, $r_2 = 3$; c — максимумы по M_{r1} полной энтальпии $H_{2,\max}$ как функции силового параметра F_Q: *1* — $n = 1$, *2* — $n = 2$; d — энергоподвод $g_{2,\max} = g(r_2, M_{r1,\max})$ как функции F_Q, *1* — $n = 1$, *2* — $n = 2$.

$H_2(F_E)$, приведенным на рис. 2, a. Если в F_E-варианте как в цилиндрическом, так и в сферическом случае зависимости $H_2(F_E)$ слегка вогнуты (выпуклостью вниз), то в F_Q-варианте зависимости $H_2(F_Q)$ близки к линейным при $n = 1$ и 2.

В F_Q-варианте получили близкое к нулевому значение $H_2(F_Q) \approx 0$ при $F_{Q0} = -0.6967$ в сферическом источнике. Это значение больше, чем $F_{Q0} = -0.5261$ в цилиндрическом источнике.

В противоположность этому в F_E-варианте нашли $F_{E0} = -0.1200$ в сферическом источнике. Это значение меньше, чем $F_{E0} = -0.2101$ в цилиндрическом случае.

3.3. Зависимость энтальпии H_2 в конце зоны от числа Маха M_{r1}, F_Q-вариант

Зафиксируем координату замыкающего сечения r_2 и будем варьировать число Маха на входе в зону M_{r1}. Заметим, что координата r_1 входа в зону связана с числом Маха M_{r1} (и температурой T_1 или любой другой газодинамической величиной $\rho_1, p_1, u_1 \ldots$ на входе). Каждому сечению r_1 соответствуют два значения M_{r1} $(T_1, \rho_1, \ldots)$: дозвуковое $M_{r1} < 1$ и сверхзвуковое $M_{r1} > 1$. Приведенная выше постановка задачи допускает сколько угодно близкие значения к $M_{r1} = 1$ сверху $(M_{r1} > 1)$ или снизу $(M_{r1} < 1)$, исключая строго единичное значение M_{r1}. Итоговые изменения полной энтальпии H_2 к концу зоны сопоставим при различных значениях силовых параметров F_Q (рис. 3) и F_E (рис. 4).

На рис. 3, a приведены зависимости $H_2(M_{r1})$ при силовом параметре $F_Q = 0$, 0.5, -0.3, кривые *1–3* для цилиндрического источника; на рис. 3, b — для сферического источника при силовом параметре $F_Q = 0$, 0.5, -0.5, кривые *4–6*. На всех кривых есть локальные максимумы по M_{r1}: $H_{2,\max} = 3.427$, 8.146, 0.976 при $M_{r1,\max} = 0.593$, 0.506, 0.822 (рис. 3, a, кривые *1–3*, $n = 1$), $H_{2,\max} = 17.234$, 30.796, 4.522 при $M_{r1,\max} = 0.441$, 0.411, 0.551 (рис. 3, b, кривые *4–6*, $n = 2$). При неотрицательном силовом параметре $F_Q \geq 0$ в цилиндрическом источнике увеличение энтальпии в точке максимума составило от 3.427 до 8.146. В сферическом источнике увеличение энтальпии в приведенных примерах составило, исключая отрицательные значения силового параметра F_Q, от 17.2 до 30.8. Соответствую-

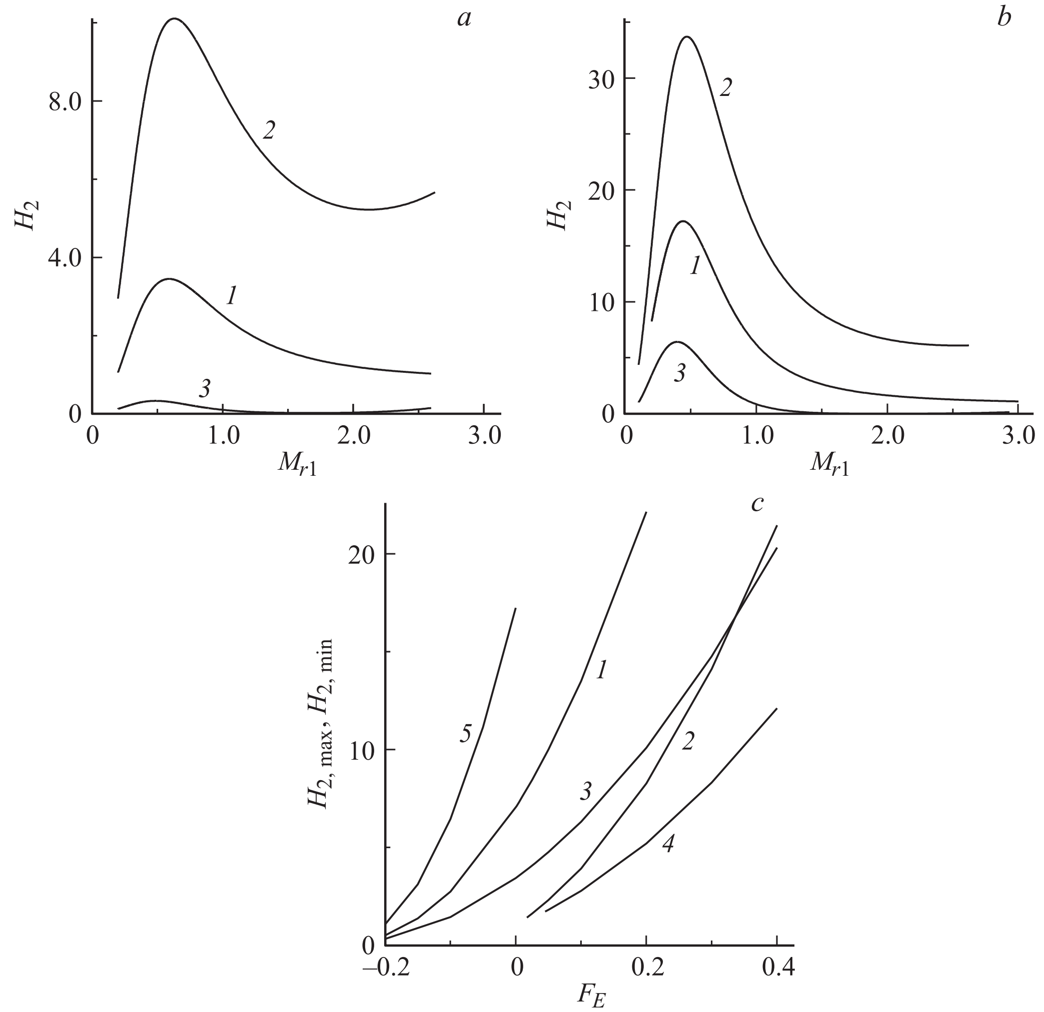

Рис. 4. *a* — полная энтальпия H_2 на выходе $r_2 = 3$, в цилиндрическом источнике $n = 1$ как функция числа Маха M_{r1}. *1* — силовой параметр $F_E = 0$, *2* — 0.2, *3* — -0.2; *b* — энтальпия $H_2(M_{r1};\, r_2 = 3)$, сферический источник, $n = 2$: *1* — $F_E = 0$, *2* — 0.1, *3* — -0.1; *c* — максимальные и минимальные значения энтальпии в зависимости от F_E: *1* — $H_{2,\max}$, *2* — $H_{2,\min}$, $r_2 = 5$, *3* — $H_{2,\max}$, *4* — $H_{2,\min}$, $r_2 = 3$, $n = 1$; *5* — $H_{2,\max}$, $r_2 = 3$, $n = 2$.

щие значения чисел Маха укладываются в узкий дозвуковой диапазон $M_{r1,\max} = 0.506{-}0.593$ (рис. 3, *a*, $n = 1$) и $M_{r1,\max} = 0.411{-}0.441$ (рис. 3, *b*, $n = 2$).

На рис. 3, *c* построены зависимости максимальной энтальпии $H_{2,\max}$ от силового параметра F_Q для цилиндрического источника (кривая *1*) и сферического источника (кривая *2*). В последнем случае значения $H_{2,\max}$ существенно больше. Зависимости $H_{2,\max}(F_Q; M_{r1,\max})$ близки к линейным. На рис. 3, *d* приведены функции энергоподвода $g_{2,\max}(F_Q; M_{r1,\max})$ в конце зоны, в точке максимума по M_{r1}, в зависимости от силового параметра F_Q. Отметим, что из трех параметров (замыкающая координата r_2, число Маха $M_{r1,\max}$, силовой параметр F_Q), определяющих увеличение энтальпии H_2, число Маха $M_{r1,\max}$ представляется наиболее интересным и важным, поскольку силовой параметр и замыкающая координата с увеличением значения дают монотонный рост энтальпии, а вариации числа Маха — локальный сильно выраженный максимум.

3.4. Зависимость энтальпии H_2 в конце зоны от числа Маха M_{r1}, F_E-вариант

На рис. 4, *a, b* представлены зависимости полной энтальпии $H_2(M_{r1})$ при трех значениях силового параметра $F_E = 0$ (кривые *1*), 0.2 (*2*), -0.2 (*3*) в цилиндрическом источнике и $F_E = 0$ (*1*), 0.1 (*2*), -0.1 (*3*) в сферическом. В отличие от аналогичных зависимостей $H_2(M_{r1})$, построенных при различных F_Q на рис. 3, *a, b*, в рассматриваемом F_E-варианте при достаточно больших значениях силового параметра F_E и значениях замыкающей зону координаты r_2, кроме вышеупомянутого максимума $H_{2,\max}(F_E; M_{r1,\max})$, в сверхзвуковой области имеются минимумы $H_{2,\min}(F_E; M_{r1,\min})$ (рис. 4, *a*, кривая *2*), $H_{2,\min} = 5.20$ при $M_{r1,\min} = 2.12$, $F_E = 0.2$, $r_2 = 3$.

На рис. 4, *c* показаны в зависимости от силового параметра F_E максимальные энтальпии $H_{2,\max}$ — кривая *1*, минимальные $H_{2,\min}$ — *2*, $r_2 = 5$, $n = 1$, а также

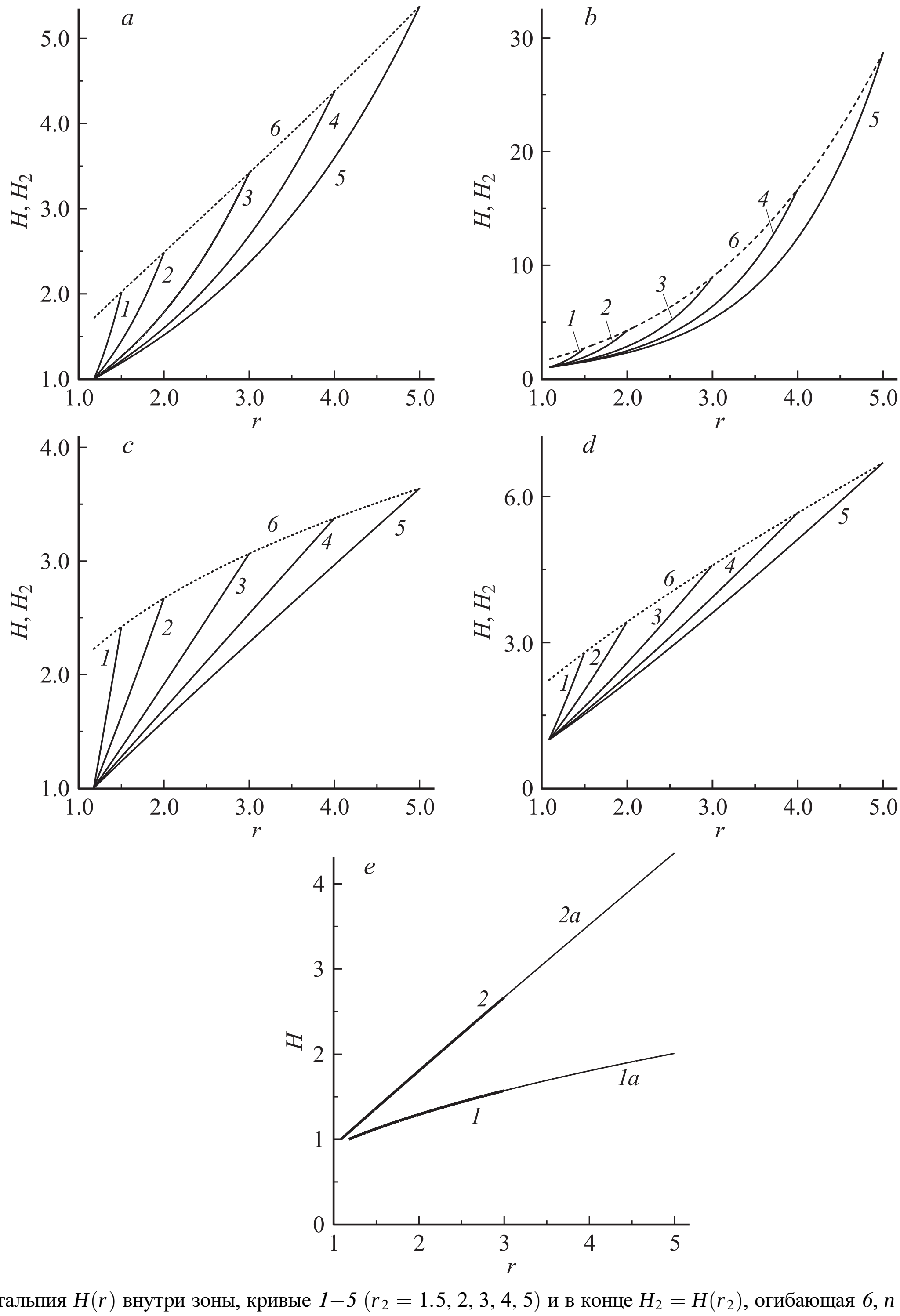

Рис. 5. *a* — энтальпия $H(r)$ внутри зоны, кривые *1–5* ($r_2 = 1.5$, 2, 3, 4, 5) и в конце $H_2 = H(r_2)$, огибающая *6*, $n = 1$, число Маха $M_{r1} = 1.5$, силовой параметр $F_E = 0.1$; *b* — то же самое при $n = 2$, $M_{r1} = 1.5$, $F_E = 0.1$; *c* — то же самое при $n = 1$, $M_{r1} = 1.5$, $F_Q = 0.5$; *d* — при $n = 2$, $M_{r1} = 1.5$, $F_Q = 0.5$; *e* — $F_Q = 0 = F_E$, $n = 1$: *1* — $r_2 = 3$, *1a* — 5, $n = 2$, *2* — $r_2 = 3$, *2a* — 5.

$H_{2,\max}$ — *3*, $H_{2,\min}$ — *4*, $r_2 = 3$, $n = 1$, цилиндрический источник, $H_{2,\max}$ — *5*, $r_2 = 3$, $n = 2$, сферический. В сферическом источнике минимумы по числам Маха M_{r1} не обнаружены. Соответствующая максимумам кривая *5*, $H_{2,\max}(F_E, M_{r1,\max}, r_2 = 3)$, $n = 2$ нарастает с увеличением F_E быстрее кривых *1* и *3* ($r_2 = 5$, 3; $n = 1$).

Если сопоставить рост максимальных энтальпий $H_{2,\max}(F_E, r_2 = 3)$ с увеличением силового параметра F_E, кривые *3* и *5* на рис. 4, *c*, с аналогичными зависимостями $H_{2,\max}(F_Q, r_2 = 3)$ от силового параметра F_Q, показанными на рис. 3, *c*, заметим, что при $F_Q = 0.5$ величина $H_{2,\max}$ составила 8.146 ($n = 1$) и 30.79

$(n = 2)$. При $F_E = 0.2$ получили $H_{2,\max} \approx 10.08$ $(n = 1)$ и 56.07 $(n = 2)$. При этом в F_E-варианте сила равна $F_{2,\max} = 0.1082$ $(n = 1)$, 0.1089 $(n = 2)$. В F_Q-варианте сила равна $F_{2,\max} = 0.04094$ $(n = 1)$, 0.00817 $(n = 2)$.

Зависимости значений внешней силы $F_{2,\max}$, соответствующей максимумам, от силового параметра F_E для цилиндрического и сферического источников практически не различаются в диапазоне $[-0.2, 0.2]$ и близки к линейным.

Сопоставление величин энергоподвода $g_{2,\max}$ (не приведены), соответствующих максимумам, от силового параметра F_E показало отличие от соответствующих зависимостей $g_{2,\max}(F_Q)$ (рис. 3,d, кривые *1, 2*) слабым нарастанием темпа увеличения с ростом F_E, в то время как зависимости $g_{2,\max}(F_Q)$ близки к линейным. Зависимости $g_{2,\max}(F_E)$ нарастают круче, например, при $n = 2$ величина $g_{2,\max}(F_E = 0.2) = 2.39$, а $g_{2,\max}(F_Q = 0.5) = 0.994$; при $n = 1$ $g_{2,\max}(F_E = 0.2) = 0.731$, а $g_{2,\max}(F_Q = 0.5) = 0.459$.

3.5. Зависимость энтальпии H_2 от величины замыкающей координаты r_2

Величина замыкающей зону координаты r_2 (или протяженность зоны) уже упоминалась среди факторов, влияющих на приращение энтальпии H_2 вследствие комбинированного энергосилового воздействия.

На рис. 5,a $(n = 1)$ построены распределения энтальпии $H(r)$ внутри зоны, кривые *1–5* $(r_2 = 1.5, 2, 3, 4, 5)$ при $M_{r1} = 1.5$, $F_E = 0.1$. Огибающая *6*, которая описывает энтальпию в конце зоны $H_2 = H(r_2)$, близка к линейной функции. Увеличение энтальпии H_2 при $r_2 = 3$ составило 3.42 по сравнению с начальным значением $H_1 = 1$; при $r_2 = 5$ — величина $H_2 = 5.37$.

В сферическом источнике ($n = 2$, рис. 5,b) при силовом параметре $F_E = 0.1$, числе Маха $M_{r1} = 1.5$ и замыкающей зону координате $r_2 \geq 3$ установлено увеличение энтальпии H_2 более чем на порядок по сравнению с начальным значением. Огибающая *6* вогнутая (выпуклостью вниз), что означает увеличение темпа прироста энтальпии H_2 с ростом r_2.

На рис. 5,c,d рассматриваются F_Q-варианты при $F_Q = 0.5$, $M_{r1} = 1.5$, $n = 1$ (рис. 5,c) и $n = 2$ (рис. 5,d). Зависимости для распределений энтальпии $H(r)$ внутри зоны воздействия близки к линейным. Огибающая H_2 (кривая *6*) выпуклая как в цилиндрическом $(n = 1)$, так и в сферическом $(n = 2)$ вариантах. Количественно увеличение энтальпии H_2 в сферическом источнике приблизительно вдвое превышает соответствующие значения в цилиндрическом источнике при $r_2 = 5$ и выше.

На рис. 5,e приведены зависимости энтальпии $H(r)$ при $r_2 = 3$ (полужирные кривые *1* и *2*, $n = 1$ и 2) и при $r_2 = 5$ (простые кривые *1,a* и *2,a*, $n = 1$ и 2). Кривые $H(r)$ с бóльшими значениями координаты замыкающего сечения $r_2 = 5$ на участке от $r = r_1$ до $r = r_2 = 3$ совпадают с зависимостями с меньшими r_2, например $r_2 = 1.5, 2, 3$, как показано на рис. 5,e. Такова отличительная характерная черта базового варианта $F(r) = 0$ от комбинированных случаев воздействия внешней силой и энергоподводом во всех рассмотренных вариантах.

Выводы

1. При комбинированном воздействии в режиме постоянного числа Маха M_{r1} при неотрицательных значениях силовых параметров $F_Q, F_E \geq 0$ энтальпия, температура, скорость монотонно растут по координате, как в базовом энергетическом варианте.

2. Энтальпия H_2 в конце зоны воздействия увеличивается с нарастанием темпа при увеличении силового параметра F_E (сила задана на единицу объема) и линейно с ростом F_Q (сила задана на единицу массы) в цилиндрическом и сферическом источнике.

3. При отрицательных F_Q, F_E в пределе энтальпии H_2, близкой к нулю, функция энергообмена $g(r)$, поддерживающая число Маха постоянным, отрицательна по всей зоне в цилиндрическом источнике (охлаждение), либо во второй половине зоны в сферическом источнике.

4. Обнаружены локальные максимумы энтальпии $H_{2,\max}$ в дозвуковом диапазоне чисел Маха M_{r1} в цилиндрическом и сферическом источнике, в F_Q-, F_E-вариантах. Пики $H_{2,\max}$ существенно выше в сферическом источнике.

5. Энтальпия за зоной H_2 монотонно растет с увеличением замыкающей координаты r_2 в цилиндрическом источнике и в сферическом источнике, в F_Q- и F_E-вариантах.

6. В базовом энергетическом случае $F_Q = 0 = F_E$ зависимости энтальпии $H(r)$, H_2 от координаты r и от координаты замыкающего сечения r_2 ложатся на одну кривую при возрастании r_2 как в цилиндрическом источнике, так и в сферическом.

Список литературы

[1] *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковые течения и ударные волны. М.: ИЛ, 1950. 426 с. (Courant R., Friedrichs K.O. Supersonic Flow and Shock Waves. NY.: Intersience, 1948).
[2] *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961. 588 с. (Mises R. Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. NY.: Academic Press INC Publishers, 1958).
[3] *Черный Г.Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
[4] *Абрамович Г.Н.* // ДАН СССР. 1946. Т. 54. № 7. С. 579–581.
[5] *Вулис Л.А.* // ДАН СССР. 1946. Т. 54. № 8. С. 669–672.
[6] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
[7] *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. Ч. 1. М.: Наука, 1991. 600 с.
[8] *Кучеров А.Н.* // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 1. С. 129–138.
[9] *Кучеров А.Н.* // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 10. С. 34–41.
[10] *Кучеров А.Н.* Основные закономерности теплового запирания цилиндрического массового вихреисточника (вихрестока). Препринт № 158. М.: Изд. отд. ЦАГИ, 2010. 40 с.

[11] Плотность, энтальпия, энтропия и изобарная теплоемкость жидкого и газообразного азота при температурах 70–1500 K и давлениях 0.1–100 МПа. ГСССД 4-78. М.: Изд. стандартов, 1978. 12 с.
[12] Кислород жидкий и газообразный, плотность, энтальпия, энтропия и изобарная теплоемкость при температурах 70–1000 K и давлениях 0.1–100 МПа. ГСССД 19-81. М.: Изд. стандартов, 1982. 11 с.
[13] Воздух жидкий и газообразный. Плотность, энтальпия, энтропия и изобарная теплоемкость при температурах 70–1500 K и давлениях 0.1–100 МПа. ГСССД 8-79, с. 19–34. В сб.: Свойства материалов и веществ. Воздух и его основные компоненты. Вып. 2. Таблицы стандартных справочных данных. М.: Гос. ком. по управлению качеством продукции и стандартам, 1991. 128 с.