09;12

Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях

© И.А. Аверин[1,2], А.С. Бердников[1,¶], Н.Р. Галль[1,3]

[1] Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет им. Петра Великого, Санкт-Петербург
[3] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург
[¶] E-mail: asberd@yandex.ru

Поступило в Редакцию 12 июля 2016 г.

Электрические поля, которые описываются однородными по Эйлеру потенциалами, и подчиняются принципу подобия траекторий, сформулированному Ю.К. Голиковым, являются полезным инструментом для разработки электронно-оптических и ионно-оптических систем с уникальными свойствами. В этой работе принцип подобия траекторий обобщается на случай магнитных полей и комбинированных электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.03.44225.16402

Энерго- и масс-анализаторы, способные охватить большой диапазон энергий или массовых чисел за одно измерение (спектрографы), — это важный и относительно слабо изученный класс электрофизических приборов [1]. Именно на пути перехода от сканирующей моды, традиционно используемой в электронной спектроскопии и масс-спектрометрии к одновременной регистрации всех частиц в требуемом диапазоне измеряемого параметра (энергии или массового числа) видится будущее этих областей экспериментальной физики.

Оптика систем, обладающих хорошими спектрографическими свойствами, сильно отличается от оптики систем с хорошими спектрометрическими свойствами, а разработка таких систем приводит к совершенно новым оптическим задачам и соответственно к новым способам их решения. Здесь полезным инструментом являются поля, однородные по Эйлеру: электрические, удовлетворяющие тождеству $\mathbf{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n \mathbf{E}(x, y, z)$, либо магнитные, удовлетворяющие тождеству $\mathbf{B}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n \mathbf{B}(x, y, z)$, где n — фиксированный порядок однородности, λ — произвольный множитель. Этим электрическим полям, преимущественно с целочисленными порядками однородности, посвящено достаточно много публикаций [2–4], принадлежащих проф. Ю.К. Голикову и последователям его школы оптики заряженных частиц, по большей части с упором на спектрографические системы для нужд электронной спектроскопии. Задачей данной работы является обобщение предложенного Ю.К. Голиковым принципа подобия траекторий в электрических полях, однородных по Эйлеру, на однородные по Эйлеру магнитные поля и на комбинированные однородные электрические и магнитные поля, в том числе и с нецелочисленными порядками однородности. Тем самым становится возможным использовать при разработке спектрографических корпускулярно-оптических систем новые классы электрических и магнитных полей, что значительно расширяет свободу синтеза и оптимизации таких устройств.

Пусть заданы электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — декартовы координаты в трехмерном пространстве. Уравнения движения заряженных частиц в таком комбинированном поле имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{e}{m}\,\mathbf{E}\left(\mathbf{r}(t)\right) + \frac{e}{mc}\left[\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))\right], \tag{1}$$

где $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ — меняющиеся во времени координаты частицы, t — время, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ — индукция магнитного поля, c — множитель, зависящий от выбранной системы единиц, m — масса частицы, e — заряд частицы. Далее будем считать заряд частиц постоянным и использовать термин „масса“ в значении „массовое число“.

Пусть $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ — однородные по Эйлеру функции порядка p и q, так что $\mathbf{E}(\lambda\mathbf{r}) \equiv \lambda^p \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\lambda\mathbf{r}) \equiv \lambda^q \mathbf{B}(\mathbf{r})$, а $\mathbf{r}(t)$ — решение уравнения (1). Может ли масштабированная функция $\boldsymbol{\rho}(t) = \lambda\mathbf{r}(\varepsilon t)$ быть решением уравнения (1) для частиц с массами $m' = \mu m$? Да, если λ, ε, μ выбраны так, что $\lambda\varepsilon^2 = \lambda^p/\mu = \lambda^{q+1}\varepsilon/\mu$. Действительно, так как $d\boldsymbol{\rho}/dt = \lambda\varepsilon d\mathbf{r}/dt$

и $d^2\boldsymbol{\rho}/dt^2 = \lambda\varepsilon^2 d^2\mathbf{r}/dt^2$, то

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} - \frac{e}{\mu m}\,\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) - \frac{e}{\mu mc}\,[\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho})] = \lambda\varepsilon^2\ddot{\mathbf{r}} - \frac{e}{\mu m}\,\mathbf{E}(\lambda\mathbf{r}) - \frac{e}{\mu mc}\,[\lambda\varepsilon\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\lambda\mathbf{r})]$$

$$= \lambda\varepsilon^2\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\lambda^p}{\mu}\,\frac{e}{m}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\lambda^{q+1}\varepsilon}{\mu}\,\frac{e}{mc}\,[\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]$$

$$= \lambda\varepsilon^2\left(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{e}{m}\,\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{e}{mc}\,[\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]\right). \quad (2)$$

Тем самым функции $\boldsymbol{\rho}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ одновременно оказываются решениями соответствующих уравнений движения. Случаи $\mathbf{B} = 0$ и $\mathbf{E} = 0$ разбираются аналогично.

Рассмотрим частные варианты.

1. Электрическое поле ($\mathbf{B} = 0$). Условия на λ, ε, μ сводятся к $\lambda\varepsilon^2 = \lambda^p/\mu$, т.е. к выбору $\varepsilon = \lambda^{(p-1)/2}\mu^{-1/2}$. Это соответствует масштабированию начальной кинетической энергии для траектории $\boldsymbol{\rho}(t)$ в $\gamma = \mu\lambda^2\varepsilon^2 = \lambda^{p+1}$ раз (независимо от масштаба массы), причем масштабирование по энергии γ можно рассматривать как независимый параметр, а масштабирование по времени ε — как функцию от масштабирования по энергии и по массе. Начальные координаты траектории $\boldsymbol{\rho}(t)$ масштабируются в λ раз, начальные углы остаются прежними. Значит, если масштабировать начальные координаты в λ раз, начальную кинетическую энергию в λ^{p+1} раз и сохранить углы вылета неизменными, то при любых λ, μ новая траектория будет масштабированной в λ раз версией исходной траектории. При этом μ определяет масштабирование по времени, т.е. скорость движения вдоль траектории, но не форму траектории. Это свойство траекторий в электрических полях, однородных по Эйлеру, было названо Ю.К. Голиковым принципом подобия траекторий [2,3] и впоследствии было им обобщено и на другие классы электрических полей [5,6]. Данное свойство позволяет использовать электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронных спектрографов [2–4].

2. Магнитное поле ($\mathbf{E} = 0$). Условия на λ, ε, μ сводятся к $\lambda\varepsilon^2 = \lambda^{q+1}\varepsilon/\mu$, т.е. к выбору $\varepsilon = \lambda^q\mu^{-1}$. В таком случае у траектории $\boldsymbol{\rho}(t)$ модуль начального импульса масштабируется в $\chi = \mu\lambda\varepsilon = \lambda^{q+1}$ раз (независимо от масштаба массы). Масштабирование по модулю импульса χ может рассматриваться как независимый параметр, а

масштабирование по времени ε — как функция от масштабирования модуля импульса и массы. Начальные координаты масштабируются в λ раз, начальные углы остаются прежними. Значит, если масштабировать начальные координаты частицы в λ раз, начальный импульс (точнее, модуль импульса) в λ^{q+1} раз[1] и сохранить неизменными углы вылета, то при любых λ, μ новая траектория будет масштабированной в λ раз версией исходной траектории. При этом μ определяет масштабирование по времени, т.е. скорость движения вдоль траектории, но не форму траектории. Этот результат обобщает принцип подобия траекторий на магнитные поля, однородные по Эйлеру, и позволяет использовать такие магнитные поля как для чисто магнитных электронных спектрографов [1] и масс-спектрографов [7], так и для статических масс-анализаторов спектрографического типа с двойной фокусировкой [8,9]. (Эти применения хорошо известны для магнитного поля $\mathbf{B} = \text{const}$ — частного случая поля, однородного по Эйлеру.)

3. Комбинированные поля. Условие $\lambda\varepsilon^2 = \lambda^p/\mu = \lambda^{q+1}\varepsilon/\mu$ означает, что для масштабированной в λ раз траектории следует выбирать $\varepsilon = \lambda^{p-q-1}$, $\mu = \lambda^{2q-p+1}$. Тогда начальная кинетическая энергия, равно как и полная начальная энергия, масштабируются в $\gamma = \mu\lambda^2\varepsilon^2 = \lambda^{p+1}$ раз, а модуль начального импульса масштабируется в $\chi = \mu\lambda\varepsilon = \lambda^{q+1}$ раз. Начальные координаты масштабируются в λ раз, начальные углы остаются прежними. В результате при масштабировании начальных координат в λ раз, начальной кинетической или полной энергии в λ^{p+1} раз (либо начального импульса в λ^{q+1} раз), массы в λ^{2q-p+1} раз и сохранении прежних начальных углов траектория будет масштабированной в λ раз по сравнению с исходной версией. Это является обобщением принципа подобия траекторий для случая комбинирования (наложения) полей, однородных по Эйлеру.

Рассмотрим частные (вырожденные) случаи наложения полей. Для траекторий с одной и той же массой (случай $\mu = 1$, $p = 2q + 1$) траектории с энергией, масштабированной в γ раз, будут геометрически масштабированы в $\gamma^{1/(p+1)}$ раз, если порядки однородности электрического и магнитного поля согласованы как $p = 2q + 1$. Для траекторий с одной и той же энергией (случай $\gamma = 1$, $p = -1$) частицы с массами, масштабированными в μ раз, будут двигаться по траекториям,

[1] Для случая постоянной массы ($\mu = 1$, электронный пучок) масштабирование модуля импульса в $\chi = \lambda^{q+1}$ раз и масштабирование кинетической энергии в $\gamma = \lambda^{2q+2}$ раз — это одно и то же.

масштабированным в $\mu^{1/(2q+2)}$, если электрическое поле выбрано как $p = -1$. Для траекторий частиц одного и того же импульса (случай $\chi = 1$, $q = -1$) частицы с массами, масштабированными в μ раз, будут двигаться по траекториям, масштабированным в $\mu^{-1/(p+1)}$ раз, если магнитное поле выбрано как $q = -1$. Наконец, при $p = -1$, $q = -1$ параллельный пучок с фиксированными углами, энергиями и массами, входящий в комбинированное поле, преобразуется в выходной параллельный пучок, причем угол поворота (а также коэффициент сжатия) является функцией входного угла, энергии и массы. Использование комбинированных полей с $p = -1$ для масс-спектрографов с двойной фокусировкой исследуется в [10].

Вывод: в силу принципа подобия траекторий однородные по Эйлеру электрические, магнитные и комбинированные поля могут быть основой для построения энерго- и масс-спектрографов с интересными аналитическими свойствами. Изложенные выше представления являются первым шагом к разработке техники синтеза таких спектрографов и хорошо согласуются с современными методами параллельного детектирования заряженных частиц. Высокий уровень современной технологии позволяет создавать электроды и магнитные полюса сложной трехмерной формы и делает эти идеи практически реализуемыми.

Список литературы

[1] *Khursheed A.* Scanning Electron Microscope Optics and Spectrometers. Singapore: World Scientific, 2010.
[2] *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 409 с.
[3] *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. В. 2. С. 9–15.
[4] *Краснова Н.К.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. В. 6. С. 97–103.
[5] *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
[6] *Голиков Ю.К., Краснова Н.К.* // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.
[7] *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12. № 4. С. 272–281.
[8] *Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К.* // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 11–20.
[9] *Бердников А.С., Аверин И.А.* // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 89–95.
[10] *Бердников А.С., Аверин И.А.* // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 62–65.