

01.3

Коллективная динамика идентичных бистабильных автогенераторов с запаздыванием, связанных через общее поле

© В.И. Пономаренко, Д.Д. Кульминский,
А.С. Караваев, М.Д. Прохоров

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 27 октября 2016 г.

Экспериментально и численно исследованы особенности коллективной динамики осцилляторов в ансамбле идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, связанных между собой через общее поле. Показана возможность существования состояния „химера“, при котором часть элементов ансамбля совершает синхронные колебания, а другая часть элементов колеблется несинхронно.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.06.44405.16546

Пространственно-временная динамика ансамблей осцилляторов уже несколько десятилетий является объектом пристального внимания многих исследователей. При ее изучении были обнаружены многие нелинейные явления, включая образование различных структур, кластеризацию и синхронизацию [1–3]. При этом долгое время считалось, что области синхронного и несинхронного поведения элементов ансамбля могут одновременно сосуществовать только в гетерогенных ансамблях осцилляторов, в которых происходит синхронизация осцилляторов с близкими частотами, а осцилляторы с существенно различающимися частотами колеблются несинхронно. Лишь относительно недавно было обнаружено, что и в ансамбле идентичных осцилляторов возможно состояние, при котором группа синхронно колеблющихся элементов сосуществует с группой элементов, совершающих несинхронные колебания [4]. Такое состояние ансамбля получило название „химера“ [5]. Состояния „химера“ были сначала обнаружены в ансамблях фазовых

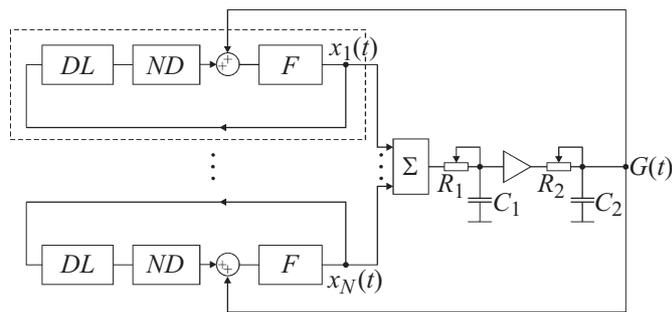


Рис. 1. Блок-схема ансамбля идентичных генераторов с запаздывающей обратной связью, связанных через общее поле. Показаны только первый и N -й генераторы. DL — линии задержки, ND — нелинейные элементы, F — фильтры, Σ — суммирующий усилитель.

осцилляторов, связь между которыми является локальной [6], нелокальной [5] или глобальной [7], а затем и в ансамблях, элементы которых не являются фазовыми осцилляторами [8–10]. Состояния „химера“ были обнаружены не только при теоретических, но и при экспериментальных исследованиях [11–13].

В настоящей работе экспериментально и численно исследовали особенности коллективной динамики, в том числе состояния „химера“, в ансамбле идентичных бистабильных генераторов с запаздывающей обратной связью, связанных между собой через общее поле. Изучение пространственно-временной динамики в таких ансамблях представляет несомненный интерес, поскольку глобальная связь осцилляторов через общее поле является достаточно распространенной в многоэлементных системах, а запаздывание присуще многим объектам и процессам в природе.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из идентичных систем с запаздыванием, каждая из которых описывается в отсутствие связи следующим дифференциальным уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau)), \quad (1)$$

где τ — время запаздывания, ε — параметр инерционности, f — нелинейная функция. Уравнение (1) является математической моделью

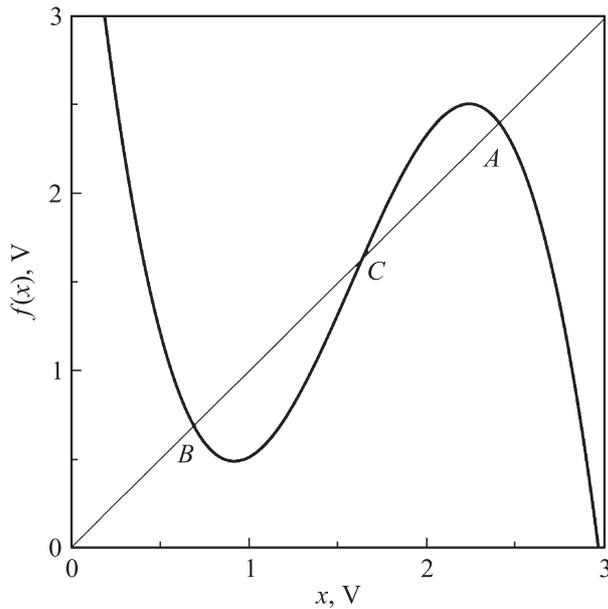


Рис. 2. График нелинейной функции $f(x)$ частичного автогенератора. Буквами A, B и C обозначены неустойчивые неподвижные точки.

кольцевого автогенератора, состоящего из линии задержки, нелинейного элемента и низкочастотного RC-фильтра первого порядка. На рис. 1 такой автогенератор обведен пунктиром. Для него в уравнении (1) $\varepsilon = RC$.

Пусть нелинейный элемент генератора имеет передаточную характеристику, которая описывается кубической функцией $f(x) = a + b(x - d) - c(x - d)^3$. Эта функция построена на рис. 2 при $a = 1.5$, $b = 2.3$, $c = 1.78$ и $d = 1.57$. При такой нелинейности система (1) является бистабильной, т.е. она может демонстрировать два вида колебаний, возникновение которых определяется выбором начальных условий. Эти колебания происходят вблизи неустойчивых неподвижных точек, соответствующих точкам пересечения функции $f(x)$ с диагональю и обозначенных на рис. 2 буквами A и B. Вблизи неподвижной точки A реализуются периодические колебания на основной моде,

частота которых близка к величине $\nu_1 = 1/2\tau$. Около неподвижной точки B наблюдаются хаотические колебания на третьей гармонике основной моды, основная частота которых $\nu_2 = 3/2\tau$.

Парциальные генераторы с запаздыванием (1) свяжем между собой через общее поле $G(t)$ таким образом, что динамика каждого из генераторов описывается уравнением

$$\varepsilon \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f(x_i(t - \tau) + G(t)), \quad (2)$$

где $i = 1, \dots, N$, N — число элементов в ансамбле. Общее поле формируется путем сложения сигналов $x_i(t)$ всех генераторов при помощи суммирующего усилителя с коэффициентом передачи k и нормировки суммарного сигнала на N . Полученный таким образом сигнал проходит через линейную фазосдвигающую цепочку, представляющую собой два последовательно соединенных низкочастотных RC -фильтра первого порядка, и подается на каждый из генераторов в качестве внешнего воздействия. Блок-схема исследуемого ансамбля связанных автогенераторов представлена на рис. 1. Уравнение для общего поля имеет следующий вид:

$$\varepsilon_2 \ddot{G}(t) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \dot{G}(t) + G(t) = \frac{k}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t), \quad (3)$$

где $\varepsilon_1 = R_1 C_1$, $\varepsilon_2 = R_2 C_2$. Отметим, что внешнее воздействие может быть подано в различные точки кольцевого генератора с запаздыванием [14]. В данной работе ограничимся без потери общности рассмотрением внешнего воздействия вида (2).

В радиофизическом эксперименте нами исследовался ансамбль, состоящий из шести автогенераторов вида (2) со следующими значениями параметров: $\tau = 1$ ms, $\varepsilon = 0.157$ ms. Линии задержки и нелинейные элементы генераторов были реализованы в цифровом виде на базе программируемых микроконтроллеров, а RC -фильтры представляли собой аналоговые элементы. Аналоговые и цифровые элементы схемы сопрягались с помощью аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей, которые не показаны на рис. 1, чтобы не загромождать его.

Начальные условия выбрали таким образом, чтобы три генератора с номерами 1–3 совершали периодические колебания на основной моде, а три других генератора с номерами 4–6 совершали хаотические колебания на третьей гармонике основной моды. В этом случае элементы

ансамбля разделены на два кластера, в одном из которых динамика генераторов периодическая, а в другом хаотическая. Поскольку в формировании общего поля участвуют все генераторы ансамбля, в сигнале $G(t)$ имеются две основные частотные составляющие с частотами ν_1 и ν_2 . При прохождении через линейный двухзвенный RC -фильтр каждая из этих частотных составляющих претерпевает фазовый сдвиг

$$\Delta\varphi = -\arctan(2\pi\nu\varepsilon_1) - \arctan(2\pi\nu\varepsilon_2), \quad (4)$$

величина которого зависит от частоты ν . В уравнении (4) первый член определяет фазовый сдвиг, вносимый первым звеном фильтра, а второй член определяет фазовый сдвиг, вносимый вторым звеном фильтра.

Величина фазового сдвига $\Delta\varphi$ определяет поведение элементов в ансамбле осцилляторов. При $|\Delta\varphi| < \pi/2$ элементы ансамбля синхронизируются между собой после переходного процесса, а при $|\Delta\varphi| \geq \pi/2$ они колеблются несинхронно [7]. В нашем примере сдвиг фазы $\Delta\varphi_1$ для низкочастотной составляющей ν_1 меньше по абсолютной величине, чем сдвиг фазы $\Delta\varphi_2$ для высокочастотной составляющей ν_2 . Изменяя величины резисторов R_1 и R_2 , можем регулировать фазовые сдвиги $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ и получить три различные ситуации: 1) $|\Delta\varphi_1| < \pi/2$, $|\Delta\varphi_2| < \pi/2$; 2) $|\Delta\varphi_1| < \pi/2$, $|\Delta\varphi_2| \geq \pi/2$; 3) $|\Delta\varphi_1| \geq \pi/2$, $|\Delta\varphi_2| \geq \pi/2$.

В первом случае наблюдается синхронизация как периодических генераторов с номерами 1–3 в первом кластере, так и хаотических генераторов с номерами 4–6 во втором кластере. Фрагменты временных реализаций колебаний напряжения во всех шести генераторах показаны на рис. 3, *a* при $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = 0$. При идентичности генераторов будет наблюдаться полная синхронизация элементов первого кластера, находящихся в периодическом режиме. Однако в радиофизическом эксперименте практически невозможно добиться полной идентичности аналоговых RC -фильтров в генераторах, поэтому колебания экспериментальных генераторов с номерами 1–3 немного отличаются. В кластере с хаотическими генераторами наблюдается фазовая синхронизация элементов с номерами 4–6.

Вторую из перечисленных выше ситуаций иллюстрирует рис. 3, *b*, на котором приведены фрагменты временных реализаций колебаний напряжения во всех шести генераторах при $|\Delta\varphi_1| = 0.27\pi$ и $|\Delta\varphi_2| = 0.55\pi$. В кластере с периодической динамикой генераторов имеет место синхронизация элементов, так же как на рис. 3, *a*. В кластере с хаотической динамикой генераторов фазовая синхронизация разрушилась, элементы

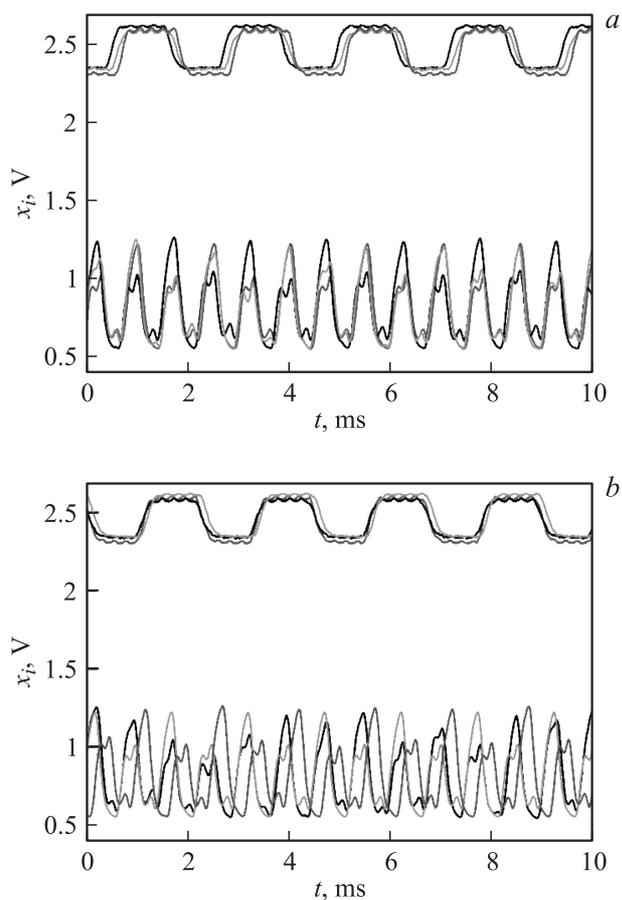


Рис. 3. Экспериментальные временные реализации колебаний напряжения во всех шести автогенераторах при $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = 0$ (a), $|\Delta\varphi_1| = 0.27\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.55\pi$ (b) и $|\Delta\varphi_1| = 0.51\pi$, $|\Delta\varphi_2| = 0.71\pi$ (c). В верхней части рисунков различной градацией серого цвета показаны реализации периодических колебаний генераторов с номерами 1–3, а в нижней части — реализации хаотических колебаний генераторов с номерами 4–6.

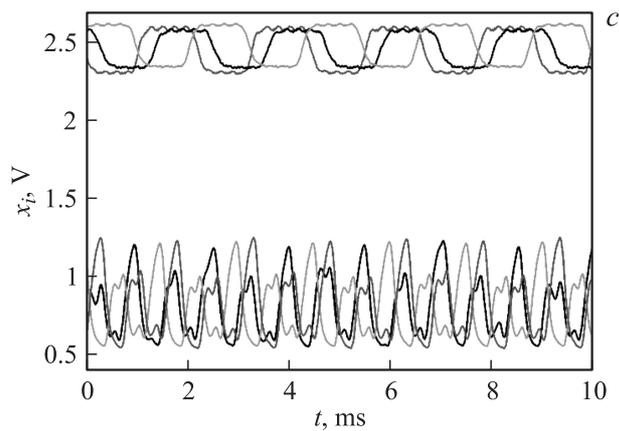


Рис. 3 (продолжение).

колеблются несинхронно. Такая ситуация соответствует состоянию „химера“, так как в ансамбле одновременно сосуществуют кластер с синхронным и кластер с несинхронным поведением элементов. Отметим, что шести генераторов оказывается достаточно для возникновения состояния „химера“. Как было недавно показано в работе [13], состояния „химера“ могут существовать в ансамблях, состоящих всего лишь из четырех идентичных осцилляторов.

Последняя из возможных ситуаций проиллюстрирована на рис. 3, с, на котором приведены фрагменты временных реализаций колебаний напряжения во всех шести генераторах при $|\Delta\varphi_1| = 0.51\pi$ и $|\Delta\varphi_2| = 0.71\pi$. В этом случае колебания генераторов в обоих кластерах оказываются несинхронными.

Нами проведены численные исследования коллективной динамики осцилляторов в ансамблях, состоящих из идентичных бистабильных систем с запаздыванием (2), связанных через общее поле. При этом использовались различные нелинейные функции, обеспечивающие бистабильность парциальных элементов, и варьировалось число элементов в ансамбле. Полученные результаты качественно совпадают с приведенными экспериментальными результатами. Однако в отличие от натурального эксперимента при численном моделировании осцилляторы, составляющие кластер с периодическим поведением элементов,

демонстрировали полную синхронизацию и их временные реализации полностью совпадали.

Итак, нами экспериментально и численно исследовались особенности коллективной динамики в ансамбле идентичных бистабильных систем с запаздывающей обратной связью, связанных между собой через общее поле. Показано, что в зависимости от выбора начальных условий парциальных элементов и величины фазового сдвига сигнала общего поля в ансамбле могут существовать кластеры с синхронным поведением элементов и кластеры с несинхронным поведением элементов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 16-02-00091.

Список литературы

- [1] *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Scientific, 1995. 260 p.
- [2] *Пиковский А.С., Розенблум М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с. [*Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 432 p.]
- [3] *Osipov G.V., Kurths J., Zhou C.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer, 2007. 370 p.
- [4] *Kuramoto Y., Battogtokh D.* // Nonlinear Phenom. Complex Syst. 2002. V. 5. N 4. P. 380–385.
- [5] *Abrams D.M., Strogatz S.H.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. N 17. P. 174102.
- [6] *Singh R., Sinha S.* // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. N 1. P. 012907.
- [7] *Yeldesbay A., Pikovsky A., Rosenblum M.* // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 112. N 14. P. 144103.
- [8] *Sethia G.C., Sen A.* // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 112. N 14. P. 144101.
- [9] *Zakharova A., Kapeller M., Schöll E.* // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 112. N 15. P. 154101.
- [10] *Богомолов С.А., Стрелкова Г.И., Schöll E., Анищенко В.С.* // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42. В. 14. С. 103–110. [*Bogomolov S.A., Strelkova G.I., Schöll E., Anishchenko V.S.* // Tech. Phys. Lett. 2016. V. 42. N 7. P. 765–768.]
- [11] *Hagerstrom A.M., Murphy T.E., Roy R.* et al. // Nature Phys. 2012. V. 8. N 9. P. 658–661.
- [12] *Larger L., Penkovsky B., Maistrenko Y.* // Nat. Commun. 2015. V. 6. P. 7752.
- [13] *Hart J.D., Bansal K., Murphy T.E., Roy R.* // Chaos. 2016. V. 26. N 9. P. 094801.
- [14] *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. N 1. P. 016210.