05,11

Исследование критических свойств модели Изинга на объемно центрированной кубической решетке с учетом взаимодействия следующих за ближайшими соседей

© А.К. Муртазаев[1,2], М.К. Рамазанов[1,¶], Д.Р. Курбанова[1], М.К. Бадиев[1], Я.К. Абуев[1]

[1] Институт физики ДагНЦ РАН,
Махачкала, Россия
[2] Дагестанский государственный университет,
Махачкала, Россия
[¶] E-mail: sheikh77@mail.ru

*(Поступила в Редакцию 10 мая 2016 г.
В окончательной редакции 14 ноября 2016 г.)*

Репличным методом Монте-Карло выполнены исследования критического поведения трехмерной антиферромагнитной модели Изинга на объемно центрированной кубической решетке с учетом взаимодействий следующих за ближайшими соседей. Исследования проведены для соотношений величин обменных взаимодействий следующих за ближайшими и ближайших соседей $k = J_2/J_1$ в диапазоне значений $k \in [0.0, 1.0]$ с шагом $\Delta k = 0.1$. В рамках теории конечно-размерного скейлинга рассчитаны статические критические индексы теплоемкости α, восприимчивости γ, параметра порядка β, радиуса корреляции ν, а также индекс Фишера η. Показано, что класс универсальности критического поведения этой модели сохраняется в интервале значений $k \in [0.0, 0.6]$. Установлено, что в диапазоне $k \in [0.8, 1.0]$ наблюдается неуниверсальное критическое поведение.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 16-02-00214-а и 16-32-00105-мол-а.

DOI: 10.21883/FTT.2017.06.44480.169

1. Введение

В последнее время особое внимание уделяется исследованию магнитных состояний, фазовых переходов (ФП) и критических явлений в фрустрированных спиновых системах. Это связано с тем, что указанные системы зачастую проявляют поведение, отличное от поведения соответствующих нефрустрированных систем. Причина такого поведения заключается в сильном вырождении в спиновой подсистеме, эффективном ослаблении связи и, как следствие, в высокой чувствительности к различным возмущающим факторам: дополнительным взаимодействиям, слабым полям, тепловым и квантовым флуктуациям, анизотропии, дефектам и деформациям [1–4].

Результаты исследований многих авторов показывают, что наличие фрустраций приводит к существенному изменению ряда свойств фундаментального характера [4–8]. Можно отметить проблемы, связанные с определением характера ФП, с особенностями и факторами, влияющими на формирование классов универсальности магнитного и кирального критического поведения фрустрированных спиновых систем и др. Кроме того, учет антиферромагнитных взаимодействий следующих за ближайшими соседей в классической трехмерной модели Изинга приводит к вырождению основного состояния, появлению различных фаз, ФП и аномалий критических свойств [9].

В настоящей работе нами предпринята попытка на основе метода Монте-Карло (МК) провести исследование критических свойств антиферромагнитной модели Изинга на объемно центрированной кубической решетке с учетом взаимодействий ближайших и следующих за ближайшими соседей.

Теоретические расчеты и численное моделирование методом МК для этой модели были проведены в [10–16]. Авторы работы [10] методом МК провели исследование критического поведения модели Изинга на различных типах решеток, вычислили температуру ФП и рассчитали значения термодинамических параметров в критической области. Теоретические исследования, проведенные в работах [11,12], также свидетельствуют о том, что для модели Изинга на простой кубической решетке и объемно центрированной кубической решетке имеет место ФП второго рода. Аналогичные результаты получены и в [13–15]. Авторы этих работ рассчитали критические индексы для некоторых термодинамических параметров. Согласно результатам работ [14,15], переход из ферромагнитной фазы в парамагнитную фазу является переходом второго рода, а переход из антиферромагнитной фазы в парамагнитную — переходом первого рода. Отсюда следует, что при увеличении взаимодействия вторых ближайших соседей в системе происходит смена ФП второго рода на ФП первого рода.

Интерес к антиферромагнитной модели Изинга на объемно центрированной кубической решетке обусловлен тем, что учет взаимодействия следующих за ближайшими соседей может привести к возникновению фрустраций, что усложняет решение. При изучении фрустрированных систем до сих пор основное внимание уделялось спиновым системам на квадратной, треугольной и гексагональной решетке [17–25]. Критические свойства фрустрированных систем на объемно центрированной кубической решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей практически не исследованы. Кроме того, первые попытки исследования этой модели предпринимались в то время, когда мощности вычислительных машин и используемые алгоритмы метода МК не позволяли рассчитывать критические параметры с необходимой степенью точности.

Исследование этой модели на основе современных методов и идей позволит получить ответ на ряд вопросов, связанных с критическими свойствами фрустрированных спиновых систем.

2. Модель и метод исследования

Антиферромагнитная модель Изинга на объемно центрированной кубической решетке с учетом взаимодействий ближайших и следующих за ближайшими соседей описывается гамильтонианом

$$H = J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i S_j) + J_2 \sum_{\langle i,l \rangle} (S_i S_l), \tag{1}$$

где $S_{i,j,l} = \pm 1$ — изинговский спин. Первый член в формуле (1) учитывает обменное взаимодействие ближайших соседей величиной $J_1 > 0$, а второй — следующих за ближайшими соседями величиной $J_2 > 0$; $k = J_2/J_1$ — величина соотношения взаимодействий следующих за ближайшими и ближайших соседей. Схематически эта модель представлена на рис. 1.

Исследование ФП фрустрированных спиновых систем традиционными теоретическими, экспериментальными и численными методами сталкивается с рядом труднопреодолимых проблем. Это связано с тем, что для таких моделей характерна проблема многочисленных долин локальных минимумов энергии. Строго и последовательно на основе микроскопических гамильтонианов такие системы могут быть изучены методами МК [16–18,20,22–27], но обычные методы МК плохо справляются с решением этих проблем. В связи с этим в последнее время разработано много новых вариантов алгоритмов метода МК, которые позволяют преодолеть указанные проблемы. Одними из наиболее мощных и эффективных в исследовании ФП и критических явлений в фрустрированных системах оказались репличные алгоритмы метода МК [28,29]. Поэтому в настоящей работе был использован высокоэффективный репличный обменный алгоритм метода МК.

Расчеты проводились для систем с периодическими граничными условиями и линейными размерами $L \times L = N$, $L = 12{-}90$, где L измеряется в размерах элементарной ячейки. Соотношение обменного взаимодействия следующих за ближайшими и ближайших соседей менялось в интервале $k \in [0.0, 1.0]$ с шагом

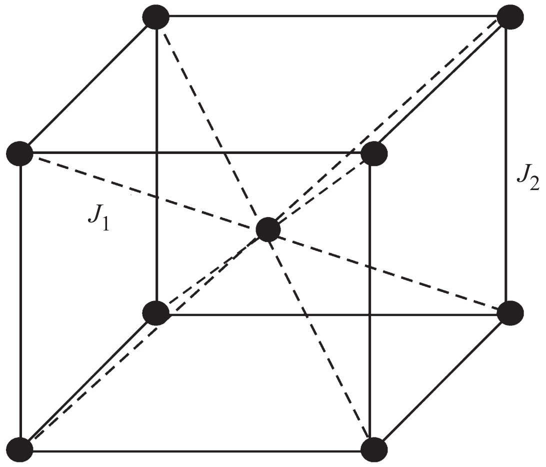

Рис. 1. Схематическое изображение объемно центрированной кубической решетки.

$\Delta k = 0.1$. Для вывода системы в состояние термодинамического равновесия отсекался неравновесный участок длиной $\tau_0 = 4 \cdot 10^5$ шагов МК на спин, что в несколько раз больше длины неравновесного участка. Усреднение термодинамических параметров проводилось вдоль марковской цепи длиной до $\tau = 500\tau_0$ шагов МК на спин.

3. Результаты моделирования

Для наблюдения за температурным ходом теплоемкости C и восприимчивости χ использовались выражения [30,31]

$$C = (NK^2)\big(\langle U^2 \rangle - \langle U^2 \rangle\big), \tag{2}$$

$$\chi = \begin{cases} (NK)\big(\langle M^2 \rangle - \langle |M|^2 \rangle\big), & T < T_N, \\ (NK)\langle M^2 \rangle, & T \geq T_N, \end{cases} \tag{3}$$

где $K = |J|/k_{\mathrm{B}T,N}$ — число частиц, T_N — критическая температура (здесь и далее температура дана в единицах $|J_1|/k_{\mathrm{B}}$), U — внутренняя энергия, M — параметр порядка (U и M являются нормированными величинами).

Результаты наших исследований показывают, что при $k = 0.7$ система имеет некоторые особенности, связанные с поведением термодинамических параметров и типом ФП. Поэтому нами этот случай рассматривается более подробно.

На рис. 2 и 3 представлены характерные зависимости теплоемкости и восприимчивости от температуры для систем с линейными размерами $L = 12$, 24, 36 и 48 при $k = 0.7$ (здесь и на всех последующих рисунках статистическая погрешность не превышает размеров символов, использованных для построения зависимостей).

Отметим, что на зависимости теплоемкости C и восприимчивости χ от температуры для всех систем вблизи критической температуры наблюдаются хорошо выраженные максимумы, которые увеличиваются с ростом числа спинов в системе, причем эти максимумы в

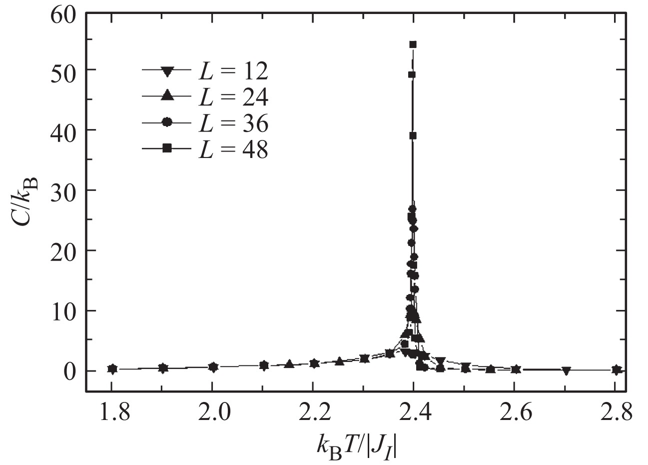

Рис. 2. Зависимость теплоемкости C/k_B от температуры $k_BT/|J_1|$ для $k = 0.7$ при различных L.

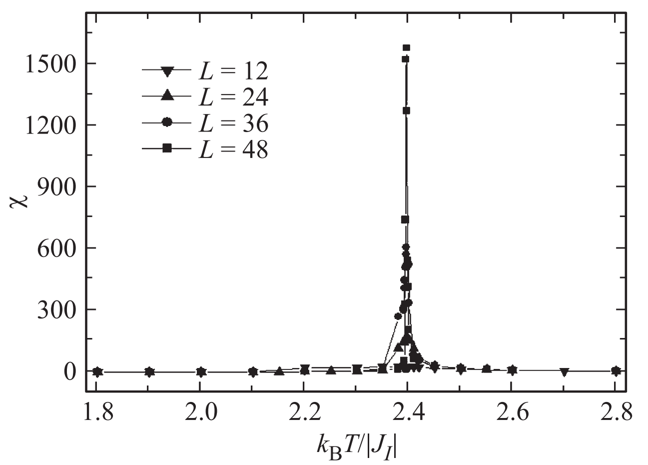

Рис. 3. Зависимость восприимчивости χ от температуры $k_BT/|J_1|$ для $k = 0.7$ при различных L.

пределах погрешности приходятся на одну и ту же температуру даже для систем с наименьшим значением L. Это свидетельствует, во-первых, о высокой эффективности использованного способа добавления периодических граничных условий, а во-вторых, о достижении насыщения по N для многих исследуемых нами параметров.

Для анализа рода ФП нами использовался гистограммный анализ данных метода МК [32,33]. Этот метод позволяет надежно определить род ФП. Методика определения рода ФП с его помощью подробно описана в [34,35].

Результаты настоящей работы показывают, что переход при $k = 0.7$ является ФП второго рода. Это продемонстрировано на рис. 4 и 5. На этих рисунках представлены гистограммы распределения энергии для систем с линейными размерами $L = 48$, 60, 72 и 90. Графики построены вблизи критической температуры. Из рис. 4 и 5 видно, что на зависимости вероятности P от энергии U для систем с линейными размерами $L = 48$, 60 и 72 наблюдаются два хорошо выраженных максимума. Наличие двойного максимума на гистограмме распределения энергии является достаточным условием для ФП первого рода. Однако, как видно из рис. 5, для системы с линейными размерами $L = 90$ наблюдается один максимум, который свидетельствует в пользу ФП второго рода. Таким образом, при $k = 0.7$ в системе с малыми линейными размерами $(L < 90)$ наблюдается ФП первого рода. Для всех остальных значений k в зависимости вероятности P от энергии U для систем даже с малыми линейными размерами наблюдается один максимум, который свидетельствует в пользу ФП второго рода. Это продемонстрировано на рис. 6 для случая $k = 0.9$.

Более подробно анализ рода ФП для этой модели при всех значениях $k \in [0.0, 1.0]$ был проведен нами в работе [16]. Согласно результатам этой работы, во всем рассмотренном интервале значений k наблюдаются ФП второго рода. Случай $k = 0.7$ представляет особый интерес и имеет некоторые особенности, которые обсуждались нами выше. Это связано с тем,

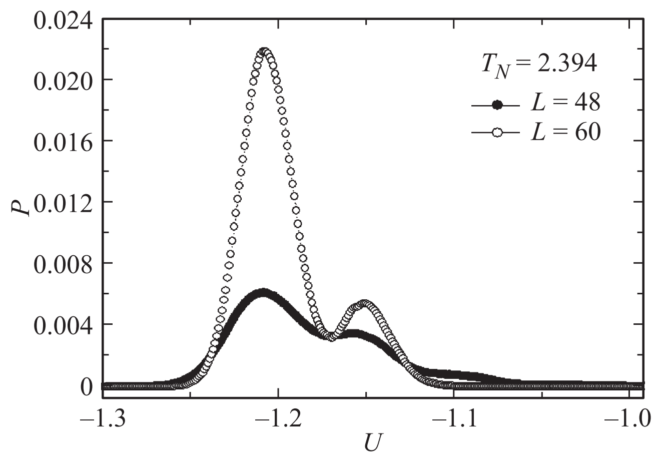

Рис. 4. Гистограмма распределения энергии для $k = 0.7$ при $L = 48$ и 60.

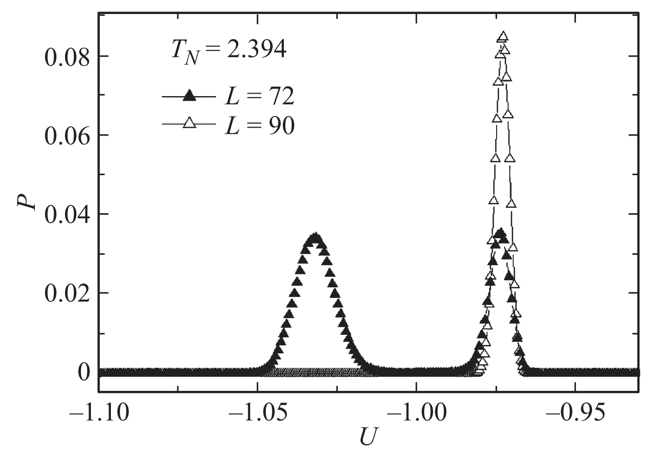

Рис. 5. Гистограмма распределения энергии для $k = 0.7$ при $L = 72$ и 90.

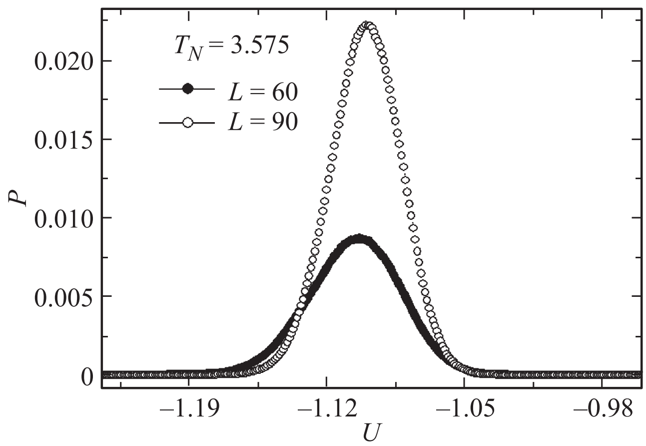

Рис. 6. Гистограмма распределения энергии для $k = 0.9$ при $L = 60$ и 90.

что вблизи этой точки пересекаются три различные фазы: I — антиферромагнитная, II — парамагнитная, III — антиферромагнитная второго типа [14,15]. Об этом свидетельствует фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия следующих за ближайшими соседей, полученная нами в работе [16].

Для расчета статических критических индексов теплоемкости α, восприимчивости γ, параметра порядка β, радиуса корреляции ν и индекса Фишера η применялись соотношения теории конечно-размерного скейлинга [18,23,31].

Из теории конечно-размерного скейлинга следует, что в системе с размерами $L \times L \times L$ при $T = T_N$ и достаточно больших L выполняются следующие выражения [23,31]:

$$M \sim L^{-\beta/\nu}, \tag{4}$$

$$\chi \sim L^{\gamma/\nu}, \tag{5}$$

$$V_n \sim L^{1/\nu} g_{V_n}, \tag{6}$$

где g_{V_n} — некоторая постоянная, а в качестве V_n могут выступать

$$V_n = \frac{\langle M^n U \rangle}{\langle M^n \rangle} - \langle U \rangle, \quad n = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Эти выражения были использованы нами для определения β, γ и ν.

Для аппроксимации температурной зависимости теплоемкости от L на практике, как правило, используется выражение [20]

$$C_{\max}(L) = A_1 - A_2 L^{\alpha/\nu}, \tag{8}$$

где A_1 и A_2 — некоторые коэффициенты.

На рис. 7 и 8 в двойном логарифмическом масштабе представлены характерные зависимости параметров V_n при $n = 1, 2, 3$ от линейных размеров решетки L для $k = 0.3$ и 0.9. Как видно из рисунков, все точки на графиках в пределах погрешности хорошо ложатся на прямые. Зависимости на рисунках, построенные в соответствии с методом наименьших квадратов, параллельны друг другу. Углы наклона прямых определяют значения $1/\nu$. Вычисленные таким образом значения ν использовались для определения критических индексов теплоемкости α, восприимчивости γ и параметра порядка β.

На рис. 9–12 в двойном логарифмическом масштабе представлены характерные зависимости магнитного параметра порядка M и восприимчивости χ от линейных размеров решетки L для $k = 0.3$ и 0.9. Все точки в пределах погрешности ложатся на прямые. Углы наклона этих прямых определяют значения β/ν и γ/ν. По этой схеме были определены значения и для теплоемкости α/ν. На основе данных по ν вычислялись статические критические индексы α, β и γ.

Эта процедура использовалась для расчета критических индексов при значениях $k = 1.0$, 0.9, 0.8, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 и 0.0. Все значения статических критических индексов, полученные таким образом, представлены в табл. 1. Для случая $k = 0.7$ не удалось

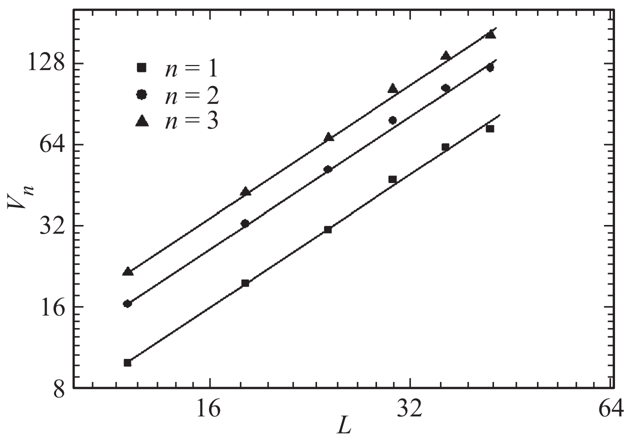

Рис. 7. Зависимость параметра V_n от линейных размеров системы L при $T = T_n$ для $k = 0.3$.

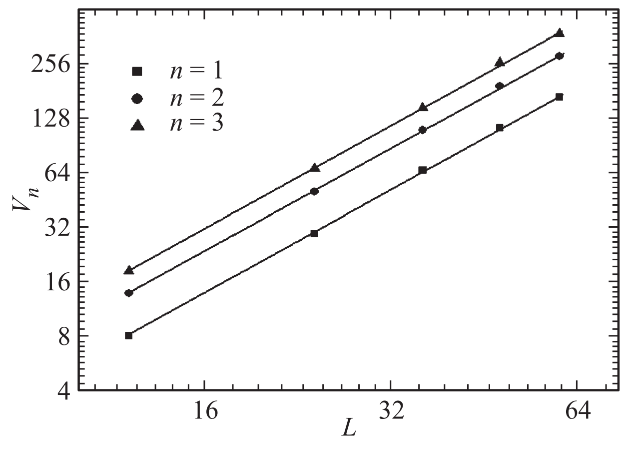

Рис. 8. Зависимость параметра V_n от линейных размеров системы L при $T = T_n$ для $k = 0.9$.

Таблица 1. Значения критических индексов для трехмерной антиферромагнитной модели Изинга на объемно центрированной кубической решетке

k	α	β	γ	ν	η	$\alpha+2\beta+\gamma=2$
0.0	0.13(2)	0.31(1)	1.23(1)	0.63(1)	0.04(2)	1.98
0.1	0.13(2)	0.30(1)	1.24(1)	0.62(1)	0.03(2)	1.97
0.2	0.13(2)	0.31(1)	1.23(1)	0.62(1)	0.02(2)	1.98
0.3	0.12(2)	0.31(1)	1.25(1)	0.64(1)	0.04(2)	1.99
0.4	0.13(2)	0.31(1)	1.22(1)	0.63(1)	0.05(2)	1.97
0.5	0.12(2)	0.31(1)	1.24(1)	0.62(1)	0.03(2)	1.98
0.6	0.13(2)	0.31(1)	1.22(1)	0.62(1)	0.03(2)	1.97
0.8	0.63(2)	0.20(1)	1.01(1)	0.48(1)	−0.07(2)	2.03
0.9	0.47(2)	0.22(1)	1.12(1)	0.54(1)	−0.05(2)	2.03
1.0	0.40(2)	0.25(1)	1.14(1)	0.58(1)	−0.01(2)	2.04
Нефрустрированная модель Изинга [36]	0.108(9)	0.3265(25)	1.239(4)	0.6305(25)	0.037(3)	2.000

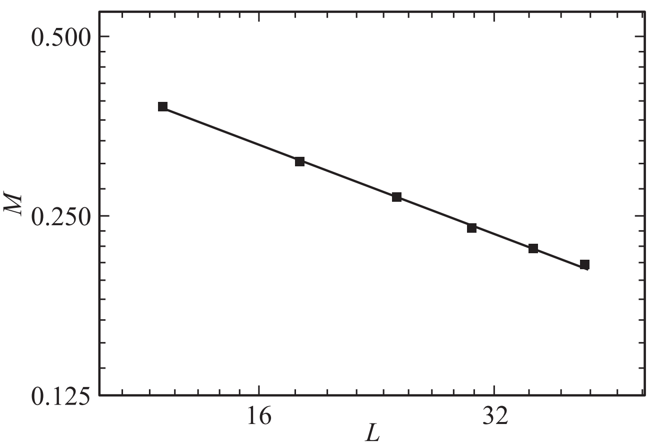

Рис. 9. Зависимость параметра порядка M от линейных размеров системы L при $T = T_N$ для $k = 0.3$.

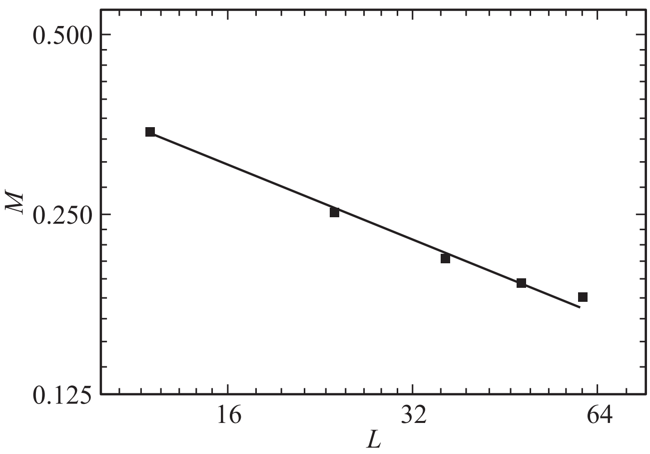

Рис. 11. Зависимость параметра порядка M от линейных размеров системы L при $T = T_N$ для $k = 0.9$.

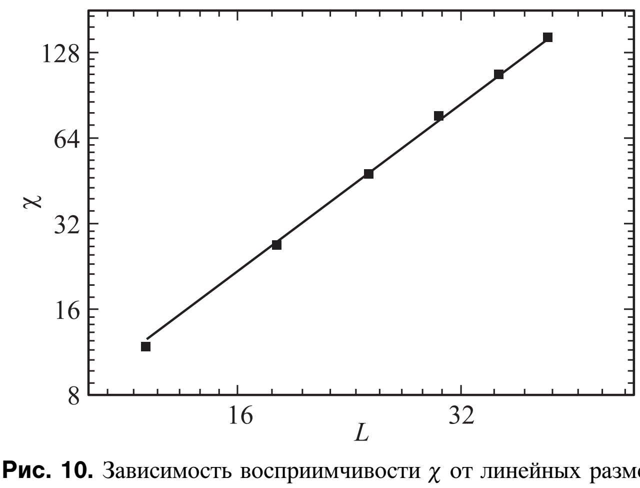

Рис. 10. Зависимость восприимчивости χ от линейных размеров системы L при $T = T_N$ для $k \in= 0.3$.

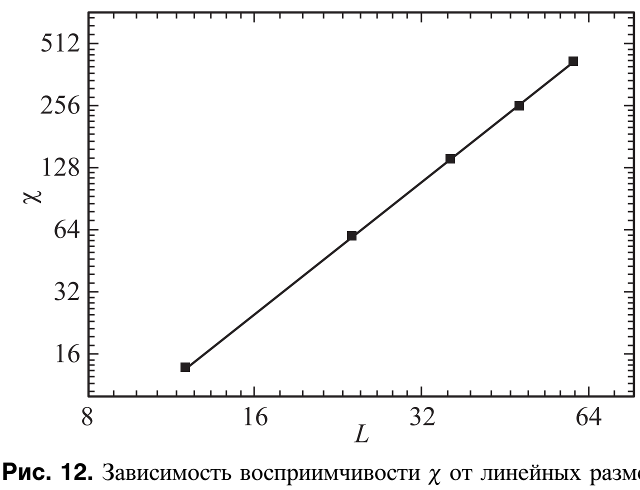

Рис. 12. Зависимость восприимчивости χ от линейных размеров системы L при $T = T_N$ для $k = 0.9$.

рассчитать значения критических индексов. Это связано с тем, что для расчета критических индексов для $k = 0.7$ необходимо провести исследования систем с большими линейными размерами ($L \geq 90$), где происходит ФП второго рода.

Особо следует отметить процедуру, использованную нами для определения индекса Фишера η. Используя отношение между восприимчивостью χ и радиусом корреляции ξ [37]

$$\chi \propto \xi^{\gamma/\nu}, \tag{9}$$

а также соотношение $\eta = 2 - \gamma/\nu$, связывающее индекс η и ν, получим

$$\ln(\chi/\xi^2) = c - \eta \ln \xi, \tag{10}$$

где c — некоторая константа. Для систем с конечными размерами $\xi = L$. Тогда при $k_B T/|J_1| = k_B T_N/|J_1|$ имеем

$$\ln(\chi/L^2) = c - \eta \ln L. \tag{11}$$

На основе выражения (11) было определено значение индекса Фишера η. Эти данные также представлены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, почти все значения критических индексов, рассчитанные нами в интервале $k \in [0.0, 0.6]$, в пределах погрешности совпадают между собой. Это свидетельствует о том, что в этом интервале система проявляет универсальное критическое поведение. В интервале $k \in [0.8, 1.0]$ значения критических индексов отличаются от соответствующих значений из интервала $k \in [0.0, 0.6]$. Можно предположить, что при увеличении взаимодействия следующих за ближайшими соседей в системе происходит смена класса универсальности критического поведения. Кроме того, в интервале $k \in [0.8, 1.0]$ индексы меняются с изменением k. Это позволяет нам говорить о том, что в этом интервале наблюдается неуниверсальное критическое поведение. Неуниверсальность критического поведения связана с конкуренцией обменных взаимодействий между ближайшими и следующими соседями. Это следует из решения Бэкстера для точно решаемой восьмивершинной модели [38]. Мы предполагаем, что неуниверсальность критического поведения нашей модели связана с усилением конкуренции обменных взаимодействий между ближайшими и следующими соседями при $k > 2/3$. Аналогичное поведение предсказывалось также и для трехмерной модели Ашкина–Теллера на кубической решетке [39].

Отметим, что полученные нами значения критических индексов в интервале $k \in [0.0, 0.6]$ в пределах погрешности совпадают с соответствующими значениями критических индексов для нефрустрированной трехмерной модели Изинга [36]. Это свидетельствует о том, что исследуемая нами модель принадлежит к тому же классу универсальности критического поведения, что и трехмерная модель Изинга на кубической решетке.

В табл. 2 для сравнения приведены литературные данные для критических индексов, полученные в аналогичной модели. Видно, что наши результаты для интервала $k \in [0.0, 0.6]$ находятся в хорошем согласии как

Таблица 2. Значения критических индексов γ и ν для трехмерной антиферромагнитной модели Изинга на объемно концентрированной кубической решетке (литературные данные)

Литературная ссылка		Критический параметр	
		γ	ν
Теория	[11]	1.23742(20)	0.6308(10)
	[40]	1.2378(6)	0.6311(3)
	[41]	1.2380(50)	0.6305(25)
	[42]	1.2371(4)	0.63002(23)
Метод МК	[14]	1.25(2)	0.64(2)
	[43]	1.2367(11)	0.6296(7)
	[44]	1.237(2)	0.6301(8)
	[45]	1.2372(17)	0.6303(6)

с теоретическими данными [11,40–42], так и с данными других авторов, полученными методом МК [14,43–45]. Некоторые критические параметры для данной модели при различных значениях k рассчитаны нами впервые.

4. Заключение

Исследование фазовых переходов и критических свойств в трехмерной антиферромагнитной модели Изинга на объемно центрированной кубической решетке с учетом взаимодействия следующих за ближайшими соседей выполнено с использованием высокоэффективного репличного алгоритма метода Монте-Карло. Рассчитаны значения всех основных статических критических индексов в интервале $k \in [0.0, 1.0]$ с шагом $\Delta k = 0.1$, кроме случая $k = 0.7$. Установлены закономерности изменения критических параметров в рассмотренном интервале k. Обнаружено, что в интервале $k \in [0.0, 0.6]$ система проявляет универсальное критическое поведение, а в интервале значений $k \in [0.8, 1.0]$ наблюдается неуниверсальное критическое поведение.

Список литературы

[1] С.С. Сосин, Л.А. Прозорова, А.И. Смирнов. УФН **92** (2005).
[2] Вик.С. Доценко. УФН **165**, 481 (1995).
[3] С.Е. Коршунов. УФН **176**, 233 (2006).
[4] С.В. Малеев. УФН **172**, 617 (2002).
[5] M. Tisser, B. Delamotte, D. Mouhanna. Phys. Rev. Lett. **84**, 5208 (2000).
[6] P. Calabrese, P. Parruccini, A. Pelissetto, E. Vicari. Phys. Rev. B **70**, 174439 (2004).
[7] G. Zumbach. Nucl. Phys. B **413**, 771 (1994).
[8] A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari. Phys. Rev. B **63**, 140414(R) (2001).
[9] D.P. Landau, K. Binder. A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics. Cambridge University Press, Cambridge (2000). 384 p.
[10] P.H. Lundow, K. Markstrom, A. Rosengren. Phil. Mag. **89**, 2042 (2009).

[11] P. Butera, M. Comi. Phys. Rev. B **65**, 144431 (2002).
[12] P. Butera, M. Comi. Phys. Rev. B **72**, 014442 (2005).
[13] M. Plischke, J. Oitmaa. Phys. Rev. B **19**, 487 (1979).
[14] J.R. Banavar, D. Jasnow, D.P. Landau. Phys. Rev. B **20**, 3820 (1979).
[15] M.J. Velgakis, M. Ferer. Phys. Rev. B **27**, 401 (1983).
[16] А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Ф.А. Касан-Оглы, Д.Р. Курбанова. ЖЭТФ **147**, 127 (2015).
[17] H. Kawamura. J. Phys. Soc. Jpn. **61**, 1299 (1992).
[18] A. Mailhot, M.L. Plumer, A. Caille. Phys. Rev. B **50**, 6854 (1994).
[19] Л.Е. Свистов, А.И. Смирнов, Л.А. Прозорова, О.А. Петренко, А.Я. Шапиро, Л.Н. Демьянц. Письма в ЖЭТФ **80**, 231 (2004).
[20] А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев. ФНТ **37**, 1258 (2011).
[21] F.A. Kassan-Ogly, B.N. Filippov, A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, M.K. Badiev. J. Magn. Magn. Mater. **324**, 3418 (2012).
[22] А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев. ЖЭТФ **142**, 338 (2012).
[23] A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, M.K. Badiev. Physica B **476**, 1 (2015).
[24] F.A. Kassan-Ogly, A.K. Murtazaev, A.K. Zhuravlev, M.K. Ramazanov, A.I. Proshkin. J. Magn. Magn. Mater. **384**, 247 (2015).
[25] M.K. Ramazanov, A.K. Murtazaev, M.A. Magomedov. Solid State Commun. **233**, 35 (2016).
[26] А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев. ФТТ **52**, 1557 (2010).
[27] А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов. ФТТ **53**, 1004 (2011).
[28] A. Mitsutake, Y. Sugita, Y. Okamoto. Biopolymers Peptide Sci. **60**, 96 (2001).
[29] А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Ф.А. Касан-оглы, М.К. Бадиев. ЖЭТФ **144**, 1239 (2013).
[30] K. Binder, J.-Sh. Wang. J. Stat. Phys. **55**, 87 (1989).
[31] P. Peczak, A.M. Ferrenberg, D.P. Landau. Phys. Rev. B **43**,6087 (1991).
[32] F. Wang, D.P. Landau. Phys. Rev. Lett. **86**, 2050 (2001).
[33] F. Wang, D.P. Landau. Phys. Rev. E **64**, 056101 (2001).
[34] М.К. Рамазанов. Письма в ЖЭТФ **94**, 335 (2011).
[35] М.К. Рамазанов, А.К. Муртазаев. Письма в ЖЭТФ **101**, 793 (2015).
[36] J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980).
[37] Ch. Holm, W. Janke. Phys. Rev. B **48**, 936 (1993).
[38] Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. Мир, М. (1985). 488 с.
[39] G. Musial, J. Rogiers. Phys. Status. Solidi B **243**, 335 (2006).
[40] M.J. George, J.J. Rehr. Phys. Rev. Lett. **53**, 2063 (1984).
[41] R. Guida, J. Zinn-Justin. Nucl. Phys. B **489**, 626 (1997).
[42] M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Ross, E. Vicari. Phys. Rev. E **60**, 3526 (1999).
[43] M. Hasenbusch, K. Pinn, S. Vinti. Phys. Rev. B **59**, 11471 (1999).
[44] H.W.J. Blote, E. Luijten, J.R. Heringa. J. Phys. A **28**, 6289 (1995).
[45] H.W.J. Blote, L.N. Shchur, A.L. Talapov. Int. J. Mod. Phys. C **10**, 137 (1999).