01

Исследование соотношений взаимности для нелинейного многополюсника в неоднородном магнитном поле

© В.К. Игнатьев, С.В. Перченко¶

Волгоградский государственный университет,
400062 Волгоград, Россия
¶ e-mail: perchenko.sergey@gmail.com

(Поступило в Редакцию 20 июня 2016 г. В окончательной редакции 9 ноября 2016 г.)

На основе материального уравнения нелинейной неоднородной и нестационарной проводящей среды в приближении интеграла столкновений Ландау получены соотношения взаимности для матрицы нелинейных сопротивлений многополюсника, находящегося в неоднородном внешнем магнитном поле. Рассмотрен вопрос об измеряемых потенциалах выводов многополюсника в квазистационарном режиме. Предложен способ проверки полученных соотношений взаимности и приведены экспериментальные результаты. Показано, что в пределах погрешности электрических измерений соотношения взаимности для нелинейного многополюсника выполняются.

DOI: 10.21883/JTF.2017.06.44504.1942

Введение

Элементы магнетоэлектроники в общем случае можно рассматривать как параметрические многополюсники, осуществляющие интегральное преобразование сигналов вида свертки, ядром которого является системная функция, полностью описывающая все свойства элемента [1]. Сигнальным воздействием на такой многополюсник является в общем случае неоднородное внешнее магнитное поле, которое может быть существенно меньшим, чем магнитные поля, создаваемые протекающими по многополюснику токами. Выделить реакцию многополюсника на малое внешнее поле можно методом взаимности [2]. Однако преобразователи, применяемые в устройствах функциональной электроники, имеют нелинейные вольт-амперные характеристики. Соотношения же Онзагера симметрии кинетических коэффициентов [3] получены в линейном приближении для однородного магнитного поля. Возможность их применения для нелинейных систем требует обоснования.

Для стационарной, однородной и нелинейной проводящей среды, находящейся в однородном магнитном поле, в релаксационном приближении были получены соотношения взаимности для тензора нелинейной проводимости [4]. Однако их экспериментальная проверка не представляется возможной, так как измерительные зонды, вводимые в проводящую среду, исказят однородность полей в ней. Кроме того, протекающие токи создают в среде неоднородное магнитное поле. Без теоретического обоснования предложены соотношения взаимности для матрицы электрически измеряемых нелинейных сопротивлений четырехполюсника и проведена их экспериментальная проверка [5].

Получить универсальные соотношения взаимности для нелинейной системы в неоднородном магнитном поле без предположений о процессах в ней, видимо, не возможно [6]. Даже для неравновесных процессов в линейных системах соотношения взаимности постулируются [7]. Поэтому представляет интерес обосновать такие соотношения в наиболее общих предположениях для измеряемых с наивысшей точностью без возмущения процессов в самой системе величин. Такой системой может быть нелинейный многополюсник, процессы переноса в котором описываются кинетическим уравнением.

Материальное уравнение нелинейной среды

Основным механизмом релаксации носителей заряда проводимости является рассеяние на ионах, коллектив которых является термостатом для носителей заряда. Функция распределения $f_r(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}', R)$ ионов равновесная, определяется только температурой и не зависит от электрического и магнитного полей, а скорость ионов много меньше скорости носителей заряда проводимости. Тогда процессы переноса в такой среде описываются кинетическим уравнением Власова [8]

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + q_\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \hat{I}_\alpha(f_\alpha, f_r), \quad (1)$$

где

$$\hat{I}_\alpha = -\pi q_\alpha^2 q_r^2 L \frac{\partial}{\partial p_i} \int \left[f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{\partial f_r(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}')}{\partial p'_j} - f_r(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}') \frac{\partial f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial p_j} \right] \left(\delta_{ij} - \frac{p'_i p'_j}{p'^2} \right) \frac{m_\alpha d^3 p'}{p'} \quad (2)$$

— интеграл столкновений Ландау, q_r — заряд ионов решетки, $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ — функция распределения носителей заряда q_α, $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{p}/m_\alpha$ — их скорость, m_α — их эффективная масса, L — кулоновский логарифм. В дальнейшем зависимость функций распределения от температуры предполагается, но явно не указывается. Поскольку ионы решетки не участвуют в процессах переноса, их функция распределения $f_r(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}')$ рассматривается как независимая. Поэтому интеграл столкновений (2) линейно зависит от $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, и интегрально-дифференциальное уравнение (1) является линейным относительно функции распределения носителей заряда $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$.

В устойчивом состоянии среды, не испытывающей внешних воздействий, кроме электрического и магнитного полей и тех, которые могут быть описаны функцией распределения решетки $f_r(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}')$, функции распределения $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ для каждого сорта носителей заряда однозначно определяются заданными магнитным и электрическими полями. Это означает единственность решения интегрально-дифференциального уравнения (1).

Рассмотрим случай, когда поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ постоянные, однородные, не нулевые и не сонаправленные, и введем новые переменные

$$y_1 = \mathbf{rE}, \quad y_2 = \mathbf{rB}, \quad y_3 = \mathbf{r}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}], \tag{3}$$

$$z_1 = \mathbf{pE}, \quad z_2 = \mathbf{pB}, \quad z_3 = \mathbf{p}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}],$$

$$z_1' = \mathbf{p}'\mathbf{E}, \quad z_2' = \mathbf{p}'\mathbf{B}, \quad z_3' = \mathbf{p}'[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]. \tag{4}$$

Выразим импульс $\mathbf{p}$ и координату $\mathbf{r}$ как функцию векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а также переменных (3) и (4), которые являются скалярами и не преобразуются при поворотах системы координат:

$$\mathbf{r} = \frac{B^2y_1 - \mathbf{EB}y_2}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^2}\mathbf{E} + \frac{E^2y_2 - \mathbf{EB}y_1}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^2}\mathbf{B} + \frac{y_3[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^2}, \tag{5}$$

$$\mathbf{p} = \frac{B^2z_1 - \mathbf{EB}z_2}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^2}\mathbf{E} + \frac{E^2z_2 - \mathbf{EB}z_1}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^2}\mathbf{B} + \frac{z_3}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^2}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}],$$

$$\mathbf{p}' = \frac{B^2z_1' - \mathbf{EB}z_2'}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^2}\mathbf{E} + \frac{E^2z_2' - \mathbf{EB}z_1'}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^2}\mathbf{B} + \frac{z_3'}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^2}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]. \tag{6}$$

Преобразования (3)–(6) взаимно однозначны и

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{E}\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_1} + \mathbf{B}\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_2} + [\mathbf{E}\times\mathbf{B}]\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_3}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial\mathbf{p}} = \mathbf{E}\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_1} + \mathbf{B}\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_2} + [\mathbf{E}\times\mathbf{B}]\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_3},$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial\mathbf{p}'} = \mathbf{E}\frac{\partial F_r}{\partial z_1'} + \mathbf{B}\frac{\partial F_r}{\partial z_2'} + [\mathbf{E}\times\mathbf{B}]\frac{\partial F_r}{\partial z_3'}, \tag{8}$$

где функции распределения $F_\alpha(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ получаются из функций $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ заменой переменных (5) и (6). При этом

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = F_\alpha(t, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3),$$

$$f_r(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}') = F_r(t, y_1, y_2, y_3, z_1', z_2', z_3'). \tag{9}$$

Тогда уравнение (1) с учетом формул (3), (7)–(9) преобразуется к виду

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \frac{z_1}{m_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_1} + \frac{z_2}{m_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_2} + \frac{z_3}{m_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial y_3} + q_\alpha E^2\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_1} + \left(E^2 + \frac{y_3}{m_\alpha}\right)\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_1} + \mathbf{EB}\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_2} + \left(B^2y_1 - \mathbf{EB}y_2\right)\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_3} = \tilde{I}_\alpha(F_\alpha, F_r). \tag{10}$$

Здесь оператор $\tilde{I}_\alpha(F_\alpha, F_r)$ получается из оператора (2) заменой переменных (5) и (6). С учетом формул (4) якобиан преобразований (6) $J = |\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^{-2}$ и модуль импульса инвариантны относительно одновременной инверсии полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$J(-\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = J(\mathbf{E}, \mathbf{B}),$$

$$p'(z_1', z_2', z_3', -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = p'(z_1', z_2', z_3', \mathbf{E}, \mathbf{B}). \tag{11}$$

Преобразуем производные функций распределения в интеграле столкновений (2) с учетом формул (4) и (8)

$$p_i'p_j'\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial p_i\partial p_j} = z_1'^2\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial z_1^2} + z_2'^2\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial z_2^2} + z_3'^2\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial z_3^2} + 2z_1'z_2'\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial z_1\partial z_2} + 2z_1'z_3'\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial z_1\partial z_3} + 2z_2'z_3'\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial z_2\partial z_3}.$$

Остальные слагаемые в интеграле столкновений (2) вычисляются аналогично. Тогда из формулы (11) следует, что интеграл столкновений в правой части уравнения (10) тоже инвариантен относительно одновременной инверсии полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$\tilde{I}_\alpha(t, \mathbf{r}, -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = \tilde{I}_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{B}).$$

Следовательно, уравнение (10) в новых переменных (3) и (4) инвариантно относительно одновременной инверсии полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Ограничимся рассмотрением устойчивых состояний среды. Тогда единственное решение инвариантного относительно одновременной инверсии полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ уравнения (10) также инвариантно относительно одновременной инверсии полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$F_\alpha(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}, -\mathbf{E}, -\mathbf{B}) = F_\alpha(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{E}, \mathbf{B}). \tag{12}$$

Выполним в материальном уравнении среды

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \sum_\alpha \int \frac{q_\alpha c_\alpha \mathbf{p}}{m_\alpha} f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3p,$$

где c_α — концентрация носителей заряда q_α, замену переменных (6) с учетом формулы (9)

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = K_1(t, \mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{B})\mathbf{E} + K_2(t, \mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{B})\mathbf{B} + K_3(t, \mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{B})[\mathbf{E}\times\mathbf{B}], \tag{13}$$

где

$$K_1(t,\mathbf{r},\mathbf{E},\mathbf{B}) = \frac{1}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^4}\sum_\alpha \frac{c_\alpha q_\alpha}{m_\alpha}$$

$$\times \int \{B^2 z_1 - \mathbf{EB} z_2\} F_\alpha(t,\mathbf{y},\mathbf{z}) d^3 z,$$

$$K_2(t,\mathbf{r},\mathbf{E},\mathbf{B}) = \frac{1}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^4}\sum_\alpha \frac{c_\alpha q_\alpha}{m_\alpha}$$

$$\times \int \{E^2 z_2 - \mathbf{EB} y_1\} F_\alpha(t,\mathbf{y},\mathbf{z}) d^3 z,$$

$$K_3(t,\mathbf{r},\mathbf{E},\mathbf{B}) = \frac{1}{|\mathbf{E}\times\mathbf{B}|^4}\sum_\alpha \frac{c_\alpha q_\alpha}{m_\alpha}\int z_3 F_\alpha(t,\mathbf{y},\mathbf{z}) d^3 z.$$

Из формул (12) и (13) следует, что

$$K_n(t,\mathbf{r},\mathbf{E},\mathbf{B}) = K_n(t,\mathbf{r},-\mathbf{E},-\mathbf{B}), \quad n = 1, 2, 3.$$

Коэффициенты $K_n(\mathbf{E},\mathbf{B})$ не определены при $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{B} = 0$. В слабом электрическом поле $|\mathbf{E}| \ll E_T = \varphi_T/l_T$, где $\varphi_T = kT/q$ — тепловой потенциал основных носителей заряда, материальное уравнение стационарной, однородной и изотропной среды в магнитном поле имеет вид закона Ома, в котором к силе Кулона добавлена сила Лоренца

$$\mathbf{j} = cq\nu\left(\mathbf{E} + \frac{1}{cq}[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]\right),$$

где ν — подвижность основных носителей заряда. Решая это уравнение относительно вектора плотности тока $\mathbf{j}$, получим

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{1+|\nu\mathbf{B}|^2}\mathbf{E} + \frac{\sigma\nu^2(\mathbf{EB})}{1+|\nu\mathbf{B}|^2}\mathbf{B} + \frac{\sigma\nu}{1+|\nu\mathbf{B}|^2}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}], \quad (14)$$

где $\sigma = cq\nu$ — проводимость среды в нулевых электрическом и магнитном полях.

Сравнивая соотношения (13) и (14), запишем материальное уравнение нелинейной среды в виде

$$\mathbf{j}(t,\mathbf{r}) = \sigma\{1 + \alpha(t,\mathbf{r},\mathbf{E}/E_T,\nu\mathbf{B})\}\mathbf{E}$$

$$+ \sigma\nu E_T\beta(t,\mathbf{r},\mathbf{E}/E_T,\nu\mathbf{B})\mathbf{B}$$

$$+ \sigma\nu\gamma(t,\mathbf{r},\mathbf{E}/E_T,\nu\mathbf{B})[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]. \quad (15)$$

Здесь

$$\alpha(t,\mathbf{r},\mathbf{E}=0,\mathbf{B}=0) = \beta(t,\mathbf{r},\mathbf{E}=0,\mathbf{B}=0) = 0,$$

$$\gamma(t,\mathbf{r},\mathbf{E}=0,\mathbf{B}=0) = 1,$$

и в соответствии с формулой (11)

$$\alpha(t,\mathbf{r},-\mathbf{E},-\mathbf{B}) = \alpha(t,\mathbf{r},\mathbf{E},\mathbf{B}),$$

$$\beta(t,\mathbf{r},-\mathbf{E},-\mathbf{B}) = \beta(t,\mathbf{r},\mathbf{E},\mathbf{B}),$$

$$\gamma(t,\mathbf{r},-\mathbf{E},-\mathbf{B}) = \gamma(t,\mathbf{r},\mathbf{E},\mathbf{B}). \quad (16)$$

Квазистационарное приближение

Рассмотрим обобщенную конструкцию объемного многополюсника D с линейными размерами, много большими l_T, где l_T — средняя длина свободного пробега носителей заряда, с M контактами (S_m, $m = 1, 2, \ldots, M$). Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}'$ — полная индукция магнитного поля в элементе, $\mathbf{B}_e$ — поле, созданное внешними источниками, $\mathbf{B}'$ — поле токов, текущих через многополюсник. При этом

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}_e = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B}' = \mu_0\mathbf{j}. \quad (17)$$

Материальное уравнение (15) получено для однородных и постоянных электрического и магнитного полей и является локальным. Нелокальность проявляется, когда поля существенно меняются на расстоянии порядка длины сводного пробега. Если $|\partial E_i/\partial r_j| \ll |\mathbf{E}|/l_T$, $|\partial B_i/\partial r_j| \ll |\mathbf{B}|/l_T$, $i, j = 1, 2, 3$, эффектом нелокальности можно пренебречь и считать, что

$$|\operatorname{grad}\alpha| \ll |\alpha|/l_T, \ |\operatorname{grad}\beta| \ll |\beta|/l_T, \ |\operatorname{grad}\gamma| \ll |\gamma|/l_T.$$

В квазистационарном случае, когда ток смещения много меньше тока проводимости, диэлектрическая и магнитная проницаемости среды являются константами, уравнение непрерывности $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ с учетом материального уравнения (15) в безразмерных координатах $\mathbf{x} = \mathbf{r}/l_T$ принимает вид

$$\Delta\varphi = -\mu_0\sigma\nu\gamma\,|\nabla\varphi|^2 - \frac{\mu_0\varphi_T\sigma\nu\beta\gamma}{1+\alpha}\nabla(\varphi)\mathbf{b}, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad (19)$$

φ — электростатический потенциал, $\mathbf{b} = \nu\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал в кулоновской калибровке $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, а оператор ∇ берется по безразмерным координатам $\mathbf{x}$. Второе уравнение (17) в кулоновской калибровке принимает вид $\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j}$, его решение

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_D \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 r. \quad (20)$$

Пусть в область D, ограниченную поверхностью S, через соответствующие контактные поверхности S_m втекают токи I_m. Условие для нормальной компоненты плотности тока на границе S имеет вид

$$j_n(\mathbf{x})\big|_S = -\frac{1}{l_T^2}\sum_{m=1}^{M} I_m g_m(\mathbf{x}), \quad (21)$$

где $g_m(\mathbf{x})$ — функция-носитель поверхности S_m:

$$\oint_{S_m} g_m(\mathbf{x}) ds = 1, \quad g_m(\mathbf{x} \notin S_m) \equiv 0. \quad (22)$$

Из уравнения (18) в этом случае следует, что распределение потенциала является решением внутренней смешанной задачи, когда на границе области задана линейная комбинация нормальной и тангенциальной производных потенциала

$$\left((1+\alpha)\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \beta\nu\varphi_T\mathbf{Bn} + \gamma\nu\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\times\mathbf{B}\right]\mathbf{n}\right.$$
$$\left. + (1+\alpha)\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\mathbf{n}\right)\Bigg|_S = -\frac{1}{\sigma l_T}\sum_{m=1}^{M} I_m g_m(\mathbf{x}), \qquad (23)$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль поверхности S.

Примем за ноль средний по поверхности S тела D электростатический потенциал и будем искать совместное решение уравнений (18) и (20) с граничными условиями (23) методом последовательных приближений. Перейдем к безразмерным величинам

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_T\psi(\mathbf{x}), \quad \psi(\mathbf{x}) = \psi_0(\mathbf{x}) + \delta\psi_1(\mathbf{x}) + \ldots,$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \varphi_T\mathbf{e}(\mathbf{x})/l_T, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = l_T\mathbf{a}(\mathbf{x})/\nu$$
$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_0(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{e}_1(\mathbf{x}) + \ldots,$$
$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{a}_1(\mathbf{x}) + \ldots,$$
$$\mathbf{b}'(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_0(\mathbf{x}) + \delta\mathbf{b}_1(\mathbf{x}) + \ldots,$$

где

$$\delta = \mu_0\varphi_T\sigma\nu, \quad 0 < \delta < 1, \quad \alpha_0 = \alpha(\mathbf{e}_0, \mathbf{b}_0),$$
$$\beta_0 = \beta(\mathbf{e}_0, \mathbf{b}_0), \quad \gamma_0 = \gamma(\mathbf{e}_0, \mathbf{b}_0).$$

В линейном по слабому внешнему полю $|\mathbf{B}_e| \ll 1/\nu$ приближении уравнения (18) и (23) эквивалентны цепочке краевых задач Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона,

$$\Delta\psi_0 = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial n}\bigg|_S = -\frac{1}{I_T}\sum_{m=1}^{M} I_m g_m(\mathbf{x}), \qquad (24)$$

$$\nabla\times\mathbf{b}_0 = -\delta(1+\alpha_0)\nabla\psi_0 + \delta\beta_0\mathbf{b}_0 - \delta\gamma_0[\nabla\psi_0\times\mathbf{b}_0],$$
$$\nabla\mathbf{b}_0 = 0, \quad \nabla\times\mathbf{b}_e = 0, \quad \nabla\mathbf{b}_e = 0, \qquad (25)$$

$$\nabla\psi_1 = -\gamma_0|\nabla\psi_0|^2 - \frac{\gamma_0\beta_0}{1+\alpha_0}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_e)\nabla\psi_0,$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\bigg|_S = -\frac{\gamma_0}{\delta(1+\alpha_0)}\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{x}}\times(\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_e)\right]n\bigg|_S$$
$$+\frac{\beta_0(\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_e)\mathbf{n}}{\delta(1+\alpha_0)}\bigg|_S - \frac{\alpha_0\mathbf{n}}{\delta(1+\alpha_0)}\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{x}}\bigg|_S - \frac{\partial\mathbf{an}}{\partial\tau}\bigg|_S, \qquad (26)$$

где обозначено $I_T = \sigma\varphi_T l_T$, $\tau = \frac{\nu\varphi_T}{l_T^2}t$ — безразмерное время.

Решение внутренней краевой задачи (24) при выполнении вытекающего из первого закона Кирхгофа условия

$$\oint_S \sum_{m=1}^{M} I_m g_m(\mathbf{x})ds = 0$$

существует и имеет вид

$$\psi_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{I_T}\sum_{m=1}^{M} I_m \oint_S G(\mathbf{x},\mathbf{x}')g_m(\mathbf{x}')ds' + C, \qquad (27)$$

где $G(\mathbf{x}\in D, \mathbf{x}'\in D)$ — функция Грина задачи Неймана для области D, ограниченной поверхностью S, C — константа, которая определяется при выборе нулевого потенциала [9]. Поскольку за ноль принят средний по поврехности тела S потенциал, из формул (21) и (27) следует, что

$$-\frac{l_T^2}{I_T}\oint_S\left[\oint_S G(\mathbf{x},\mathbf{x}')ds\right]j_n(\mathbf{x}')ds' + CS = 0.$$

При выполнении дополнительного условия

$$\oint_S G(\mathbf{x},\mathbf{x}')ds = 0$$

получаем $C = 0$, а функция Грина задачи Неймана, удовлетворяющая этому условию, является единственной и симметричной [9]:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}') = G(\mathbf{x}',\mathbf{x}). \qquad (28)$$

Поскольку поле $\mathbf{B}'(\mathbf{r})$ создается только токами в области D, уравнение (20) для безразмерных величин в первом приближении, когда холловский ток много меньше тока проводимости, имеет вид

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x}) = -\frac{\delta}{4\pi}\int_D \frac{\partial\psi_0(\mathbf{x}')/\partial\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x',$$

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{x}) = -\frac{\delta}{4\pi}\int_D\left[\frac{\partial\psi_0(\mathbf{x}')}{\partial\mathbf{x}'}\times\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\right]d^3x'. \qquad (29)$$

Введем M-мерный вектор $\mathbf{I}$ с компонентами $I_1, \ldots, I_M$. Из уравнений (27) следует, что $\psi_0(\mathbf{x},\mathbf{I}) = -\psi_0(\mathbf{x},-\mathbf{I})$. Тогда с учетом формул (19) и (28) получим

$$\mathbf{a}_0(\mathbf{x},\mathbf{I}) = \mathbf{a}_0(\mathbf{x},-\mathbf{I}), \quad \mathbf{b}_0(\mathbf{x},\mathbf{I}) = \mathbf{b}_0(\mathbf{x},-\mathbf{I}),$$
$$\mathbf{e}_0(\mathbf{x},\mathbf{I}) = \mathbf{e}_0(\mathbf{x},-\mathbf{I}),$$
$$\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{I}) = \alpha_0(\mathbf{x},-\mathbf{I}), \quad \beta_0(\mathbf{x},\mathbf{I}) = \beta_0(\mathbf{x},-\mathbf{I}),$$
$$\gamma_0(\mathbf{x},\mathbf{I}) = \gamma_0(\mathbf{x},-\mathbf{I}),$$
$$\mathbf{e}_0(\mathbf{x},0) = 0, \quad \mathbf{b}_0(\mathbf{x},0) = 0,$$
$$\alpha_0(\mathbf{x},0) = 0, \quad \beta_0(\mathbf{x},0) = 0, \quad \gamma_0(\mathbf{x},0) = 1. \qquad (30)$$

Если многополюсник D электрически нейтрален, то поток вектора $\mathbf{e}_0$ через его поверхность S по теореме

Гаусса равен нулю. Поток вектора $\mathbf{b}_0$ через поверхность S тела всегда равен нулю. Тогда с учетом уравнений (15), (19) и (25) в кулоновской калибровке получаем

$$\frac{1}{\delta}\oint\limits_S \frac{\gamma_0}{1+\alpha_0}[\nabla\psi_0 \times (\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_e)]d\mathbf{s} + \oint\limits_S \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau}\,d\mathbf{s}$$

$$= \int\limits_D \frac{\gamma_0}{1+\alpha_0}\left|\nabla\psi_0\right|^2 d^3r + \int\limits_D \frac{\gamma_0\beta_0}{1+\alpha_0}(\nabla\psi_0)(\mathbf{b}_0+\mathbf{b}_e)d^3r.$$

Таким образом, условие разрешимости краевой задачи (26) выполняется, и ее решение имеет вид [9]

$$\psi_1(\mathbf{x}) = \int\limits_D \gamma_0(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\left\{\left|\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{x}'}\right|^2 + \frac{1}{\delta}\,\frac{\beta_0(\mathbf{x}')}{1+\alpha_0(\mathbf{x}')}\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{x}'}\big(\mathbf{b}_0(\mathbf{x}')+\mathbf{b}_e(\mathbf{x}')\big)\right\}d^3x' + \frac{1}{\delta}\oint\limits_S \frac{\alpha_0(\mathbf{x}')}{1+\alpha_0(\mathbf{x}')}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$$

$$\times\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{x}'}\,d\mathbf{s}' - \frac{1}{\delta}\oint\limits_S \frac{\beta_0(\mathbf{x}')}{1+\alpha_0(\mathbf{x}')}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\big(\mathbf{b}_0(\mathbf{x}')+\mathbf{b}_e(\mathbf{x}')\big)d\mathbf{s}'$$

$$+\frac{1}{\delta}\oint\limits_S \frac{\gamma_0(\mathbf{x}')}{1+\alpha_0(\mathbf{x}')}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\left[\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{x}'}\times\big(\mathbf{b}_0(\mathbf{x}')+\mathbf{b}_e(\mathbf{x}')\big)\right]d\mathbf{s}'$$

$$+\frac{\partial}{\partial\tau}\oint\limits_S G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\mathbf{a}(\mathbf{x}')\,d\mathbf{s}'.$$

Преобразуя поверхностные интегралы в интегралы по объему D и учитывая формулу (27), получим окончательное выражение для потенциала ψ:

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{I_T}\sum_{m=1}^{M} I_m \oint\limits_S G(\mathbf{x},\mathbf{x}')g_m(\mathbf{x}')ds'$$

$$+\int\limits_D \frac{\gamma_0(\mathbf{x}')\big(\nu\mathbf{B}_e(\mathbf{x}')-\mathbf{b}_0(\mathbf{x}')\big)}{1+\alpha_0(\mathbf{x}')}\left[\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial\mathbf{x}'}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{x}'}\right]d^3x'$$

$$+\int\limits_D \frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial\mathbf{x}'}\left\{\frac{\partial\mathbf{a}(\mathbf{x}')}{\partial\tau} - \frac{1}{1+\alpha_0(\mathbf{x}')}\Big(\beta_0(\mathbf{x}')\nu\mathbf{B}_e(\mathbf{x}')\right.$$

$$\left.-\beta_0(\mathbf{x}')\mathbf{b}_0(\mathbf{x}')+\alpha_0(\mathbf{x}')\,\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{x}'}\Big)\right\}d^3x' + C. \qquad (31)$$

Измеряемые потенциалы и взаимность

Формула (30) совместно с формулами (27) и (28) позволяет получить потенциал внутри и на поверхности многополюсника. Однако места контактов, к которым прикреплены проводники, не могут рассматриваться как точечные. Измеряемое напряжение при этом равно разности потенциалов между сечениями проводников, подводимых к многополюснику, выбранными на некотором расстоянии от активной зоны элемента.

Пусть к контакту с номером k подключен измеритель напряжения, через который в общую шину течет ток I_k. Будем считать, что через боковую поверхность провода ток не течет, а вольтметр подключен к достаточно удаленному от активной зоны преобразователя сечению, которое является эквипотенциальным. Мощность тепловых потерь в подводящем проводе с учетом условия $\operatorname{div}(\mathbf{j}) = 0$ и формул (21) и (22) имеет вид

$$\frac{dQ}{dt} = l_T^3\int\limits_{Ck}\mathbf{j}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x})d^3x$$

$$= I_k\bigg(\varphi_k - \oint\limits_S \varphi(\mathbf{x})g_k(\mathbf{x})ds\bigg) = I_k^2 R_{Uk}.$$

Здесь C_k — внутренняя область проводника, подсоединенного к k-й площадке, R_{Uk} — его омическое сопротивление, φ_k — потенциал на эквипотенциальном сечении проводника, удаленном от магнитоактивной зоны. Отсюда

$$\varphi_k - \oint\limits_S \varphi(\mathbf{x})g_k(\mathbf{x})ds = I_k R_{Uk}.$$

Для потенциала, измеряемого идеальным вольтметром при токе I_k, стремящемся к нулю, получаем

$$\varphi_k = \varphi_T \oint\limits_S g_k(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})ds.$$

Используя соотношения (31) и (22), получим

$$\varphi_k(\mathbf{I},\mathbf{B}_e) = \sum_{m=1}^{M} R_{km}(\mathbf{I},\mathbf{B}_e)I_m + \sum_{m=1}^{M} L_{km}\,\frac{dI_m}{dt} + C, \qquad (32)$$

где в приближении малого поля в соответствии с формулами (30)

$$\frac{\beta_0(\mathbf{e}_0,\mathbf{b}_0)}{1+\alpha_0(\mathbf{e}_0,\mathbf{b}_0)} = h_1\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0 + h_2\mathbf{e}_0\mathbf{b}_0 + h_3\mathbf{b}_0\mathbf{b}_0 + \ldots\ .$$

Тогда

$$R_{km}(\mathbf{I},\mathbf{B}_e) = R_{km}^{A} + R_{km}^{H}(\mathbf{B}_e) + R_{km}^{NL}(\mathbf{I},\mathbf{B}_e), \qquad (33)$$

$$R_{km}^{A} = R_T \oint\limits_S \oint\limits_S g_k(\mathbf{x})g_m(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')dsds', \qquad (34)$$

$$R_{km}^{H}(\mathbf{B}_e) = \nu R_T\int\limits_D \mathbf{B}_e(\mathbf{x}')\oint\limits_S\oint\limits_S\left[\frac{\partial G(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')}{\partial\mathbf{x}'}\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{x}')}{\partial\mathbf{x}'}\right]g_k(\mathbf{x})g_m(\mathbf{x}'')dsds''d^3x', \qquad (35)$$

$$R_{km}^{NL}(\mathbf{I}) = \widehat{R}_{km}^{NL}(\mathbf{I}) + \breve{R}_{km}^{NL}(\mathbf{I}), \qquad (36)$$

$$\widehat{R}^{NL}_{km}(\mathbf{I}) = R_T \int\limits_D \frac{\gamma_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})\mathbf{b}_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}{1+\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}$$

$$\times \oint\limits_S \oint\limits_S \left[\frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'}\right] g_k(\mathbf{x}) g_m(\mathbf{x}'') ds ds'' d^3x'$$

$$+ R_T \int\limits_D \frac{\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}{1+\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})} \oint\limits_S \oint\limits_S \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial \mathbf{x}'}$$

$$\times \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} g_k(\mathbf{x}) g_m(\mathbf{x}'') ds ds'' d^3x' + \frac{\delta R_T}{4\pi}$$

$$\times \int\limits_D \int\limits_D \frac{\beta_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}{1+\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})} \oint\limits_S \oint\limits_S \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}'''}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'''|^3} \left[\frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial \mathbf{x}'}\right.$$

$$\left. \times \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'}\right] g_k(\mathbf{x}) g_m(\mathbf{x}'') ds ds'' d^3x' dx''', \tag{37}$$

$$\breve{R}^{NL}_{km}(\mathbf{I}) = \nu R_T \int\limits_D \left\{1 - \frac{\gamma_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}{1+\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}\right\}$$

$$\times \mathbf{B}_e(\mathbf{x}') \oint\limits_S \oint\limits_S \left[\frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'}\right]$$

$$\times g_k(\mathbf{x}) g_m(\mathbf{x}'') ds ds'' d^3x' - \nu R_T$$

$$\times \int\limits_D \{h_1 \mathbf{e}_0(\mathbf{x}') + h_2 \mathbf{b}_0(\mathbf{x}')\} \mathbf{B}_e(\mathbf{x}')$$

$$\times \oint\limits_S \oint\limits_S \frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'}$$

$$\times g_k(\mathbf{x}) g_m(\mathbf{x}'') ds ds'' d^3x' - \frac{\nu R_T \delta}{4\pi}$$

$$\times \int\limits_D \int\limits_D h_3 \mathbf{b}_0(\mathbf{x}') \mathbf{B}_e(\mathbf{x}') \oint\limits_S \oint\limits_S \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}'''}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'''|^3}$$

$$\times \left[\frac{\partial G(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')}{\partial \mathbf{x}'} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'}\right]$$

$$\times g_k(\mathbf{x}) g_m(\mathbf{x}'') ds ds'' d^3x' d^3x''', \tag{38}$$

$$L_{km} = \frac{\mu_0 l_T}{4\pi} \int\limits_D \int\limits_D \oint\limits_S \oint\limits_S \frac{\partial G(\mathbf{x}''', \mathbf{x}'')}{\partial x'''} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x'}$$

$$\times \frac{g_k(\mathbf{x}) g_m(\mathbf{x}'')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'''|} ds ds'' d^3x' dx''' \tag{39}$$

и обозначено $R_T = \varphi_T / I_T$. Тогда из уравнений (34) и (29) непосредственно следует, что

$$R^A_{km} = R^A_{mk}. \tag{40}$$

Преобразуя внутренний двойной поверхностный интеграл в уравнении (35) в произведение поверхностного интеграла по переменной $\mathbf{x}''$ на поверхностный интеграл по переменной $\mathbf{x}$, получим с учетом условия (28)

$$R^H_{km} = \nu R_T \int\limits_D \mathbf{B}_e(\mathbf{x}')[\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}') \times \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{x}')] d^3x', \tag{41}$$

где обозначено

$$\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}') = \oint\limits_S \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} g_m(\mathbf{x}) ds. \tag{42}$$

Из соотношения (41) видно, что

$$R^H_{km}\big(\mathbf{B}_e(\mathbf{r})\big) = R^H_{mk}\big(-\mathbf{B}_e(\mathbf{r})\big) = -R^H_{mk}\big(\mathbf{B}_e(\mathbf{r})\big). \tag{43}$$

Аналогичными преобразованиями интегралы в правой части формул (37)–(39) с учетом условия (28) приводятся к виду

$$\widehat{R}^{NL}_{km} = R_T \int\limits_D \frac{\gamma_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})\mathbf{b}_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}{1+\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})} [\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}') \times \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{x}')] d^3x'$$

$$+ R_T \int\limits_D \frac{\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}{1+\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})} \mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}')\mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{\delta R_T}{4\pi}$$

$$\times \int\limits_D \int\limits_D \frac{\beta_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}{1+\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})} \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|^3} [\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}') \times \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{x}''')] d^3x' d^3x'',$$

$$\breve{R}^{NL}_{km} = \nu R_T \int\limits_D \frac{1+\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I}) - \gamma_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})}{1+\alpha_0(\mathbf{x}', \mathbf{I})} \mathbf{B}_e(\mathbf{x}')$$

$$\times [\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}') \times \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{x}')] d^3x' + \nu R_T$$

$$\times \int\limits_D \{h_1 \mathbf{e}_0(\mathbf{x}') + h_2 \mathbf{b}_0(\mathbf{x}')\} \mathbf{B}_e(\mathbf{x}') \mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}') \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{x}') d^3x'$$

$$- \frac{\nu R_T \delta h_3}{4\pi} \int\limits_D \int\limits_D \mathbf{b}_0(\mathbf{x}') \mathbf{B}_e(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|^3}$$

$$\times [\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}') \times \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{x}''')] d^3x' d^3x'',$$

$$L_{km} = L_T \int\limits_D \int\limits_D \frac{\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}')\mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{x}''')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} d^3x' d^3x'' = L_{mk}, \tag{44}$$

где обозначено $L_T = \frac{\mu_0 l_T}{4\pi}$. Тогда с учетом условия (31) получаем

$$R^{NL}_{km}(\mathbf{I}, \mathbf{B}_e) = R^{NL}_{mk}(-\mathbf{I}, -\mathbf{B}_e). \tag{45}$$

Из соотношений (40), (43) и (45) следует условие взаимности для матрицы нелинейных сопротивлений многополюсника в неоднородном внешнем магнитном поле

$$R_{km}\big(\mathbf{I}, \mathbf{B}_e(\mathbf{r})\big) = R_{mk}\big(-\mathbf{I}, -\mathbf{B}_e(\mathbf{r})\big). \tag{46}$$

Методика измерений

Формула (33) представляет матрицу нелинейных сопротивлений многополюсника в виде суммы матрицы линейных сопротивлений (34), элементы которой не зависят ни от токов, ни от внешнего поля, матрицы линейных сопротивлений (35), элементы которой пропорциональны внешнему магнитному полю и не зависят от токов, и матрицы нелинейных сопротивлений (36), элементы которой зависят от токов, но не зависят от внешнего магнитного поля. Однако провести экспериментальную проверку непосредственно соотношений (40), (43) и (45) невозможно, так как потенциалы φ_k в формуле (32) отсчитаны от среднего по поверхности тела потенциала, который сам зависит от втекающих в тело токов.

Выберем произвольный фиксированный путь C_{kn}, проходящий между k-м и n-м контактами многополюсника вне него. Тогда с учетом формул (19), (29) и (32) для напряжения U_{kn} между этими зажимами получаем

$$U_{kn}(\mathbf{I},\mathbf{B}_e)=\int\limits_{C_{kn}}\mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\varphi_k-\varphi_n-\frac{d}{dt}\int\limits_{C_{kn}}A(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

$$=\sum_{m=1}^{M}\{R_{km}(\mathbf{I},\mathbf{B}_e)-R_{nm}(\mathbf{I},\mathbf{B}_e)\}I_m$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\{L_{km}-L_{nm}-L_{knm}\}\frac{dI_m}{dt}+U^e_{kn}. \qquad (47)$$

Здесь

$$L_{knm}=L_T\int\limits_{C_{kn}}\int\limits_{D}\frac{\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,d\mathbf{x}d^3x', \quad U^e_{kn}=\frac{d}{dt}\int\limits_{C_{kn}}\mathbf{A}_e(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

— не зависящее от токов I_m напряжение, создаваемое внешним переменным магнитным полем $\mathbf{B}_e$. Слагаемые U^e_{kn} в уравнениях (47) можно исключить, повторив измерения напряжений в холостом режиме при нулевом токе через контакты.

На практике постоянные токи и напряжения задаются и измеряются гораздо точнее, чем переменные. Поэтому экспериментальную проверку соотношений (40), (43) и (45) следует проводить в режиме постоянного тока, например для преобразователя Холла, геометрия которого приведена на рис. 1.

Проверку соотношений взаимности для нелинейного четырехполюсника целесообразно проводить тем же методом, как и для линейного — при разрыве на одной из сторон в двух режимах измерений:

1) Контакты *1* и *3* подключены к источнику тока i_k, между контактами *2* и *4* измеряется напряжение $u_1=\varphi_2^{(1)}-\varphi_4^{(1)}$, при этом $I_1=i_k$, $I_3=-i_k$, $I_2=I_4=0$.

2) Контакты *2* и *4* подключены к источнику тока i_k, между контактами *1* и *3* измеряется напряжение $u_2=\varphi_1^{(2)}-\varphi_3^{(2)}$, при этом $I_2=i_k$, $I_4=-i_k$, $I_1=I_3=0$.

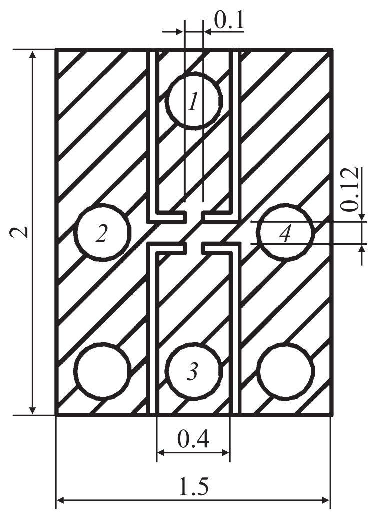

Рис. 1. Геометрия преобразователя Холла; размеры приведены в миллиметрах.

Измерения в режимах *1* и *2* выполняются при нескольких значения тока i_k, $k=1,\dots,K$, $-i_0\le I_k\le i_0$, по их результатам методом наименьших квадратов аппроксимируются полиномами ВАХ

$$\tilde{u}_1(i)=\{u_1(i)-u_1(-i)\}/2=a_1i+a_2i^3+\dots\,,$$

$$\tilde{u}_2(i)=\{u_2(i)-u_2(-i)\}/2=b_1i+b_2i^3+\dots \qquad (48)$$

и строятся функции

$$\tilde{R}(i)=\frac{\tilde{u}_1(i)}{i}=a_1+a_2i^2+a_3i^4+\dots\,,$$

$$\tilde{R}_2(i)=\frac{\tilde{u}_2(i)}{i}=b_1+b_2i^2+b_3i^4+\dots\,. \qquad (49)$$

При этом число отсчетов K должно в несколько раз превышать степень полиномов аппроксимации.

Для слабого внешнего поля $|\mathbf{B}_e|\ll 1/\nu$ справедливо линейное приближение

$$R^{NL}_{km}(\mathbf{I},\mathbf{B}_e)=R^{NL}_{mk}(\mathbf{I})+\mathbf{H}_{km}(\mathbf{I})\mathbf{B}_e.$$

Тогда из формулы (46) следует, что

$$R^{NL}_{mk}(\mathbf{I})=R^{NL}_{mk}(-\mathbf{I}),\quad \mathbf{H}_{km}(\mathbf{I})=-\mathbf{H}_{mk}(\mathbf{I}). \qquad (50)$$

Из формул (32) и (33), в свою очередь, следует, что

$$a_1(\mathbf{B}_e)=R^{(1)}_{21}(\mathbf{B}_e)-R^{(1)}_{23}(\mathbf{B}_e)+R^{(1)}_{43}(\mathbf{B}_e)$$

$$-R^{(1)}_{41}(\mathbf{B}_e)=R^A_1+R^H_1(\mathbf{B}_e),$$

$$b_1(\mathbf{B}_e)=R^{(1)}_{12}(\mathbf{B}_e)-R^{(1)}_{14}(\mathbf{B}_e)+R^{(1)}_{34}(\mathbf{B}_e)$$

$$-R^{(1)}_{32}(\mathbf{B}_e)=R^A_2+R^H_2(\mathbf{B}_e), \qquad (51)$$

$$R^A_1=R^A_{21}-R^A_{23}+R^A_{43}-R^A_{41},$$

$$R^A_2=R^A_{12}-R^A_{14}+R^A_{34}-R^A_{32},$$

$$R_1^H(\mathbf{B}_e) = R_{21}^H(\mathbf{B}_e) - R_{23}^H(\mathbf{B}_e) + R_{43}^H(\mathbf{B}_e) - R_{41}^H(\mathbf{B}_e),$$
$$R_2^H(\mathbf{B}_e) = R_{12}^H(\mathbf{B}_e) - R_{14}^H(\mathbf{B}_e) + R_{34}^H(\mathbf{B}_e) - R_{32}^H(\mathbf{B}_e).$$

Из формул (40), (43) и (45) следует, что

$$R_1^A = R_2^A = R_A, \quad R_1^H(\mathbf{B}_e) = -R_2^H(\mathbf{B}_e) = R_H(\mathbf{B}_e), \quad (52)$$

где

$$R_A = \frac{a_1(\mathbf{B}_e) + b_1(\mathbf{B}_e)}{2}, \quad R_H(\mathbf{B}_e) = \frac{a_1(\mathbf{B}_e) - b_1(\mathbf{B}_e)}{2}. \quad (53)$$

Соотношения (52) нельзя проверить при одном значении тока, так как по результатам измерения двух величин u_1, u_2 не возможно определить четыре величины R_1^A, R_2^A, R_1^H, R_2^H. Но, согласно условию (50), функции

$$r_1(i) = \tilde{R}_1(i) - a_1 = a_2 i^2 + a_3 i^4 + \ldots\ ,$$
$$r_2(i) = \tilde{R}_2(i) - b_1 = b_2 i^2 + b_3 i^4 + \ldots \quad (54)$$

от внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_e$ не зависят. Поэтому при выполнении соотношений (40), (43) и (45) из формул (51) и (54) следует, что величина R_A не зависит ни от тока i, ни от внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_e$, а величина R_H не зависит от тока i и пропорциональна внешнему магнитному полю $\mathbf{B}_e$. Поэтому оценкой точности выполнения соотношений (52) может служить относительное среднеквадратичное отклонение величин R_A и R_H, полученное по K значениям тока

$$\overline{R}_{A/H} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} R_{A/H}(i_k).$$

$$\delta[R_{A/H}] = \sqrt{\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left(R_{A/H}(i_k) - \overline{R}_{A/H}\right)^2}. \quad (55)$$

Эксперимент

Экспериментальная проверка соотношений взаимности производилась для преобразователей Холла серии ПХЭ фирмы ООО „Сенсор", имеющих высокую крутизну преобразования порядка 1 V/T и существенную нелинейность ВАХ. Для измерения ВАХ в экспериментальной установке использовались прецизионный измеритель напряжения и однополярный источник стабильного тока. Для обеспечения измерений при отрицательных значениях тока через преобразователь Холла использовалась система коммутации направления тока. Для проверки влияния магнитного поля на коэффициенты $a_1(\mathbf{B}_e)$ и $b_1(\mathbf{B}_e)$, определенных в формуле (51), использовались кольца Гельмгольца с источником стабильного тока. Для уменьшения влияния геомагнитного поля на результаты измерений преобразователь Холла и кольца Гельмгольца были помещены в центр пермаллоевого экрана толщиной 1.5 mm, выполненный в виде отрезка трубы диаметром 140 mm и длинной 405 mm. На торцах трубы были установлены заглушки, выполненные из магнитомягкой стали толщиной 8 mm. Экспериментальная установка позволяет измерять напряжения с потенциальных и токовых контактов преобразователя в диапазоне $-500{-}500\,\mu$V и среднеквадратичном отклонении порядка 10 nV, при токе через преобразователь $1{-}100$ mA и индукции внешнего магнитного поля до 1 mT.

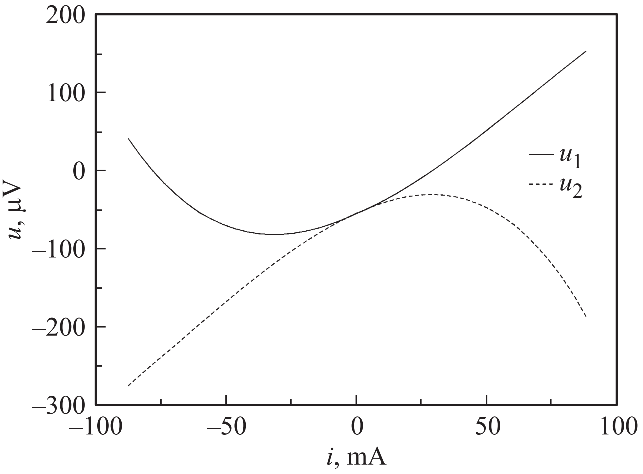

Рис. 2. Экспериментальные зависимости напряжений на потенциальных и токовых контактах от протекающего через датчик тока.

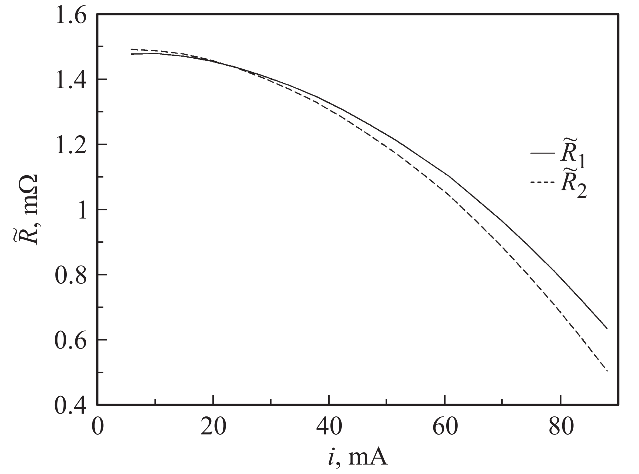

Рис. 3. Экспериментальные зависимости функций $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ от протекающего через датчик тока.

Для проверки соотношений взаимности использовался преобразователь Холла ПХЭ 606117А. Сначала были измерены зависимости напряжений $u_1(i)$ и $u_2(i)$ от протекающего через преобразователь Холла тока при отключенных кольцах Гельмгольца. Из приведенных на рис. 2 результатов видно, что исследуемый преобразователь обладает значительной нелинейностью ВАХ в допустимом диапазоне управляющих токов. Напряжение смещения установки порядка $-50\,\mu$V не влияет на вычисляемые по формуле (48) величины. Далее по

B_e, μT	$\tilde{R}_1(0)$, mΩ	$\tilde{R}_1(i_0)$, mΩ	$\tilde{R}_2(0)$, mΩ	$R_2(i_0)$, mΩ	R_A, mΩ	$\delta[R_A]$, mΩ	R_H, mΩ	$\delta[R_H]$, mΩ
0	1.437	0.634	1.436	0.504	1.521	0.001	−0.010	0.000
−10	1.315	0.502	1.508	0.581	1.493	0.004	−0.106	0.000
+10	1.511	0.709	1.316	0.386	1.495	0.003	0.087	0.001
−50	1.035	0.245	1.785	0.860	1.496	0.004	−0.384	0.001
+50	1.791	0.988	1.037	0.112	1.498	0.003	0.365	0.001
−100	0.688	−0.109	2.135	1.197	1.493	0.002	−0.732	0.002
+100	2.134	1.333	0.685	−0.234	1.495	0.003	0.713	0.002
−300	−0.701	−1.478	3.539	2.597	1.503	0.003	−2.125	0.006
+300	3.532	2.714	−0.706	−1.617	1.497	0.002	2.103	0.006

формуле (49) были построены зависимости функции $\tilde{R}_1(i)$ и $\tilde{R}_2(i)$ от протекающего через преобразователь Холла тока, представленные на рис. 3.

Полученные зависимости были аппроксимированы полиномом пятого порядка согласно выражению (49), и по полученным данным построены корректировочные зависимости (54). С использованием этих зависимостей по формуле (53) были найдены сопротивления Холла R_H и асимметрии R_A. В диапазоне рабочих токов 25−100 mA полученные сопротивления не зависят от тока с относительной погрешностью порядка $7 \cdot 10^{-4}$, что соответствует погрешности производимых измерений.

Далее были проведены измерения при наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_e$, создаваемого кольцами Гельмгольца. При анализе данных использовались полиномы, полученные на этапе калибровки. Значения функций (49) при нулевом и максимальном токах, а также рассчитанные по формулам (53) и (54) значения сопротивлений Холла R_H и асимметрии R_A и их среднеквадратичные отклонения от среднего приведены в таблице.

При аппроксимации методом наименьших квадратов зависимости сопротивления Холла от индукции внешнего магнитного поля получена крутизна преобразования 7.1 Ω/T. Сопротивление Холла при нулевом токе в кольцах Гельмгольца, равное 0.010 mΩ, позволяет оценить остаточное геомагнитное поле внутри экрана как 1.5 μT. Сопротивление асимметрии при изменении направления поля не изменяется с точностью до погрешности измерений $R_A(\mathbf{B}_e) \sim R_A(-\mathbf{B}_e)$.

Обсуждение результатов

Соотношение (14) является материальным уравнением для изотропной среды и применимо к системам, к которым применимо кинетическое уравнение (1), предполагающее отсутствие турбулентностей и постоянные концентрации всех сортов носителей заряда [8]. Поэтому приведенный вывод неприменим в режиме лавинного пробоя и межзонных переходов. Кроме того, вывод соотношений взаимности неприменим к неустойчивому режиму, когда решение уравнения (10) может быть не единственным. Поэтому соотношение (16) и вытекающие из него соотношения взаимности (46) могут не выполняться в сверхсильных полях из-за осцилляций, турбулентности и других нестабильностей [8].

Метод последовательных приближений, использованный для решения уравнений (18), справедлив при $\delta = \mu_0 \sigma \nu \varphi T < 1$. Характерным при комнатной температуре значениям $\sigma = 200\,(\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$, $\nu = 50\,\mathrm{m}^2/(\mathrm{V} \cdot \mathrm{s})$ соответствует значение $\delta = 3.3 \cdot 10^{-3}$.

Значительная нелинейность измеренных вольт-амперных характеристик преобразователя (рис. 2), при которой $u(-i) \neq -u(i)$, обусловлена в основном магнитным самовоздействием токов. При управляющем токе 100 mA создаваемое им внутреннее магнитное поле в пленке преобразователя (рис. 1) может достигать ~ 0.5 mT, что в 300 раз больше остаточного магнитного поля внутри экрана. Уменьшение сопротивления $\tilde{R}(i)$ в 3 раза при увеличении управляющего тока до 100 mA связано с увеличением проводимости арсенида индия при нагреве проводящей пленки преобразователя током. Рассеиваемая преобразователем мощность при управляющем токе 100 mA достигает 150 mW. Различие зависимостей $\tilde{R}_1(i)$ и $\tilde{R}_2(i)$ (рис. 3) обусловлено не симметричной геометрией преобразователя (рис. 1). Изменение сопротивления асимметрии для различных значений магнитного поля (таблица), по-видимому, связано с изменением температуры окружающей среды на 1°C при проведении эксперимента. Согласно паспортным данным преобразователя Холла ПХЭ606117А, температурный дрейф его сопротивления асимметрии может достигать 0.050 mΩ/°C, что хорошо согласуется с полученными результатами.

Заключение

Формулы (46) показывают, что классические соотношения взаимности [2] выполнятся в квазистационарном случае для нелинейного многополюсника, находящегося во внешнем неоднородном магнитном поле даже при наличии существенной нелинейности. Они могут применяться для оптимизации режимов работы элементов функциональной электроники [10] и их сигнальных характеристик. В частности, системная функция преобразователя вида (42) не зависит от режима работы преобразователя, определяется только его геометрией и может быть найдена численно. В этом случае ее можно рассматривать как дополнительную паспортную характеристику преобразователя и использовать для компенсации возникающих искажений сигнала путем редукции [11]. Из формул (51) следует, что способ уменьшения погрешностей холловского магнитометра, основанный на использовании линейных соотношений взаимности в скрещенных полях [2], будет справедлив и для высокочувствительного преобразователя Холла с нелинейной ВАХ. Его применение позволит повысить точность магнитных измерений и выделить линейный отклик многополюсника на слабое внешнее неоднородное магнитное поле $\mathbf{B}_e$ на фоне значительно более сильного магнтиного поля $\mathbf{B}'$, создаваемого протекающими по элементу токами.

Работа выполнена за счет гранта РНФ № 15-19-00028 „Разработка методики магнитного структурного анализа и гибридной экспертной системы оперативной технической диагностики металлических изделий в геомагнитном поле“.

Список литературы

[1] *Игнатьев А.А., Ляшенко А.В.* Магнитоэлектроника СВЧ-, КВЧ-диапазонов в пленках ферритов. М.: Наука, 2005. 380 с.
[2] *Голубев А.А., Игнатьев В.К., Никитин А.В.* // ПТЭ. 2008. Т. 51. № 5. С. 53–58.
[3] Lars Onsager // Phys. Rew. 1931. Vol. 37. P. 405–426.
[4] *Игнатьев В.К., Орлов А.А., Перченко С.В.* // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42. № 4. С. 74–81.
[5] *IgnatjeV., Orlov A., Perchenko S.* // Progress In Electromagnetics Res. Lett. 2016. Vol. 59. P. 71–75.
[6] *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.
[7] *Де Гроот С.Р.* Термодинамика необратимых процессов. М.: ГИТТЛ, 1956. 281 с.
[8] Электродинамика плазмы / Под ред. А.И. Ахиезера. М.: Наука, 1974. 720 с.
[9] *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
[10] *Игнатьев А.А., Ляшенко А.В.* Гетеромагнитная микроэлектроника. Микросистемы активного типа. М.: Наука, 2006. 877 с.
[11] *Игнатьев В.К., Протопопов А.Г.* // Известия вузов. Приборостроение. 2003. Т. 46. № 3. С. 38–44.