19,13,10

Исследование влияния адгезии и ангармонизма колебаний атомов на тепловую проводимость границ „металл–диэлектрик“

© А.Г. Слепнёв

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия

E-mail: andslepnev@yandex.ru

(Поступила в Редакцию 27 октября 2016 г.)

Представлен метод расчета тепловой проводимости границ „металл–диэлектрик“, учитывающий в рамках модели акустического несоответствия адгезионное взаимодействие и ангармонизм колебаний атомов на границе и позволяющий получить лучшее согласие расчетных данных с экспериментом.

DOI: 10.21883/FTT.2017.07.44612.403

1. Введение

Внедрение наноструктур в технике обусловливает актуальность проблемы теплопереноса через границы. Несмотря на значительное число выполненных работ [1,2], в настоящее время не существует методов оценки коэффициента фононной тепловой проводимости границ, обеспечивающих приемлемое согласие расчета с экспериментом в широком диапазоне температур. Недостаточность учета лишь акустических [3] и диффузионных [4] несоответствий на границе очевидна. Так, эксперименты [2,5,6] указывают на связь теплопереноса с адгезией. Учет же адгезии в расчетах [2,7] сопряжен с проблемой выбора потенциалов взаимодействия на границе. В представленной работе граничный теплоперенос рассмотрен в рамках модели акустического несоответствия с учетом адгезионного взаимодействия, параметры которого определялись в приближении модели [8,9].

Открытым остается и вопрос об аномальной тепловой проводимости границ материалов с существенно различными акустическими свойствами ($Pb-Al_2O_3$, Pb–алмаз и др.). Данные эксперимента здесь на порядок выше теоретических оценок, что связывают с вкладом в теплоперенос либо ангармонизма [10–12], либо электронов металла [13,14]. В настоящей работе дан анализ влияния адгезии на существование локализованных упругих волн на границе и их вклада в теплоперенос через ангармоническое взаимодействие с объемными волнами.

Как отмечено выше, в настоящей работе рассмотрены границы между металлами и средами, не обладающими свободными электронами (далее именуемыми диэлектриками). Все переменные, относящиеся к металлам, обозначены индексом $j = 1$, к диэлектрикам — индексом $j = 2$.

2. Учет адгезионного взаимодействия в модели акустического несоответствия

Коэффициент фононной тепловой проводимости через границу сред 1 и 2 в модели акустического несоответствия [1,3] представляется в виде

$$\lambda_S = \frac{k}{3}\sum_{e=1}^{3} \int\limits_0^{\min(\omega_{De1},\omega_{De2})/c_{e1}} \int\limits_0^{\sqrt{(\omega/c_{e1})^2-\beta_{e1}^2}} \theta_e \left(\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^2 \times \sinh^{-2}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)\right) c_{e1}\cos(\chi_{e1})\,\frac{\pi d\xi^2 d\beta_{e1}}{(2\pi)^3}, \tag{1}$$

где e — поляризация падающей на границу упругой волны; ω — ее частота; ξ и β_{ej} — проекции волнового вектора на плоскость границы и нормаль к ней; χ_{ej} — угол падения ($\cos\chi_{ej} = c_{ej}\beta_{ej}/\omega$); c_{ej} — скорость звука; k и $\hbar$ — постоянные Больцмана и Планка; T — температура;

$$\omega_{Dej} = c_{ej}\sqrt[3]{6\pi^2\rho_j/m_j}$$

— частота Дебая; ρ_j — плотность; m_j — атомная масса. Коэффициент прохождения волны через границу сред с адгезионным взаимодействием [7,15] (без учета изменения поляризации волн на границе) имеет вид:

$$\theta_e = \frac{\rho_2 c_{e2}\cos(\chi_{e2})}{\rho_1 c_{e1}\cos(\chi_{e1})}\frac{A_{e2}}{A_{e1}}\left(\frac{A_{e2}}{A_{e1}}\right)^* = 4\left(\frac{(\mu_{e1}\beta_{e1}+\mu_{e2}\beta_{e2})^2}{\mu_{e2}\beta_{e2}\mu_{e1}\beta_{e1}} + \frac{\mu_{e2}\beta_{e2}\mu_{e1}\beta_{e1}}{\kappa^2}\right)^{-1}, \tag{2}$$

где A_{ej} — амплитуда волны (A_{ej}^* — комплексно-сопряженная амплитуда); $\mu_{ej} \approx \rho_j c_{ej}^2$ — модуль упругости в объеме; κ — модуль упругости на границе.

Модуль упругости на границе $\kappa = \left(d^2W/dL^2\right)_{L=0}$ определен в рамках модели [8,9], по которой взаимодействие сред 1 и 2 обусловлено их взаимной поляризацией, вызванной осцилляциями зарядов, а энергия взаимодействия определяется изменением энергии электромагнитного поля в зазоре между средами при изменении величины зазора L

$$W(L)=\left\{\int\limits_0^{\xi_{\max}}\frac{\hbar\Omega(\xi,L)}{2}\frac{2\pi\xi\,d\xi}{(2\pi)^2}-\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^{\xi_{\max j}}\frac{\hbar\Omega_j(\xi)}{2}\frac{2\pi\xi\,d\xi}{(2\pi)^2}\right\},\tag{3}$$

где ξ — проекция волнового вектора электромагнитной волны на плоскость границы, $\Omega_j(\xi)$ и $\Omega(\xi,L)$ — частота электромагнитных колебаний над свободной поверхностью j-той среды и в зазоре между средами соответственно.

Дисперсии $\Omega_j(\xi)$ и $\Omega(\xi,L)$ определяются из задачи о собственных значениях электромагнитных колебаний в зазоре и для границ металл ($\varepsilon_1 = 1-(\Omega_{p1}/\Omega)^2$) — диэлектрик ($\varepsilon_2 = \text{const}$ [16]) имеют вид [15]

$$\Omega = \frac{\Omega_{p1}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{(\varepsilon_2-1)}{(\varepsilon_2+1)}\exp(-2\xi L)},\tag{4}$$

где $\Omega_{p1}=\sqrt{(n_{e1}q_e^2\rho_1)/(\varepsilon_0 m_e m_1)}$ — частота плазменных колебаний в металле, m_e и q_e — масса и заряд электрона, n_{e1} — металлическая валентность, m_1 — масса атомов металла, ε_j — диэлектрическая проницаемость, ε_0 — электрическая постоянная. Подстановка (4) в (3) приводит к выражению

$$W(L)=\int\limits_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}}\frac{\hbar}{2}\frac{\Omega_{p1}}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1-\frac{(\varepsilon_2-1)}{(\varepsilon_2+1)}\exp(-2\xi L)}-1\right]\frac{2\pi\xi\,d\xi}{(2\pi)^2},\tag{5}$$

где $\xi_{\min}=\Omega_{p1}/\big(C\sqrt{\varepsilon_2+1}\big)$ — определяется областью существования дисперсии (4), а $\xi_{\max} = \Omega_{p1}/\big(\nu_{F1}\sqrt{\varepsilon_2+1}\big)$ — областью устойчивости плазменных колебаний в металле [9]; C — скорость света в вакууме, $\nu_{F1}=(\hbar/m_e)\sqrt[3]{3\pi^2 n_{e1}\rho_1/m_1}$ — скорость электронов в металле на сферической поверхности Ферми. Поскольку $\xi_{\min}/\xi_{\max}=\nu_{F1}/C\approx 10^{-2}\to 0$, нижний предел в (5) может быть положен равным нулю.

Данные для расчета взяты из источников [4,17,18–21], результаты представлены в табл. 1–3. Полученные значения энергий адгезии $W_0 = W(0)$, модулей упругости на границе κ и коэффициентов тепловой проводимости λ_S ($\lambda_{S\kappa}$ — приближение адгезионной и $\lambda_{S\infty}$ — приближение жесткой связи на границе) даны в табл. 1 и 3. Также в таблицах представлены экспериментальные данные $\lambda_{S\,\exp}$.

В верхних строках табл. 1 приведены границы с близкими значениями $\lambda_{S\kappa}$ и $\lambda_{S\,\exp}$, в нижних строках — границы с $\lambda_{S\kappa} > \lambda_{S\,\exp}$. Можно показать, что $\lambda_S \propto \theta_e \propto \kappa^2 \propto W_0^2$ (при $\kappa\to 0$), $\lambda_S\propto\theta_e\propto\kappa\propto W_0$ (при промежуточных κ) и $\lambda_S\propto\theta_e\propto A-B/W_0^2$ (при $\kappa\to\infty$), где A и B не зависят от W_0; и связать расхождение теории $\lambda_{S\kappa}$ с экспериментом $\lambda_{S\,\exp}$, приведенное в нижних строках табл. 1, с завышенными в ряде случаев значениями W_0, которые важно сравнить с верхней оценкой

Таблица 1. Тепловая проводимость ряда границ при температуре 300 K

Граница	W_0, J/m^2	κ, Pa/m	λ_S, W/(K $\cdot$ m^2)	
			$\lambda_{S\kappa}$	$\lambda_{S\,\exp}$
Al–AlN	3.9	$6.1\cdot10^{20}$	$2.6\cdot10^8$	$2.3\cdot10^8$ [22]
Al–Al_2O_3	3.2	$4\cdot10^{20}$	$1.9\cdot10^8$	$2\cdot10^8$ [22, 23]
Al–BaF_2	2.4	$2.1\cdot10^{20}$	10^8	10^8 [23]
Al–алмаз	4.2	$6.6\cdot10^{20}$	$9.6\cdot10^7$	$4.6\cdot10^7$ [23]; $1.8\cdot10^8$ [24]
Au–BaF_2	0.9	$5.7\cdot10^{19}$	$3.5\cdot10^7$	$4\cdot10^7$ [23]
Ti–Al_2O_3	3.9	$5.2\cdot10^{20}$	$1.9\cdot10^8$	$2\cdot10^8$ [23]
Ti–алмаз	5.0	$8.6\cdot10^{20}$	10^8	10^8 [23]
Al–GaN	3.8	$5.6\cdot10^{20}$	$5.2\cdot10^8$	$1.9\cdot10^8$ [22]
Al–Si	4.7	$7.2\cdot10^{20}$	$4.5\cdot10^8$	$1.2\cdot10^8$ [22]
Cr–AlN	9.2	$2\cdot10^{21}$	$6.9\cdot10^8$	$2\cdot10^8$ [22]
Cr–Al_2O_3	7.5	$1.3\cdot10^{21}$	$5.9\cdot10^8$	$1.9\cdot10^8$ [22]
Cr–GaN	8.8	$1.8\cdot10^{21}$	$1\cdot10^9$	$2.3\cdot10^8$ [22]
Cr–Si	10.9	$2.3\cdot10^{21}$	$8.8\cdot10^8$	$2\cdot10^8$ [22]

энергии адгезии [25]

$$W_{a0} = \sigma_1+\sigma_2,\tag{6}$$

где σ_1,σ_2 — поверхностные энергии металла и диэлектрика.

В табл. 2 приведены экспериментальные данные по σ_1 и σ_2, значения энергий адгезии W_0 (5) и W_{a0} (6) и соотношения W_0/W_{a0} и $\lambda_{S\kappa}/\lambda_{S\,\exp}$. В столбце $\lambda_{S\kappa}/\lambda_{S\,\exp}$ приведены также наиболее близкие пропорциональности $\lambda_S\propto W_0^N$ (для $N>1$) и $\lambda_S\propto A-B/W_0^2$. Исходя из таблицы, можно предположить, что

1) величина W_0 рассчитана верно, если $W_0/W_{a0} = \lambda_{S\kappa}/\lambda_{S\,\exp}\approx 1$;

2) величина W_0 завышена, если $W_0/W_{a0}\approx\lambda_{S\kappa}/\lambda_{S\,\exp}>1$ и $(W_0/W_{a0})^2\approx\lambda_{S\kappa}/\lambda_{S\,\exp}>1$;

3) если $W_0/W_{a0}>\lambda_{S\kappa}/\lambda_{S\,\exp}\approx 1$, то величина W_0, возможно, завышена, что, однако, не влияет на равенство $\lambda_{S\kappa}$ и $\lambda_{S\,\exp}$, и соответствует случаю $\kappa\to\infty$ и $\lambda_S\approx A-B/W_0^2$.

Безусловно энергия адгезии $W_a = W_{a0}-\sigma_{12}$ определяется также энергией границы σ_{12}, определяемой технологическим процессом. Так, в работе [25] энергии адгезии определены из экспериментов по смачиванию подложек жидкими металлами и имеют меньшие значения, чем величины W_0 и W_{a0}, представленные в табл. 2, что может говорить о неполной релаксации напряжений на границе или неполном покрытии каплей подложки. В работе [26], в зависимости от температуры отжига, энергия адгезии пленки Au к SiO_2 менялась от 0.37 J/m^2 (после напыления) до 0.9 J/m^2 (отжиг при 100°C в течение 1 h) и до 9.9 J/m^2 (отжиг при 300°C в течение 1 h). И если отжиг при 100°C соответствовал снятию напряжений на границе, то отжиг при 300°C вызывал образование диффузионного интерфейса. Энергия же ад-

Таблица 2. Поверхностные энергии (экспериментальные значения) и энергии адгезии (расчетные значения) для ряда веществ и их границ

Граница	σ_1, J/m^2	σ_2, J/m^2	W_{a0}, J/m^2	W_0, J/m^2	W_0/W_{a0}	$\lambda_{S\kappa}/\lambda_{S\,\mathrm{exp}}$
Al–AlN	0.87 [25]	2 [28]	2.87	3.9	1.34	1.13
Al–Al_2O_3		2.6 [29] α-Al_2O_3	3.47	3.2	0.92	0.95
		1.7 [29] γ-Al_2O_3	2.57		1.25	
Al–BaF		0.28 [30]	1.15	2.4	2.09	1; $\lambda_S \propto A - B/W_0^2$
Al–GaN		1.5 [31]	2.37	3.8	1.6	2.74; $\lambda_S \propto W_0^{2.2}$
Al–Si		1.5 [32]	2.37	4.7	1.98	3.75; $\lambda_S \propto W_0^{1.9}$
Al–алмаз		5.6 [32]	6.47	4.2	0.65	0.85
Au–BaF_2	1.15 [25]	0.28 [30]	1.43	0.9	0.63	0.875
Cr–AlN	1.64 [25]	2.0 [28]	3.64	9.2	2.53	3.45; $\lambda_S \propto W_0^{1.4}$
Cr–Al_2O_3		2.6 [29] α-Al_2O_3	4.24	7.5	1.77	3.08; $\lambda_S \propto W_0^2$
		1.7 [29] γ-Al_2O_3	3.34			
Cr–GaN		1.5 [31]	3.14	8.8	2.8	4.35; $\lambda_S \propto W_0^{1.4}$
Cr–Si		1.5 [32]	3.14	10.9	3.47	4.42; $\lambda_S \propto W_0^{1.2}$
Ti–Al_2O_3	1.53 [25]	2.6 [29] α-Al_2O_3	4.13	3.9	0.95	0.95
		1.7 [29] γ-Al_2O_3	3.23		1.21	
Ti–алмаз		5.6 [32]	7.13	5.0	0.7	1

Таблица 3. Тепловая проводимость ряда границ материалов с существенно различными акустическими свойствами при температуре 300 K

Граница	W_0, J/m^2	κ, Pa/m	λ_S, W/(K $\cdot$ m^2)		
			$\lambda_{S\kappa}$	$\lambda_{S\infty}$	$\lambda_{S\,\mathrm{exp}}$
Au–Al_2O_3	1.3	$1.08 \cdot 10^{20}$	$5.5 \cdot 10^6$	$3.8 \cdot 10^7$	$4.5 \cdot 10^7$ [22,23]
Au–Si	1.8	$1.9 \cdot 10^{20}$	$1.5 \cdot 10^7$	$4.1 \cdot 10^7$	$7.1 \cdot 10^7$ [22]
Au–SiO_2	1.0	$6.8 \cdot 10^{19}$	$1.5 \cdot 10^7$	$8.1 \cdot 10^7$	$3.6 \cdot 10^7$ [5]
Au–TiO_2	1.9	$8.5 \cdot 10^{19}$	$3.9 \cdot 10^6$	$4.5 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^7$ [6]
Au–алмаз	1.6	$1.8 \cdot 10^{20}$	$3.2 \cdot 10^6$	$1.9 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^7$ [23]
Bi–алмаз	3.4	$4.9 \cdot 10^{20}$	$0.3 \cdot 10^7$	$0.3 \cdot 10^7$	$0.9 \cdot 10^7$ [12]
Cu–SiO_2	1.4	$1 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^8$	$4.4 \cdot 10^8$	$4.3 \cdot 10^8$ [6]
Mo–Al_2O_3	6.0	$9.6 \cdot 10^{20}$	$2.5 \cdot 10^8$	$4.1 \cdot 10^8$	$6.7 \cdot 10^8$ [36]
Pb–Al_2O_3	2.5	$2.8 \cdot 10^{20}$	$4.7 \cdot 10^6$	$7.2 \cdot 10^6$	$5.5 \cdot 10^7$ [23]
Pb–BaF_2	1.9	$1.45 \cdot 10^{20}$	$3.2 \cdot 10^7$	$5.2 \cdot 10^7$	$6.5 \cdot 10^7$ [23]
Pb–алмаз	3.2	$4.6 \cdot 10^{20}$	$2.3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$1.8 \cdot 10^7$ [12]; $3 \cdot 10^7$ [23]
Pt–AlN	3.1	$4.26 \cdot 10^{20}$	$3.2 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^7$	$1.2 \cdot 10^8$ [10]
Pt–Al_2O_3	2.5	$2.8 \cdot 10^{20}$	$2.2 \cdot 10^7$	$7.7 \cdot 10^7$	$1.2 \cdot 10^8$ [10]
Pt–Si	3.6	$5 \cdot 10^{20}$	$4.8 \cdot 10^7$	$7.7 \cdot 10^7$	$1.4 \cdot 10^8$ [22]

Примечание. В табл. 3 представлены границы, для которых расчетные значения $\lambda_{S\kappa}$ оказываются меньше экспериментальных. В таблице также приведены расчетные значения $\lambda_{S\infty}$, полученные в приближении жесткой связи ($\kappa \to 0$) на границе.

гезии металлов к керамике, определенная в работе [27], имеет значения, близкие к данным в табл. 2.

Поскольку $W_0 \propto \Omega_{p1}\xi^2_{\max} \propto \Omega^3_{p1}/v_F^2 \propto n_{el}^{5/6}$, можно полагать, что завышенные значения W_0 связаны с использованием в расчетах максимальной валентности металлов [19]. Тем не менее, исследования d-металлов [33,34] указывают на более сложную зависимость $\varepsilon(\Omega)$, чем $\varepsilon = 1 - (\Omega_p/\Omega)^2$. Так, в [33] показано, что $\Omega_p \to \Omega_{ps}$ при $\Omega \to 0$, и $\Omega_p \to \Omega_{pd}$ при $\Omega \to \infty$, где Ω_{ps} и Ω_{pd} — частоты плазменных колебаний s- и d-электронов. В [34]

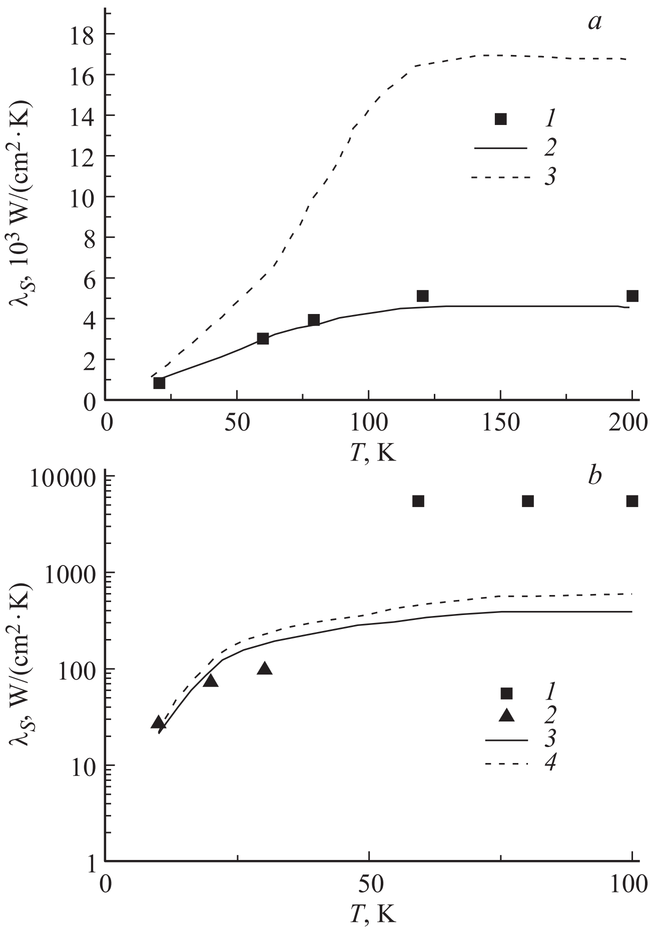

Рис. 1. Зависимость тепловой проводимости границ от температуры: *a* — Au–BaF$_2$: *1* — эксперимент [23], *2* — расчет в приближении адгезионной связи, *3* — расчет в приближении жесткой связи ($\kappa \to \infty$); *b* — Pb–Al$_2$O$_3$ (λ_S в логарифмическом масштабе): *1* — эксперимент [23], *2* — эксперимент [37], *3* — расчет в приближении адгезионной связи, *4* — расчет в приближении жесткой связи ($\kappa \to \infty$).

указаны два резонанса, соответствующих возбуждениям s- и d-электронов. Вероятно, сильнее связанные с ядром d-электроны дают меньший вклад в W_0 по сравнению с s-электронами [35], что не учтено в данной работе.

На рис. 1, *a* и *b* приведено сравнение температурных зависимостей коэффициентов тепловой проводимости λ_S границ Au–BaF$_2$ и Pb–Al$_2$O$_3$, рассчитанных в приближении адгезионной $\lambda_{S\kappa}$ и жесткой $\lambda_{S\infty}$ связей, с экспериментальными данными $\lambda_{S\,\mathrm{exp}}$. Из рисунка видно, что при высоких температурах в случае Au–BaF$_2$ (табл. 1) экспериментальные данные лучше описываются моделью, учитывающей адгезию на границе, в то же время в случае Pb–Al$_2$O$_3$ (табл. 3) теоретические оценки лежат ниже экспериментальных данных.

Границы, приведенные в табл. 3, образованы материалами с существенно различными акустическими свойствами (например, $c_{t\mathrm{Pb}} = 700$ m/s, а $c_{t\mathrm{Al_2O_3}} = 6350$ m/s) и интересны тем, что сегодня нет общепринятого объяснения, почему их тепловая проводимость при высоких температурах выше даже идеальных теоретических оценок [1,2]. Так, из рис. 1, *b* видно, что расчет согласуется с экспериментом при малых температурах, но при температурах выше дебаевской (~ 100 K для свинца [23]) эксперимент на порядок превосходит теорию. Не останавливаясь на возможном влиянии электронов металла на теплоперенос через границу [13,14], рассмотрим подробнее влияние на него взаимодействия упругих волн [10–12]. Действительно, простейшая дисперсия Лява [38] для двухслойной среды (h_j — толщина j-того слоя)

$$\mu_1\beta_1 \sin(h_1\beta_1)\cos(h_2\beta_2) + \mu_2\beta_2 \sin(h_2\beta_2)\cos(h_1\beta_1) = 0,$$

$$\beta_j = \sqrt{(\omega/c_{tj})^2 - \xi^2},$$

описывает волны, существующие как во всем объеме системы $\beta_2^2 > 0$ $(c_{t1} < c_{t2})$, так и локализованные в слое с меньшей скоростью звука $\beta_2^2 < 0$. Увеличение соотношения c_{t2}/c_{t1} ведет к расширению в фазовом пространстве области локализованных волн. Соотношение фазовых объемов, соответствующих локализованным и нелокализованным волнам, можно оценить как

$$n \approx [(\omega/c_{t1})^3 - (\omega/c_{t2})^3](c_{t2}/\omega)^3 \approx (c_{t2}/c_{t1})^3,$$

откуда $n_{\mathrm{Pb-Al_2O_3}} \approx 750$ при $c_{t\mathrm{Pb}} = 700$ m/s и $c_{t\mathrm{Al_2O_3}} = 6350$ m/s. Таким образом, можно ожидать значительного усиления теплопереноса через границу, если в системе существуют механизмы, способные перебрасывать волны из области локализации.

3. Учет интерфейсных ангармонических явлений

Из рис. 1, *b* видно, что тепловая проводимость границы Pb–Al$_2$O$_3$ начинает проявлять свой аномальный характер при температурах, несколько меньших температуры Дебая свинца. Можно предположить, что из-за слабости адгезионной связи ангармонизм колебаний в свинце на интерфейсе проявляется раньше, чем в объеме. Если при этом существуют интерфейсные волны, то на них вероятны рассеяние и делокализация волн, локализованных в объеме свинца.

Получим дисперсию интерфейсных волн, полагая тело 2 абсолютно жестким ($c_2 \gg c_1$). Потенциалы растяжения–сжатия и сдвига имеют вид

$$\varphi_1 = \Phi_1 \exp\big(i(\xi x - \omega t)\big)\exp(-\alpha_{10} z),$$

$$\psi_1 = \Psi_1 \exp\big(i(\xi x - \omega t)\big)\exp(-\beta_{10} z), \quad \varphi_2 = 0, \quad \psi_2 = 0,$$

где $\alpha_{10} = \sqrt{\xi^2 - (\omega/c_{l1})^2}$, $\beta_{10} = \sqrt{\xi^2 - (\omega/c_{t1})^2}$.

Граничные условия на интерфейсе ($z = 0$) представим следующим образом: $u_{1z}\kappa = \sigma_{1zz}$ и $u_{1x}\kappa = \sigma_{1zx}$, где

u_1 — поле смещений, σ_{zz1} и σ_{zx1} — поля напряжений на границе, λ_1 и μ_1 — коэффициенты Ламе [38]

$$\mathbf{u}_1 = \operatorname{grad}\varphi_1 + \operatorname{rot}\boldsymbol{\Psi}_1,$$

$$\sigma_{zz1} = \lambda_1\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\right) + 2\mu_1\frac{\partial u_{z1}}{\partial z},$$

$$\sigma_{zx1} = \mu_1\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial x}\right).$$

Дисперсионное соотношение для интерфейсных волн на границе слабосвязанных упругого 1 и абсолютно жесткого 2 полупространств имеет вид

$$\xi^2(\kappa+2\mu_1\beta_{10})(\kappa+2\mu_1\alpha_{10}) - \left(\alpha_{10}\kappa - \lambda_1\left(\frac{\omega}{c_{l1}}\right)^2 + 2\mu_1\alpha_{10}^2\right)$$
$$\times\left(\beta_{10}\kappa + \mu_1(\beta_{10}^2+\xi^2)\right) = 0, \quad (7)$$

которое переходит в дисперсию волн Рэлея [38] при $\kappa \to 0$:

$$4\xi^2\beta_{10}\mu_1\alpha_{10} - \left(2\mu_1\alpha_{10}^2 - \lambda_1\left(\frac{\omega}{c_{l1}}\right)^2\right)(\beta_{10}^2+\xi^2) = 0.$$

Анализ дисперсии (7) показал, что интерфейсные волны вероятны на всех границах, приведенных в табл. 3, за исключением границ с поливалентными металлами (Pb, Bi, Mo), валентность которых в расчетах (5) была взята максимальной, что могло привести к завышенным значениям коэффициента κ и некорректным заключениям о возможности локализации волн на интерфейсе.

Проведем анализ рассеяния упругих волн на границе сред 1 и 2 с интерфейсным слоем толщины δ, представляющим собой среду 1 с измененными вследствие ангармонизма модулями упругости. Пренебрежем изменением поляризации волн на границе. Граничные условия запишем в виде $z = 0$ — граница среды 2 с интерфейсным слоем

$$\begin{cases}(\mu_1+\Delta\mu_1)\left(\dfrac{\partial u_S}{\partial z}\right)_{z=0} = \mu_2\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right)_{z=0},\\[2ex] (u_S-u_2)_{z=0}\kappa = \mu_2\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right)_{z=0},\end{cases}$$

$z = \delta$ — граница среды 1 с интерфейсным слоем

$$\begin{cases}(\mu_1+\Delta\mu_1)\left(\dfrac{\partial u_S}{\partial z}\right)_{z=\delta} = \mu_1\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right)_{z=\delta},\\[2ex] (u_S)_{z=\delta} = (u_1)_{z=\delta},\end{cases}$$

где $\Delta\mu_1$ – возмущение объемного модуля упругости в интерфейсном слое, связанное с ангармонизмом интерфейсных волн, u_1 и u_2 — поля смещений атомов в объемах сред 1 и 2, u_S — поле смещений атомов в интерфейсном слое, обусловленное падением волн из среды 1 на границу.

Полагая для упрощения амплитуду интерфейсных волн (7) неизменной в пределах слоя их затухания δ, представим возмущение $\Delta\mu_1$ в виде

$$\Delta\mu_1 = M_1\frac{\partial U_S}{\partial x}$$
$$= M_1\sum_S \xi_S A_S\left(\exp(i\xi_S x) + \exp(-i\xi_S x)\right)\exp(-i\omega_S t),$$

где M_1 — некий модуль упругости 3-го порядка, U_S — упрощенное представление поля смещений атомов в интерфейсной волне (7). При этом $U_S \neq u_S$, поскольку u_S — поле смещений в интерфейсном слое, вызываемое волнами, падающими из объема. Поля смещений u_1, u_S, u_2 представим в виде [39]

$$u_1 = \left(A_1\exp(i\beta_1 z) + B_1\exp(-i\beta_1 z)\right)\exp\left(i(\xi x - \omega t)\right)$$
$$+\sum_J B_{1J}\exp(-i\beta_{1J}z)\exp\left(i(\xi_J x - \omega_J t)\right) = u_{10} + \sum_J u_{1J},$$

$$u_2 = A_2\exp(i\beta_2 z)\exp\left(i(\xi x - \omega t)\right) + \sum_J A_{2J}\exp(i\beta_{2J}z)$$
$$\times\exp\left(i(\xi_J x - \omega_J t)\right) = u_{20} + \sum_J u_{2J},$$

$$u_S = \left(A_1\exp(i\beta_1 z) + B_1\exp(-i\beta_1 z)\right)\exp\left(i(\xi x - \omega t)\right)$$
$$+\sum_J\left[A_{SJ}\exp(i\beta_{SJ}z) + B_{SJ}\exp(-i\beta_{SJ}z)\right]$$
$$\times\exp\left(i(\xi_J x - \omega_J t)\right) = u_{10} + \sum_J u_{SJ}.$$

Подставляя u_1, u_S, u_2 и $\Delta\mu_1$ в граничные условия, полагая возмущение $\Delta\mu_1$ малым, пренебрегая величинами большего порядка малости $\Delta\mu_1 u_{SJ}$ и приводя слагаемые с одинаковыми показателями экспонент, получим объединение систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\mu_1\beta_1[A_1-B_1] = \mu_2\beta_2A_2,\\ (A_1+B_1-A_2)\kappa = \mu_2 i\beta_2A_2,\end{cases}\\[3ex] \begin{cases}\mu_1\beta_{SJ}[A_{SJ}-B_{SJ}] + \xi_S M_1\beta_1A_S[A_1-B_1] = \mu_2\beta_{2J}A_{2J},\\ (A_{SJ}+B_{SJ}-A_{2J})\kappa = \mu_2 i\beta_{2J}A_{2J},\\ \mu_1\beta_{SJ}[A_{SJ}\exp(i\beta_{SJ}\delta) - B_{SJ}\exp(-i\beta_{SJ}\delta)]\\ \qquad + M_1\beta_1\xi_SA_S[A_1\exp(i\beta_1\delta) - B_1\exp(-i\beta_1\delta)]\\ \qquad = -\mu_1\beta_{1J}B_{1J}\exp(-i\beta_{1J}\delta),\\ A_{SJ}\exp(i\beta_{SJ}\delta) + B_{SJ}\exp(-i\beta_{SJ}\delta) = B_{1J}\exp(-i\beta_{1J}\delta),\end{cases}\end{array}\right.$$

где первая система описывает линейное прохождение волн через невозмущенную границу, а последующие системы описывают рассеяние падающих на границу волн с генерацией волн, для которых выполняются условия $\xi_J = \xi \pm \xi_S$, $\omega_J = \omega + \omega_S$ и

$$\beta_{jJ} = \sqrt{\left((\omega+\omega_S)/c_j\right)^2 - (\xi\pm\xi_S)^2} \quad (j = 1, 2, S).$$

Из последней системы при условиях $\beta_{SJ} \approx \beta_{1J}$ ($\Delta\mu_1 \to 0$) и $\delta \to 0$ получим связь между амплитудами волн падающей A_1 и сгенерированной вследствие взаимодействия A_{2J}

$$\frac{A_{2J}}{A_1}=\frac{-2i\,\frac{M_1\beta_1^2\xi_S A_S\delta}{\mu_1\beta_{1J}}\left(\frac{\mu_1\beta_1}{\mu_2\beta_2}+i\,\frac{\mu_1\beta_1}{\kappa}-\frac{\beta_{1J}}{\beta_1}\right)}{\left(\frac{\mu_2\beta_{2J}}{\mu_1\beta_{1J}}+1+i\,\frac{\mu_2\beta_{2J}}{\kappa}\right)\left(\frac{\mu_1\beta_1}{\mu_2\beta_2}+1+i\,\frac{\mu_1\beta_1}{\kappa}\right)}. \tag{8}$$

Определим тепловой поток в среде 2, учитывая генерацию волн на границе

$$q=\frac{1}{3}\sum_{e\omega\xi}\frac{\rho_2\omega_J^2}{2}\left(\bar{u}_2+\sum u_{2J}\right)\left(\bar{u}_2+\sum u_{2J}\right)^* c_2\cos(\chi_{2J})$$

$$\approx\frac{1}{3}\sum_{e\omega\xi}\frac{\rho_2\omega_J^2}{2}\left(\bar{A}_2\bar{A}_2^*+\bar{A}_2^*\sum A_{2J}+\bar{A}_2\sum A_{2J}^*\right)$$

$$\times\, c_2\cos(\chi_{2J}),$$

где $\bar{A}_2$ — амплитуды волн $\bar{u}_2$, испытавших линейное прохождение через границу и обладающих характеристиками β_{2J} и ω_J; A_{2J} — амплитуды сгенерированных волн u_{2J}, $\sum A_{2J}\sum A_{2J}^*\to 0$ как величина большего порядка малости. Суммы $\sum\limits_J$ берутся по всем сгенерированным волнам с характеристиками β_{2J} и ω_J.

Представим выражение для теплового потока в виде

$$q=\frac{1}{3}\sum_{e\omega\xi}\frac{\rho_2\omega_J^2}{2}\bar{A}_2\bar{A}_2^*\left\{1+\sum\left[\left(\frac{A_{2J}}{A_1}\right)\left(\frac{A_1}{A_1}\right)\left(\frac{\bar{A}_1}{\bar{A}_2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\sum\left[\left(\frac{A_{2J}^*}{A_1^*}\right)\left(\frac{A_1^*}{A_1^*}\right)\left(\frac{\bar{A}_1^*}{\bar{A}_2^*}\right)\right]\right\}c_2\cos(\chi_{2J}), \tag{9}$$

где

$$\bar{A}_2/\bar{A}_1=2\bigg/\left(\frac{\mu_2\beta_{2J}}{\mu_1\beta_{1J}}+1+\frac{\mu_2 i\beta_{2J}}{\kappa}\right)$$

— определяются линейным прохождением волн $\bar{u}_2$ через границу, а A_{2J}/A_1 определяется формулой (8).

Подставляя эти выражения в произведение $(A_{2J}/A_1)(\bar{A}_1/\bar{A}_2)$ и учитывая, что волны u_{2J} и $\bar{u}_2$ обладают одним набором β, ξ, ω, а также положив для упрощения $\beta_2\approx i\xi$ (поскольку интересен переброс локализованных волн при $c_1\ll c_2$), получим

$$\left(\frac{A_{2J}}{A_1}\right)\left(\frac{\bar{A}_1}{\bar{A}_2}\right)=\frac{M_1\beta_1^2\xi_S A_S\delta}{\mu_1\beta_{1J}}$$

$$\times\frac{\left(\frac{\mu_1\beta_1}{\kappa}-\frac{\mu_1\beta_1}{\xi\mu_2}\right)\left(1+\frac{\beta_{1J}}{\beta_1}\right)+i\,\frac{\beta_{1J}}{\beta_1}-i\left(\frac{\mu_1\beta_1}{\kappa}-\frac{\mu_1\beta_1}{\xi\mu_2}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{\mu_1\beta_1}{\kappa}-\frac{\mu_1\beta_1}{\xi\mu_2}\right)^2\right)}.$$

Приняв амплитуды $\bar{A}_1$ и A_1 действительными и положив их отношение выражением

$$A_1/\bar{A}_1=\sqrt{\omega_J\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega_J}{kT}\right)-1\right)\Big/\,\omega\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right)},$$

перепишем (9) в виде

$$q=\frac{1}{3}\sum_{e\omega\xi}\frac{\rho_2\omega_J^2}{2}\bar{A}_2\bar{A}_2^*\{1+Y\}c_2\cos(\chi_{2J}),$$

где Y — соотношение вкладов волн $\bar{u}_2$ и $\sum u_{2J}$ в тепловой поток (соотношение ангармонической и гармонической составляющих теплового потока)

$$Y=2\sum\frac{M_1\beta_1^2\xi_S A_S\delta}{\mu_1\beta_{1J}}\,\frac{\left(\frac{\mu_1\beta_1}{\kappa}-\frac{\mu_1\beta_1}{\xi\mu_2}\right)\left(1+\frac{\beta_{1J}}{\beta_1}\right)}{\left(1+\left(\frac{\mu_1\beta_1}{\kappa}-\frac{\mu_1\beta_1}{\xi\mu_2}\right)^2\right)}$$

$$\times\sqrt{\frac{\omega_J\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega_J}{kT}\right)-1\right)}{\omega\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right)}}. \tag{10}$$

Перейдем в (10) к интегрированию. В интересующем нас случае $c_1\ll c_2$ и $c_S\approx c_1$ (следует из (7)) очевидно, что $\beta_{2J}^2>0$ (условие прохождения сгенерированной волны u_{2J} через границу) выполнимо только при $\xi_J=\xi-\xi_S$, что дает возможность преобразовать

$$\beta_{2J}=\sqrt{\left((\omega+\omega_S)/c_2\right)^2-(\xi\pm\xi_S)^2}$$

к выражению

$$\xi=\xi_S+\left(\frac{\omega+\omega_S}{c_2}\right)\sin(\chi_{2J})$$

$$=\left(\frac{\omega_J-\omega}{c_S}\right)+\left(\frac{\omega_J}{c_2}\right)\sin(\chi_{2J}), \tag{11}$$

определяющему на дисперсионной диаграмме (рис. 2, *a*) точки, соответствующие падающим волнам с параметрами ω и ξ, генерирующим проходящие через границу волны с параметрами ω_J и χ_J. Из (11) следует, что рассматриваемая падающая волна u_{10} при взаимодействии с интерфейсной волной U_S генерирует лишь одну проходящую волну u_{2J} (рис. 2, *a*), в то время как интерфейсная волна U_S участвует в генерации нескольких проходящих волн (рис. 2, *b*), взаимодействуя с другими падающими волнами. Максимальная $\omega_{\max}$ (условие $\xi=0$) и минимальная $\omega_{\min}$ (условие $\xi=\omega_{\min}/c_S$) частоты падающих волн, участвующих в генерации проходящих через границу волн, определяются из (11) выражениями

$$\omega_{\max}=\begin{cases}\omega_J\left(1+\left(\frac{c_S}{c_2}\right)\sin(\chi_{2J})\right), & \omega_{\max}<\omega_{D1},\\ \omega_{D1}, & \omega_{\max}>\omega_{D1},\end{cases}$$

$$\omega_{\min}=\frac{\omega_J}{2}\left(1+\left(\frac{c_S}{c_2}\right)\sin(\chi_{2J})\right).$$

Таким образом, суммирование в (10) по всем сгенерированным волнам частоты ω_J заменим интегрированием на плоскости „ξ–ω“ по частоте падающих волн ω при

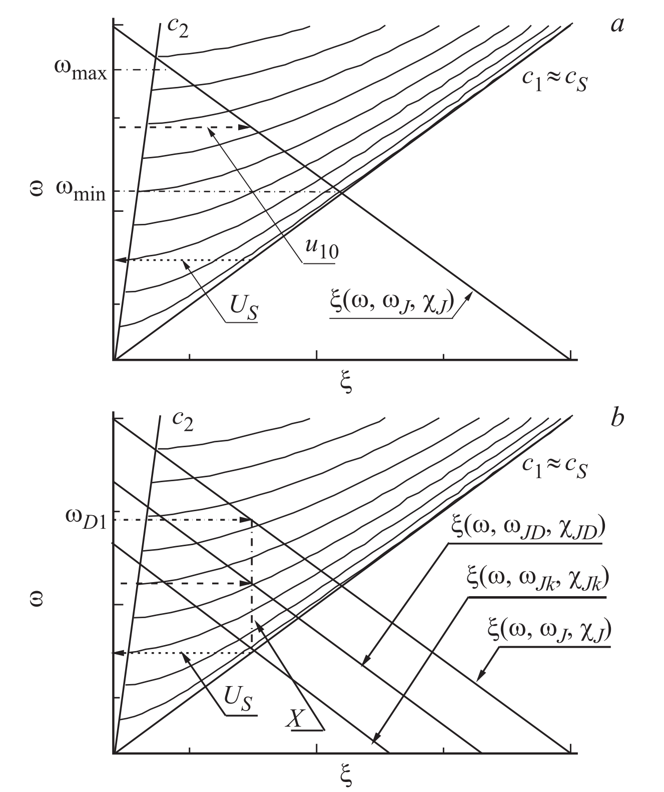

Рис. 2. *a*) Схема взаимодействия падающей u_{10} и интерфейсной U_S волн с генерацией проходящей волны u_{2J}; *b*) Схема взаимодействия интерфейсной волны U_S с различными падающими волнами и генерации различных мод u_{2J}. Отрезок $X \approx \omega_{D1} - c_S\xi_S$ — геометрическое место проекций ξ волновых векторов падающих волн, взаимодействие с которыми приводит к генерации проходящих волн u_{2J}; $\omega/c_2 < \xi < \omega/c_1$ — область волн, локализованных в среде 1; $0 < \xi < \omega/c_2$ — область волн, проходящих через границу; $\xi(\omega, \omega_J, \xi_J)$ — прямая (11), ω_{D1} — частота Дебая среды 1.

заданном значении ω_J в пределах $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ вдоль прямой $\xi(\omega)$, определяемой выражением (11)

$$Y = \frac{2M_1}{\mu_1} \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{\beta_1^2 \delta\xi_S A_S \left(\frac{\mu_1\beta_1}{\kappa} - \frac{\mu_1\beta_1}{\xi\mu_2}\right)\left(1 + \frac{\beta_{1J}}{\beta_1}\right)}{\beta_{1J}\left(1 + \left(\frac{\mu_1\beta_1}{\kappa} - \frac{\mu_1\beta_1}{\xi\mu_2}\right)^2\right)} \times \sqrt{\frac{\omega_J\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega_J}{kT}\right) - 1\right)}{\omega\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right)}} \frac{d\omega}{\Delta\omega}\, \tau, \tag{12}$$

где $1/\tau \approx X/\Delta\omega = (\omega_{D1} - c_S\xi_S)/\Delta\omega$ — коэффициент, учитывающий ослабление интерфейсной волны U_S вследствие генерации проходящих волн в диапазоне частот X с интервалом $\Delta\omega$ (рис. 2, *b*). Существуют также процессы, приводящие к генерации волн, вновь локализующихся в среде 1, что означает отсутствие переноса энергии через границу сред и ее последующее перераспределение между колебательными модами среды 1, поэтому эти процессы не учитываются в ослаблении падающих и интерфейсных волн в выражении (12).

Для оценки Y дополнительно использовались $M_1 \approx (2\gamma_1 + 3)\mu_1$ — модуль упругости 3-го порядка [38], γ_1 — параметр Грюнайзена [40], $\delta\xi_S \approx 1$ (при условии $c_2 \gg c_S \approx c_1$). Зависимость Y от температуры для различных частот ω_J приведена на рис. 3.

Оценим отношение тепловой проводимости λ, полученной с учетом ангармонизма, к тепловой проводимости λ_0, полученной в приближении акустического несоответствия, выражением

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\sum\limits_{e\xi\omega} \rho_2\omega_J^2 \bar{A}_2\bar{A}_2^* \{1 + Y\} c_2 \cos(\chi_{2J})}{\sum\limits_{e\xi\omega}^{\omega<\omega_{D1}} \rho_2\omega_J^2 \bar{A}_2\bar{A}_2^* c_2 \cos(\chi_{2J})}. \tag{13}$$

Соотношение λ/λ_0 для различных границ, как функция аргумента $\rho_1 c_1\omega_{D1}/\kappa = \rho_1(c_{1L}\omega_{D1L} + 2c_{1T}\omega_{D1T})/(3\kappa)$, характеризующего влияние адгезии на прохождение волн через границу (2), представлено на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что представленная модель в ряде случаев позволила получить неплохое согласие теоретических оценок с экспериментальными данными, а также получить зависимость λ/λ_0 от $\rho_1 c_1\omega_{D1}/\kappa$, качественно близкую к зависимости $\lambda_{S\,\exp}/\lambda_{S\kappa}$, основанной на экспериментальных данных.

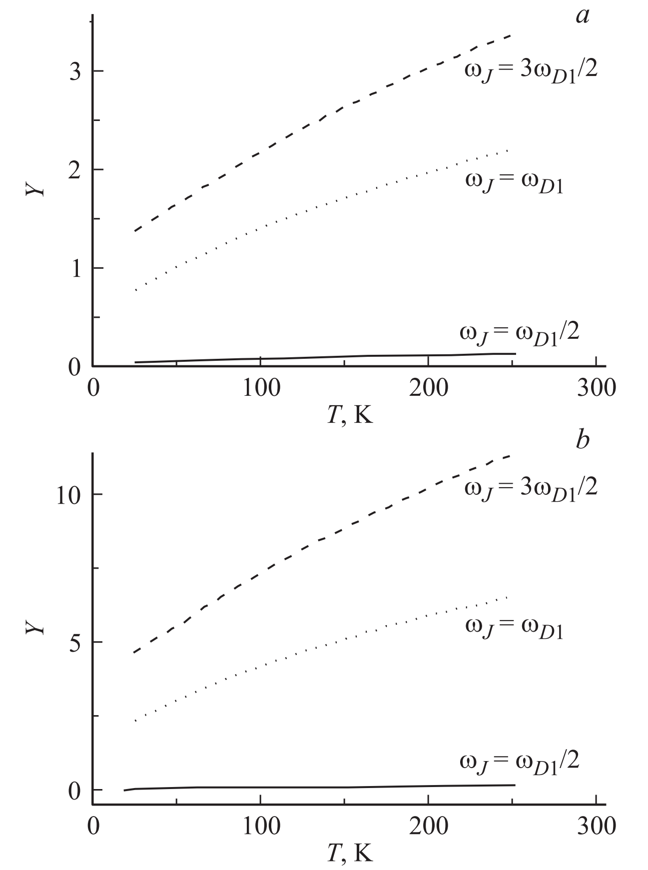

Рис. 3. Соотношение вкладов ангармонических и гармонических колебаний в тепловой поток через границу в зависимости от температуры на различных частотах в системе $Pb{-}Al_2O_3$ (*a* — продольные волны, *b* — поперечные волны).

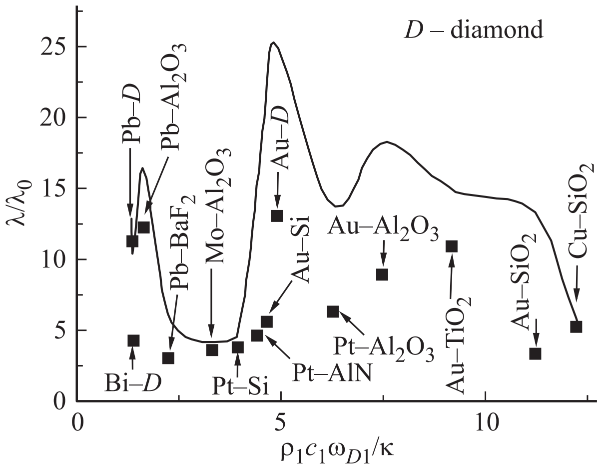

Рис. 4. Соотношение λ/λ_0: сплошная кривая — расчет по формуле (13); точки — оценка $\lambda/\lambda_0 = \lambda_{S\,\mathrm{exp}}/\lambda_{S\kappa}$ на основе данных, представленных в табл. 3.

В заключение анализа возможного влияния интерфейсного ангармонизма на теплоперенос через границы стоит отметить недавно вышедшую работу [41], в которой методами молекулярной динамики показано, что вклад интерфейсного ангармонизма в теплоперенос через границу Si–Ge (вещества с достаточно близкими величинами скоростей звука) может составлять 15%.

4. Заключение

В представленном исследовании установлено, что учет в расчетах адгезионного взаимодействия на границе позволяет улучшить согласие расчетных и экспериментальных значений тепловой проводимости границы. Показано, что важным эффектом при описании тепловой проводимости границ (в особенности материалов с существенно различными акустическими свойствами) может оказаться ангармонический переброс локализованных мод через границу. В заключение важно отметить, что рассмотренные два механизма, влияющие на теплоперенос через границу, являются лишь малой частью спектра явлений, происходящих на границе и в той или иной мере влияющих на теплоперенос. Кроме этого, модели, использованные в данной работе для описания адгезии и ангармонизма на границе, являются крайне упрощенными, и их следует рассматривать в большей степени как качественные, чем количественные.

Список литературы

[1] D.G. Cahill, W.K. Ford, K.E. Goodson, G.D. Mahan, A. Majumdar, H.J. Maris, R. Merlin, S.R. Phillpot. Appl. Phys. Rev. **93**, 793 (2003).
[2] D.G. Cahill, P.V. Braun, G. Chen, D.R. Clarke, S. Fan, K.E. Goodson, P. Keblinski, W.P. King, G.D. Mahan, A. Majumdar, H.J. Maris, S.R. Phillpot, E. Pop, L. Shi. Appl. Phys. Rev. **1**, 011305 (2014).
[3] И.М. Халатников. ЖЭТФ **22**, 687 (1952).
[4] E.T. Swartz, R.O. Pohl. Rev. Mod. Phys. **61**, 605 (1989).
[5] M.D. Losego, M.E. Grady, N.R. Sottos, D.G. Cahill, P.V. Braun. Nature. Mater. **11**, 502 (2012).
[6] P.J. O'Brien, S. Shenogin, J. Liu, P.K. Chow, D. Laurencin, P.H. Mutin, M. Yamaguchi, P. Keblinski, G. Ramanath. Nature Mater. **12**, 118 (2013).
[7] R. Prasher. Appl. Phys. Lett. **94**, 041905 (2009).
[8] И.Е. Дзялошинский, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. УФН **73**, 381 (1961).
[9] А.Н. Вакилов, М.В. Мамонова, В.В. Прудников. ФТТ **39**, 964 (1997).
[10] P.E. Hopkins, P.M. Norris, R.J. Stevens. J. Heat Trans. **130**, 022401 (2008).
[11] Y.A. Kosevich. Phys. Rev. B **52**, 1017 (1995).
[12] H.K. Lyeo, D.G. Cahill. Phys. Rev. B **73**, 144301 (2006).
[13] A.V. Sergeev. Phys. Rev. B **58**, R10199 (1998).
[14] M.L. Huberman, A.W. Overhauser. Phys. Rev. B **50**, 2865 (1994).
[15] А.Г. Слепнев, В.И. Хвесюк. Наноинженерия **1**, 17 (2011).
[16] G. Xu, M. Tazawa, P. Jin, S. Nakao, K. Yoshimura. Appl. Phys. Lett. **82**, 3811 (2003).
[17] L. Bergström. Adv. Colloid Interface Sci. **70**, 125 (1997).
[18] Физические величины. Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. Энергоатомиздат, М. (1991). 1232 с.
[19] В.К. Григорович. Электронное строение и термодинамика сплавов железа. Наука, М. (1970). 292 с.
[20] C. Deger, E. Bom, H. Angerer, O. Ambacher, M. Stutzmann, J. Homsteiner, E. Riha, G. Fischherauer. Appl. Phys. Lett. **72**, 2400 (1998).
[21] Y.N. Xu, W.Y. Ching. Phys. Rev. B **48**, 4335 (1993).
[22] R.J. Stevens, A.N. Smith, P.M. Norris. J. Heat Trans. **127**, 315 (2005).
[23] R.J. Stoner, H.J. Maris. Phys. Rev. B **48**, 16373 (1993).
[24] M. Battabyal, O. Beffort, S. Kleiner, S. Vaucher, L. Rohr. Diamond Rel. Mater. **17**, 1438 (2008).
[25] В. Миссол. Поверхностная энергия раздела фаз в металлах. Металлургия, М. (1978). 176 с.
[26] M.S. Kennedy, N.R. Moody, D.P. Adams, M. Clift, D.F. Bahr. Mater. Sci. Eng. A **493**, 299 (2008).
[27] Ю.В. Найдич, И.И. Габ, Б.Д. Костюк, Т.В. Стецюк, Д.И. Куркова, С.В. Дукаров. Докл. НАН Украины **5**, 97 (2007).
[28] D. Holec, P.H. Mayrhofer. Scr. Mater. **67**, 760 (2012).
[29] A. Navrotsky. Geochem. Trans. **4**, 34 (2003).
[30] C.M. Balik, S.K. Tripathy, A.J. Hopfinger. J. Polym. Sci. B **20**, 2003 (1982).
[31] G. Guisbiers, D. Liu, Q. Jiang, L. Buchaillot. Phys. Chem. Chem. Phys. **12**, 7203 (2010).
[32] A.A. Stekolnikov, J. Furthmüller, F. Bechstedt. Phys. Rev. B **65**, 115318 (2002).
[33] B.W. Veal, A.P. Paulikas. Phys. Rev. B **10**, 1280 (1974).
[34] I.G. Gurtubay, J.M. Pitarke, Wei Ku, A.G. Eguiluz, B.C. Larson, J. Tischler, P. Zschack, K.D. Finkelstein. Phys. Rev. B **72**, 125117 (2005).
[35] N.F. Mott. Proc. R. Soc. A **153**, 699 (1936).
[36] N. Oka, R. Arisawa, A. Miyamura, Y. Sato, T. Yagi, N. Taketoshi, T. Baba, Y. Shigesato. Thin Solid Films **518**, 3119 (2010).
[37] F. Nitsche, B. Schumann. J. Low. Temp. Phys. **39**, 119 (1980).
[38] В.А. Красильников, В.В. Крылов. Введение в физическую акустику. Наука, М. (1984). 400 с.
[39] O.M. Rayleigh. Proc. R. Soc. A **79**, 399 (1907).
[40] В.Н. Беломестных. Письма в ЖТФ **30**, 14 (2004).
[41] K. Gordiz, A. Henry. Sci. Rep. **6**, 23139 (2016).