

Оптимизация составной охлаждающей ветви

© И.А. Драбкин

АО „Гиредмет“,
119017 Москва, Россия

E-mail: igordrabk@gmail.com

(Получена 27 декабря 2016 г. Принята к печати 12 января 2017 г.)

Предложен способ расчета составной охлаждающей термоэлектрической ветви в одномерном приближении методом тепловых балансов с эффективными значениями термоэлектрических параметров: электропроводности σ , коэффициента термоэдс α и теплопроводности κ . Данный метод позволяет точно учесть температурные зависимости σ , α , κ . Влияние контактных сопротивлений на результирующую эффективность также учитывается точно. Показан способ перехода от расчета ветви к расчету термоэлемента.

DOI: 10.21883/FTP.2017.07.44651.37

Составная охлаждающая термоэлектрическая ветвь может обеспечивать увеличение максимальной разности температур ΔT_{\max} , получаемой на ветви [1]. Методы расчета таких ветвей достаточно сложны [2] и трудоемки. В работе [3] были получены точные выражения для тепловых балансов на концах термоэлектрической ветви при температурно-зависимых термоэлектрических параметрах. Эти выражения содержат эффективные значения этих параметров — электропроводности σ , коэффициента термоэдс α , теплопроводности κ , которые рассчитываются исходя из температурного поля в ветви. В данной работе дается обобщение метода эффективных тепловых балансов, позволяющее решать любую задачу оптимального построения термоэлектрических охладителей. Предложенная расчетная процедура более проста и позволяет учесть влияние контактных сопротивлений, которыми ранее пренебрегали, хотя они могут существенно ограничивать возможности составной ветви.

Для описания процессов внутри ветви надо решить уравнение [4]

$$(\nabla, \kappa \nabla T) + (\mathbf{j}, \mathbf{j})\rho - T(\mathbf{j}, \nabla \alpha) = 0, \quad (1)$$

где T — температура ветви, \mathbf{j} — плотность тока, ρ — удельное сопротивление. Пусть для определенности, что не ограничивает общности, рассматривается p -ветвь. Пусть на горячем конце ветви длиной L и сечением s температура T_h . За счет пропускания тока создается разность температур $\Delta T = T_h - T_c$, где T_c — температура холодного конца ветви. На холодный конец поступает тепловой поток плотностью Q_c , а с горячего снимается Q_h . Ограничимся одномерным случаем, и пусть ось x направлена от холодного конца ветви к горячему, тогда плотность тока j и плотность теплового потока Q будут отрицательны, в соответствии с рис. 1. В уравнениях теплового баланса они положительны, поэтому заменим $j = -j$ и $Q = -Q$. Уравнение (1) в этом случае принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) + j^2 \rho + T j \frac{d\alpha}{dx} = 0. \quad (2)$$

В [3] было показано, что, решая (2), можно получить уравнения теплового баланса в виде

$$\begin{cases} Q_c = \alpha_{c.\text{eff}} T_c j - j^2 L \rho_{c.\text{eff}} - \frac{\bar{\kappa} \Delta T}{L} \\ Q_h = \alpha_{h.\text{eff}} T_h j + j^2 L \rho_{h.\text{eff}} - \frac{\bar{\kappa} \Delta T}{L} \end{cases}, \quad (3)$$

где $\alpha_{h.\text{eff}}$, $\rho_{h.\text{eff}}$, $\alpha_{c.\text{eff}}$, $\rho_{c.\text{eff}}$ — эффективные значения α и ρ соответственно для горячего и холодного концов ветви, а $\bar{\kappa}$ — среднее по ветви значение теплопроводности. Выражения для самих эффективных значений имеют вид

$$\alpha_{h.\text{eff}} = \alpha(T_h) + \frac{1}{T_h} \int_0^L T \frac{d\alpha(T)}{dT} \frac{dT(y)}{dy} \hat{R}(y) dy, \quad (4)$$

$$\alpha_{c.\text{eff}} = \alpha(T_c) - \frac{1}{T_c} \int_0^L T \frac{d\alpha(T)}{dT} \frac{dT(y)}{dy} \hat{L}(y) dy, \quad (5)$$

$$\rho_{h.\text{eff}} = \frac{1}{L} \int_0^L \rho(T(y)) \hat{R}(y) dy + \frac{R_{\text{cont}}}{L}, \quad (6)$$

$$\rho_{c.\text{eff}} = \frac{1}{L} \int_0^L \rho(T(y)) \hat{L}(y) dy + \frac{R_{\text{cont}}}{L}, \quad (7)$$

$$\hat{R}(y) = \frac{\bar{\kappa}}{L} \int_y^L \frac{dx}{\kappa(x)}, \quad (8)$$

$$\hat{L}(y) = \frac{\bar{\kappa}}{L} \int_0^y \frac{dx}{\kappa(x)}, \quad (9)$$

$$\bar{\kappa} = L / \int_0^L \frac{dx}{\kappa(T(x))}, \quad (10)$$

где символами $T(x)$ или $T(y)$ обозначено распределение температуры вдоль ветви, получаемое из решения уравнения (2), а операторы $\hat{R}(y)$ и $\hat{L}(y)$ равны отношению

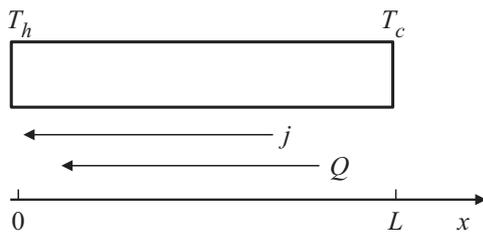


Рис. 1. Схема термоэлектрической ветви.

теплового сопротивления ветви соответственно справа и слева от точки Y к суммарному тепловому сопротивлению ветви, R_{cont} — контактное сопротивление на концах ветви.

Выражения (4)–(10), в отличие от [1], записаны для удельных сопротивлений и удельной теплопроводности; кроме того, из-за другого направления оси x изменился знак перед вторым членом в (4) и (5). Подчеркнем, что в уравнениях (3) опущен множитель $1/2$ перед теплом Джоуля, который представляет собой значения $\rho_{h,\text{eff}}, \rho_{c,\text{eff}}$ для температурно-независимых коэффициентов. Между эффективными величинами α и ρ существуют соотношения [3]

$$\alpha_{h,\text{eff}}T_h - \alpha_{c,\text{eff}}T_c = \bar{\alpha}\Delta T, \quad (11)$$

$$\rho_{h,\text{eff}} + \rho_{c,\text{eff}} = \bar{\rho} + \frac{2R_{\text{cont}}}{L}, \quad (12)$$

где

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_c}^{T_h} \alpha dT, \quad (13)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{L} \int_0^L \rho(T(x)) dx. \quad (14)$$

В случае зависимости эффективных значений α, ρ и $\bar{\kappa}$ от каких-либо скрытых параметров (концентрации носителей заряда, положения уровня Ферми и т.п.) выражения (4)–(10) можно дифференцировать по этим параметрам и тем самым производить оптимизацию по $Z = \alpha^2/\kappa\rho$. Следует подчеркнуть, что, так как имеется по три эффективных значения α и ρ , относящихся к холодному и горячему концам ветви, а также их средние значения, для достижения максимальной разности температур необходимо использовать $Z_c = \alpha_{c,\text{eff}}^2/\bar{\kappa}\rho_{c,\text{eff}}$, а для максимального холодильного коэффициента — $\bar{Z} = \bar{\alpha}^2/\bar{\kappa}\bar{\rho}$.

Рассмотрим теперь составную ветвь из N секций. Нумерация секций и координаты границ ясны из рис. 2.

Обозначим термоэлектрические параметры i -секции ($i = 1, 2, \dots, N$) как $\alpha_i(T_i), \rho_i(T_i), \kappa_i(T_i)$, где T_i — температура внутри i -секции. Соответствующие значения холодных и горячих температур i -секции обозначим как $T_{c,i}$ и $T_{h,i}$. Эффективные значения этих термоэлектрических параметров определим по аналогии с выражениями (4)–(10). Для этого надо при интегрировании по

координате заменить пределы интегрирования $0 \rightarrow L_{i-1}, L \rightarrow L_i$, а множитель $1/L$ перед знаком интеграла необходимо заменить на $1/(L_i - L_{i-1})$. Интегрирование по температуре нужно осуществлять в пределах $T_{c,i}$ и $T_{h,i}$, разность температур на i -секции равна $\Delta T_i = T_{h,i} - T_{c,i}$. В дальнейшем принадлежность эффективных параметров i -секции обозначим индексом, отделенным запятой: $\rho_{h,\text{eff},i}, \alpha_{c,\text{eff},i}, \rho_{h,\text{eff},i}, \rho_{c,\text{eff},i}$. Среднее значение теплопроводности i -секции обозначим $\bar{\kappa}_i$. Для операторов \hat{R}_i и \hat{L}_i , относящихся к i -секции, справедливы выражения

$$\hat{R}_i(y) = \frac{\bar{\kappa}_i}{L_i - L_{i-1}} \int_y^{L_i} \frac{dx}{\kappa_i(x)},$$

$$\hat{L}_i(y) = \frac{\bar{\kappa}_i}{L_i - L_{i-1}} \int_{L_{i-1}}^y \frac{dx}{\kappa_i(x)}, \quad (15)$$

где

$$\bar{\kappa}_i = (L_i - L_{i-1}) \int_{L_{i-1}}^{L_i} \frac{dx}{\kappa_i(T(x))}, \quad (16)$$

а тепловое сопротивление i -секции, отнесенное к единице сечения, равно

$$R_{t,i} = \frac{L_i - L_{i-1}}{\bar{\kappa}_i}. \quad (17)$$

После того как определены эффективные параметры секций, можно вычислить эффективные параметры ветви, состоящей из N секций: $\alpha_{hN,\text{eff}}, \alpha_{cN,\text{eff}}, \rho_{hN,\text{eff}}, \rho_{cN,\text{eff}}$. Для эффективных значений α получаем

$$\alpha_{cN,\text{eff}} = \alpha_N(T_{c,N}) - \frac{1}{T_{c,N}} \sum_{i=1}^{i=N} \left(\hat{L}_{ta,i} \Delta_{1,i} + \frac{R_{t,i}}{R_{ta}} \Delta_{2,i} \right) - \frac{1}{T_{c,N}} \sum_{i=2}^{i=N} \hat{L}_{ta,i} \Delta_{3,i}, \quad (18)$$

$$\alpha_{hN,\text{eff}} = \alpha_1(T_{h,1}) + \frac{1}{T_h} \sum_{i=1}^{i=N} \left(\hat{R}_{ta,i} \Delta_{1,i} + \frac{R_{t,i}}{R_{ta}} \delta_{2,i} \right) + \frac{1}{T_h} \sum_{i=2}^{i=N} \hat{R}_{ta,i} \Delta_{3,i}, \quad (19)$$

где $R_{ta} = \sum_{i=1}^{i=N} R_{t,i}(L_i - L_{i-1})$ — полное тепловое сопротивление ветви, отнесенное к единице сечения, а

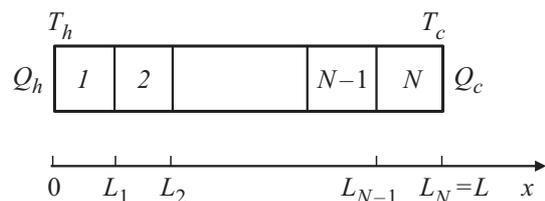


Рис. 2. Схема составной ветви.

$\hat{R}_{ta,i} = \sum_{k=i+1}^N R_{t,i}/R_{ta}$ и $\hat{L}_{ta,i} = \sum_{k=1}^{i-1} R_{t,i}/R_{ta}$ — относительное тепловое сопротивление ветви соответственно справа и слева от i -секции. Для $\hat{L}_{ta,i}$ и $\hat{R}_{ta,i}$ имеет место тождество

$$\hat{R}_{ta,i} + \hat{L}_{ta,i} + \frac{R_{t,i}}{R_{ta}} = 1. \quad (20)$$

Кроме того, $\hat{R}_{ta,N} = 0$ и $\hat{L}_{ta,1} = 0$. Остальные использованные в (18) и (19) обозначения таковы:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,i} &= \alpha_{c,i} T_{c,i} - \alpha_{h,i} T_{h,i} - \bar{\alpha}_i \Delta T_i, \\ \Delta_{2,i} &= \alpha_{h,i} T_h^{(i)} - \alpha_{c,\text{eff},i} T_{c,i}, \\ \Delta_{3,i} &= (\alpha_{h,i} - \alpha_{c,i-1}) T_{c,i}, \\ \delta_{2,i} &= \alpha_{h,\text{eff},i} T_{h,i} - \alpha_{h,i} T_{h,i}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для эффективных значений сопротивлений составной ветви можно получить

$$\begin{aligned} \rho_{c,\text{eff}} &= \sum_{i=1}^{i=N} \hat{L}_{t,i} \bar{\rho}_i + \frac{1}{L} \sum_{i=2}^{i=N} \hat{L}_{t,i} (R_{\text{cont},i-1} + R_{\text{cont},i}) \\ &+ \frac{1}{R_{ta}} \sum_{i=1}^{i=N} R_{t,i} \rho_{h,\text{eff},i}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \rho_{h,\text{eff}} &= \sum_{i=1}^{i=N} \hat{R}_{t,i} \bar{\rho}_i + \frac{1}{L} \sum_{i=2}^{i=N} \hat{R}_{t,i} (R_{\text{cont},i-1} + R_{\text{cont},i}) \\ &+ \frac{1}{R_{ta}} \sum_{i=1}^{i=N} R_{t,i} \rho_{h,\text{eff},i}. \end{aligned} \quad (23)$$

Можно показать, что эффективные значения ρ и α на концах ветви связаны между собой формулами, аналогичными выражениям (11)–(14).

Порядок расчета секционированной ветви таков.

Пусть мы секционируем ветвь для того, чтобы получить максимальное значение ΔT_{max} . Нам надо найти оптимальный ток и оптимальные длины секций. Вначале мы решаем уравнение (2). К граничным условиям необходимо добавить условия сочленения секций. Будем считать, что на границе секций отсутствует скачок температур, а тепловой поток, выходящий из i -секции, поступает в $(i-1)$ -секцию, увеличиваясь на джоулево тепло, выделяющееся на контактном сопротивлении. Подробно техника решения такого уравнения дается в работе [2]. При этом вместо уравнения второго порядка решаются два уравнения первого порядка для dT/dx и dQ/dx . Следует только иметь в виду, что используемые в данной работе уравнения отличаются знаком j . После того как решение найдено в достаточно большом количестве точек, вычисление интегралов, входящих в эффективные значения термоэлектрических параметров, не представляет труда. Значение ΔT_{max} находится по стандартным формулам [1]. Затем вычисляются производные от $Z_c = \alpha_{cN,\text{eff}}^2 R_{ta} / \rho_{cN,\text{eff}}$ по границам секций L_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$. Границы секций L_i изменяют

в соответствии со знаком производной. После этого делается аналогичный расчет для n -ветви. Согласование по плотности тока для p - и n -ветвей осуществляется изменением сечения ветвей или, если это нецелесообразно, в качестве плотности тока берется их среднее арифметическое. Если же различие в плотностях тока для ветвей различного типа велико и изменять сечение ветвей по каким-то конструктивным соображениям нецелесообразно, то вычисляется Z_c термоэлемента и ищется его максимум по границам секций L_i .

Таким образом находятся основные характеристики составной ветви: оптимальный ток и оптимальные длины секций. Связь эффективных значений на концах ветви со средними по ветви значениями (11)–(14) значительно облегчает отладку программ. Описанная процедура проще, чем используемый в [2] метод максимума Понтрягина, так как там вместо системы двух уравнений для dT/dx и dQ/dx необходимо решать систему из четырех уравнений.

Список литературы

- [1] А.Л. Вайнер, Н.В. Коломоец, Э.М. Лукишкер, В.М. Ржевский. ФТП, **11**, 546 (1977).
- [2] Л.И. Анатычук, В.А. Семенюк. *Оптимальное управление свойствами термоэлектрических материалов и приборов* (Черновцы, Прут, 1992).
- [3] И.А. Дробрин, З.М. Дашевский. В сб.: *Термоэлектрики и их применения* (СПб., 2000) с. 292.
- [4] В.Л. Бонч-Бруевич, С.Г. Калашников. *Физика полупроводников* (М., Наука, 1977) гл. I, с. 20.

Редактор Л.В. Шаронова

Optimization of segmented cooling Leg

I.A. Drabkin

JSC „Giredmet“,
119017 Moscow, Russia

Abstract A method of calculating the segmented thermoelectric cooling leg in one-dimensional approximation by means of thermal balance with effective values of thermoelectric parameters — conductivity σ , the Seebeck coefficient α and thermal conductivity κ — is presented. This method accurately accounts for the temperature dependences of σ , α , κ . The effect of contact resistances on the efficiency is also taken into account accurately. Application of the method for calculation of performance of thermoelement is also presented.