01;11

Синтезирование функции источника в самосогласованной задаче об излучении

 Г.С. Малышев, А.С. Раевский¶, С.Б. Раевский

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева (НГТУ), Нижний Новгород
¶ E-mail: raevsky@nntu.ru

Поступило в Редакцию 27 октября 2016 г.

Предлагается идеология строгой теории апертурных антенн, основанная на решении самосогласованной задачи об излучении. Делается утверждение, что такая задача приводит к системе однородных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, т. е. является задачей на собственные функции и собственные значения, позволяющей сформировать базис для решения задач возбуждения поля в открытом пространстве. Переход к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода позволяет решить задачу синтезирования функции источника под заданное поле излучения.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.12.44711.16544

Самосогласованная задача об излучении представляется как замкнутый цикл, когда поле излучения вычисляется через неизвестное поле на поверхности излучения и подставляется в граничные условия на этой поверхности. Самосогласованность задачи трактуется как ее „самодостаточность" — независимость от первичных источников, т. е. самосогласованная задача является задачей на собственные функции и собственные значения, которые образуют базис внешней краевой задачи на неоднородной системе уравнений Максвелла с краевыми условиями на внутренних поверхностях и условием Зоммерфельда на бесконечности. Указанный базис используется для представления поля, создаваемого заданным источником, т. е. для решения антенной задачи в строгой постановке.

Широко распространенными внешними краевыми задачами являются задачи об излучении из отверстия в проводящем экране, задача об излучении с концов экранированного и открытого диэлектрического волноводов (ОДВ). Излучающую поверхность, которой может быть, например, торец ОДВ или металлический экран с отверстием, представляем как плоскость S_0, по которой протекают электрические и магнитные токи с плотностями $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$ (рис. 1). Задача данной работы — на основе поставленной самосогласованной краевой задачи об излучении, приводящей к системе однородных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, сформулировать строгую теорию апертурных антенн, позволяющую синтезировать функцию источника под заданное поле излучения.

В самосогласованной задаче поле на излучающей поверхности полагается неизвестным. Оно ищется [1] как решение интегрального уравнения или системы векторных интегральных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\tau = \frac{1}{4\pi}\left[-i\omega\mu \int\limits_{S_0} \mathbf{H}_\tau \frac{e^{-i\mathbf{kr}}}{r}\, dS + \operatorname{rot}\left(\int\limits_{S_0} \mathbf{E}_r \frac{e^{-i\mathbf{kr}}}{r}\, dS\right), \mathbf{z}_0\right], \\ \mathbf{H}_\tau = \frac{1}{4\pi}\left[i\omega\varepsilon \int\limits_{S_0} \mathbf{E}_r \frac{e^{-i\mathbf{kr}}}{r}\, dS + \operatorname{rot}\left(\int\limits_{S_0} \mathbf{H}_\tau \frac{e^{-i\mathbf{kr}}}{r}\, dS\right), \mathbf{z}_0\right], \end{cases} \tag{1}$$

относительно тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на излучающей поверхности S_0. В (1) $\mathbf{z}_0$ — единичный вектор, перпендикулярный поверхности излучения. Квадратные скобки означают векторное произведение. Как видно из (1), интегральные уравнения однородные. Таким образом, имеем задачу на собственные функции и собственные значения. Такая задача, сформулированная в виде замкнутого цикла (поле излучения вычисляется через неизвестное поле на поверхности излучения и подставляется в граничные условия на этой поверхности), называется самосогласованной. В ней отсутствует заданное стороннее поле. Задачи, в которых это поле присутствует, приводят к неоднородным интегральным уравнениям. Такие задачи не следует классифицировать как самосогласованные.

Поскольку задача на собственные функции и собственные значения приводит к характеристическому уравнению, она имеет множество решений, образующих базис для представления поля, создаваемого заданным источником. Этот базис, полученный как решение самосогласованной задачи, учитывает обратное влияние поля излучения на первичный источник.

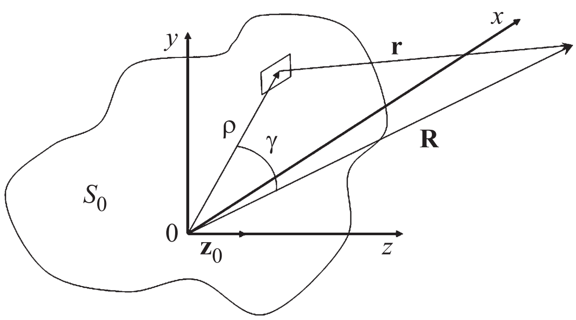

Рис. 1. Фрагмент излучающей поверхности S_0.

При круговой апертуре система интегральных уравнений (1) в компонентной записи, соответствующей рис. 1, приводится к виду

$$\begin{cases} E_\rho = -\frac{i\omega\mu}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} H_\varphi \frac{e^{-ikr_o}}{r_o} \rho d\rho d\varphi_o, \\ H_\varphi = -\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} E_\rho \frac{e^{-ikr_o}}{r_o} \rho d\rho d\varphi_o. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} E_\varphi = \frac{i\omega\mu}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} H_\rho \frac{e^{-ikr_o}}{r_o} \rho d\rho d\varphi_o, \\ H_\rho = \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} E_\varphi \frac{e^{-ikr_o}}{r_o} \rho d\rho d\varphi_o. \end{cases} \tag{3}$$

где $r_o = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \varphi_o)}$; ρ определяет положение точки со сферическими координатами $(\rho,\ \theta_o,\ \varphi_o)$. Система (2) может быть получена из (3) (и наоборот) с помощью перестановочного принципа двойственности [2], что подтверждает их корректность.

Можно сформулировать два варианта расчета поля излучения на основе уравнений (2) и (3). Первый предполагает автономность систем уравнений (2) и (3), как получаемых одна из другой с помощью перестановочного принципа двойственности. Второй предполагает изначальную связанность систем (2) и (3), их совместное решение относительно всех четырех компонент. При этом, согласно спектральному методу [3], компоненты поля подвергаются автономным разложениям, коэффициенты которых определяются из совместного решения систем интегральных уравнений (2), (3). В этом случае самосогласованная задача решается спектральным методом, и ее собственные значения находятся как совместные решения двух характеристических уравнений, получаемых в результате алгебраизации систем интегральных уравнений.

На основе сформулированной самосогласованной задачи об излучении, приводящей к системе однородных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода (2), (3), можно поставить задачу синтеза функции источника, создающего заданное поле излучения. В этом случае в интегральных уравнениях (2), (3) свободные функции полагаются заданными, а искомые функции источника, создающего заданное поле, входят под знак интеграла. В результате от системы однородных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода переходим к системе неоднородных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. При этом исходная самосогласованность краевой задачи позволяет учитывать обратное влияние поля излучения на источник. Базис для разложения синтезируемой функции источника выбирается на основе геометрии излучателя.

Рассмотрим случай реализации поля излучения с торца круглого диэлектрического волновода, распределенного по гауссову закону:

$$E_\rho(R,\varphi) = Ae^{-\gamma(R/a)^2}\cos(n\varphi), \quad H_\varphi(R,\varphi) = Be^{-\gamma(R/a)^2}\sin(n\varphi), \tag{4}$$

$$E_\varphi(R,\varphi) = B\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,e^{-\gamma(R/a)^2}\sin(n\varphi),\ H_\rho(R,\varphi) = A\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,e^{-\gamma(R/a)^2}\cos(n\varphi). \tag{5}$$

В этом случае, подставляя в (2), (3) в правые части разложения полей по собственным волнам ОДВ с индексом $n = 1$, в левые части — выражения (4), (5), получаем

$$\begin{cases} Ae^{-\gamma(R/a)^2}\cos(n\varphi) = -\frac{i\omega\mu}{4\pi}\sum\limits_{m=1}^{M} A_{1m}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} H_\varphi^{(m)}\frac{e^{-ikr_o}}{r_o}\rho d\rho d\varphi_o, \\ Be^{-\gamma(R/a)^2}\sin(n\varphi) = -\frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\sum\limits_{m=1}^{M} A_{1m}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} E_\rho^{(m)}\frac{e^{-ikr_o}}{r_o}\rho d\rho d\varphi_o, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} B\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,e^{-\gamma(R/a)^2}\sin(n\varphi) = \frac{i\omega\mu}{4\pi}\sum\limits_{m=1}^{M} A_{1m}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} H_\rho^{(m)}\,\frac{e^{-ikr_o}}{r_o}\,\rho d\rho d\varphi_o, \\ A\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,e^{-\gamma(R/a)^2}\cos(n\varphi) = \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi}\sum\limits_{m=1}^{M} A_{1m}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} E_\varphi^{(m)}\,\frac{e^{-ikr_o}}{r_o}\,\rho d\rho d\varphi_o. \end{cases} \tag{7}$$

В дальнейшем рассматриваем только систему (6). Поиск амплитудных коэффициентов A_{1m} и сумм в правых частях системы (6) производим для следующих параметров: $A = 1$, $B = 1$ — амплитудные коэффициенты из выражений (4); $a = 6\,\mathrm{mm}$ — радиус ОДВ; $\gamma = 6$ — коэффициент из выражений (4); $n = 1$ — азимутальный индекс волн ОДВ; $\tilde{\varepsilon}_1 = 2.04$, $\tilde{\varepsilon}_2 = 1$, $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = 1$ — относительные диэлектрические и магнитные проницаемости внутренней и внешней областей соответственно; $f = 185\,\mathrm{GHz}$.

Алгебраизация уравнений (6), (7) осуществляется методом коллокаций [4] с эквидистантной сеткой в плоскости $(R,\ \varphi)$. Выбор частоты 185 GHz связан с тем, что при заданных параметрах ОДВ на данной частоте распространяется 15 волн с индексом $n = 1$, что позволяет использовать достаточное для качественной аппроксимации количество узлов коллокации.

На рисунках (рис. 2) приводятся результаты суммирования членов ряда (штрихпунктирные линии) в правых частях системы (6) для случая семи узлов коллокации. На этих же рисунках приводятся заданные распределения полей (4) (сплошные линии с круглым маркером). Мнимые части сумм рядов практически обращаются в нуль. Маркерами в виде звезды показаны значения в узлах коллокации.

Приведенные численные результаты свидетельствуют о том, что система интегральных уравнений, к которой приводит самосогласованная задача об излучении в открытое пространство, позволяет находить функцию распределения токов первичных источников, создающих заданное поле излучения. Предлагаемый подход обеспечивает установление связи между задаваемыми характеристиками поля излучения и пространством собственных функций краевой задачи, соответствующей апертуре излучателя. Поскольку эта связь устанавливается в рамках самосогласованной задачи, в ней учитывается обратное влияние поля излучения на первичный источник.

Если обычно в задачах о возбуждении алгоритм вычисления амплитуд спектральных составляющих основывается на ортогональности

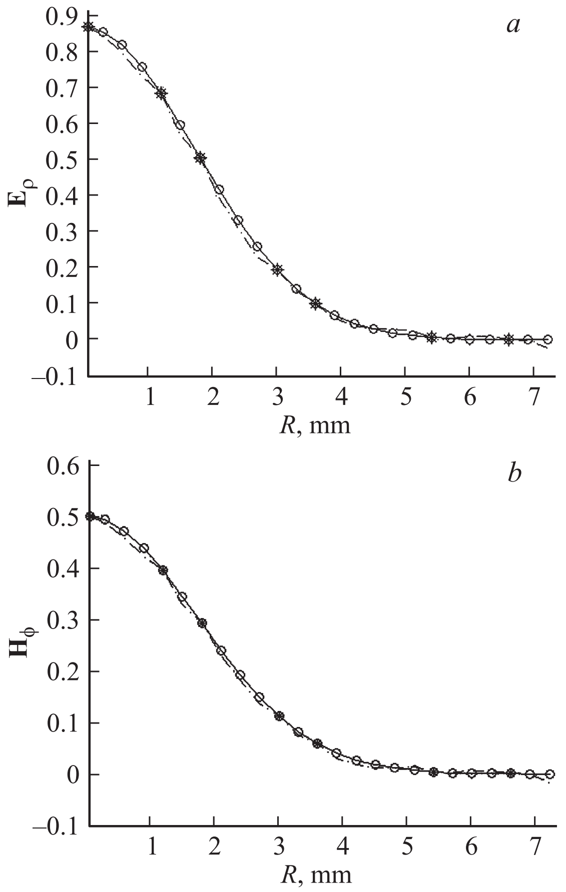

Рис. 2. Сравнение сумм в правых частях системы (6) с заданным распределением (4) для случая семи узлов коллокации с радиальными координатами $R_1 = 0.06$ mm, $R_2 = 1.2$ mm, $R_3 = 1.8$ mm, $R_4 = 3$ mm, $R_5 = 3.6$ mm, $R_6 = 5.4$ mm, $R_7 = 6.6$ mm и азимутальной координатой $\varphi = 30^\circ$ (a, b); с радиальной координатой $R = 1.5$ mm и азимутальными координатами $\varphi_1 = 14.4^\circ$, $\varphi_2 = 64.8^\circ$, $\varphi_3 = 115.2^\circ$, $\varphi_4 = 165.6^\circ$, $\varphi_5 = 216^\circ$, $\varphi_6 = 266.4^\circ$, $\varphi_7 = 316.8^\circ$ (c, d). a, c — реальная составляющая правой части первого из уравнений (6); b, d — реальная составляющая правой части второго из уравнений (6).

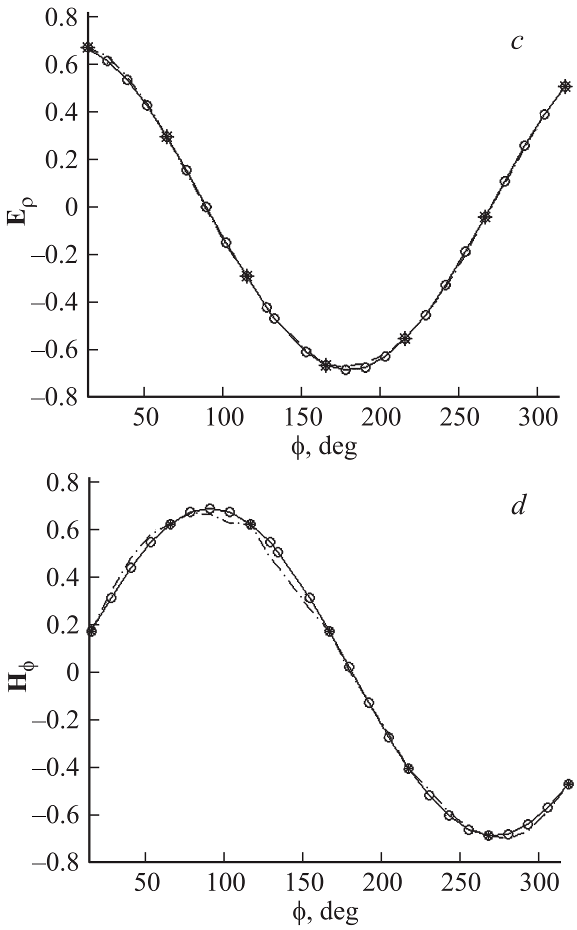

Рис. 2 (*продолжение*).

собственных функций соответствующей краевой задачи, то в предлагаемом подходе амплитуды спектральных составляющих, обеспечивающих требуемое поле излучения, находятся из системы интегральных уравнений, т. е. последняя позволяет синтезировать функцию источника под заданные характеристики поля излучения.

Таким образом:

1. Сформулирована самосогласованная задача об излучении с плоской апертуры, приводящая к системе однородных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

2. Показано, что самосогласованная задача об излучении позволяет решить задачу синтезирования функции источника, создающего заданное поле излучения, которая приводит к системе неоднородных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода.

3. Сформулирована задача об излучении с торца круглого открытого диэлектрического волновода (ОДВ) в приближении удаленности источника, возбуждающего спектр волн ОДВ, от торца диэлектрического волновода.

4. Показана эффективность алгебраизации системы неоднородных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на основе метода коллокаций.

5. Установлена связь спектра собственных волн круглого ОДВ, создающего заданное поле излучения, с параметрами ОДВ и частотой. Показано, что создание заданного поля излучения требует выполнения условия распространения в ОДВ определенного количества собственных волн, что создает частотное ограничение в синтезировании функции источника.

Список литературы

[1] *Раевский А.С. Раевский С.Б.* // Антенны. 2014. В. 2 (201). С. 3–6.
[2] *Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Радиотехника, 2007. 743 с.
[3] *Агалаков А.Н., Раевский С.Б., Титаренко А.А.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 7. С. 1113–1123.
[4] *Алексидзе М.А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. М.: Наука, 1991. 352 с.