

Однофотонная эмиссионная вычислительная томография в пропорциональной рассеивающей среде

© С.А. Терещенко

Национальный исследовательский университет „МИЭТ“,
124498 Москва, Россия
e-mail: tsa@miee.ru

(Поступило в Редакцию 1 августа 2016 г. В окончательной редакции 18 февраля 2017 г.)

Рассмотрена реконструкция пространственного распределения источников излучения в пропорциональной рассеивающей среде. На основе точного аналитического решения уравнения переноса излучения для произвольного распределения источников излучения, произвольного распределения коэффициента экстинкции и точных граничных условий дано точное решение обратной томографической задачи. Показаны характер и масштаб искажений, обусловленных рассеянием излучения, при томографической реконструкции.

DOI: 10.21883/JTF.2017.09.44898.2016

Введение

Физико-математической основой вычислительной (реконструктивной) томографии является интегродифференциальное уравнение переноса излучения (УПИ), описывающее процесс взаимодействия излучения с веществом [1–4]. При этом вещество характеризуется своими параметрами, вводимыми феноменологически, в первую очередь коэффициентом поглощения излучения в данной точке и дифференциальным по углам коэффициентом рассеяния излучения (индикатрисой рассеяния) в данной точке и в данном направлении. Эти коэффициенты описывают физические процессы поглощения и рассеяния излучения при прохождении через вещество и зависят, естественно, от вида излучения. Если необходимо описать другие физические процессы, нужно вводить соответствующие параметры вещества, характеризующие эти процессы. В самом УПИ неизвестной является плотность потока квантов излучения (например, фотонов), а коэффициенты поглощения и рассеяния, а также плотность распределения источников излучения предполагаются заданными параметрами. Решение УПИ представляет собой прямую задачу. Однако в трансмиссионной вычислительной томографии (ТВТ) именно неоднородные в пространстве параметры вещества пассивного объекта являются искомыми величинами. Распределение же источников излучения продолжает считаться известным. При этом способ облучения внешним зондирующим излучением задает томографическую схему измерений. Соответственно в эмиссионной вычислительной томографии (ЭВТ) искомой величиной является пространственное распределение источников излучения, а характеристики вещества считают известными, но затрудняющими решение задачи. ТВТ и ЭВТ представляют собой примеры так называемой обратной задачи [5–7].

Успехи традиционной вычислительной томографии как ТВТ в варианте прежде всего рентгеновской вычислительной томографии, так и ЭВТ в вариантах од-

нофотонной эмиссионной вычислительной томографии (ОФЭВТ) и двухфотонной позитронной эмиссионной томографии (ПЭТ) связаны с удачным предположением о возможности пренебречь процессами рассеяния излучения и рассматривать только поглощение излучения веществом. Предположение о чисто поглощающей среде (ЧПС) позволило получить точное аналитическое решение прямой задачи УПИ в общем случае с правильными граничными условиями [1]. На основе этого аналитического решения стало возможным и точное аналитическое решение обратной задачи. В случае ТВТ и ПЭТ — это обратное преобразование Радона, полученное самим И. Радонам [8], а в случае ЭВТ — обратное экспоненциальное преобразование Радона [9–11]. Однако если для рентгеновского излучения в ТВТ и излучения радионуклидов в ЭВТ предположение о малости процессов рассеяния по сравнению с процессами поглощения излучения в какой-то мере оправданно, то, например, для лазерного излучения в видимом и инфракрасном диапазонах оно абсолютно неприменимо [12]. Это обстоятельство обусловило появление большого количества исследований в области взаимодействия биологических тканей с оптическим излучением и трансмиссионной томографии сильно рассеивающих сред (СРС), в том числе трансмиссионной оптической томографии [7, 13–16]. В то же время в области разработки эмиссионной томографии в СРС исследования практически не проводятся, за исключением методов частичной коррекции эффектов, связанных с рассеянием [17–21].

Основой для разработки томографии рассеивающих сред является УПИ, учитывающее рассеяние. Однако в этом случае прямая задача из-за сложности УПИ общего аналитического решения не имеет, что вынуждает использовать различные дополнительные предположения, позволяющие его упростить. Для упрощения УПИ возможны три способа введения дополнительных предположений: условия, накладываемые на свойства вещества, взаимодействующего с излучением, т.е. на индикатрису рассеяния, условия, накладываемые на вид

УПИ (модификация уравнения переноса), и условия, заранее накладываемые на решение УПИ [22]. Очевидно, что чем меньше предположений сделано для упрощения УПИ и чем они более слабые, тем более точно результат описывает прохождение излучения через среду. В этом смысле наиболее привлекательными являются предположения первой группы, затрагивающие только свойства взаимодействующей с излучением среды, что доказывается успехами традиционной томографии для ЧПС, основанной на единственном предположении о равенстве индикатрисы рассеяния нулю.

В настоящей работе рассмотрена задача эмиссионной вычислительной томографии для реконструкции пространственного распределения источников излучения в пропорциональной рассеивающей среде (ПРС) [7,23], для которой было получено точное аналитическое решение УПИ в общем случае с правильными граничными условиями.

УПИ для пропорциональной рассеивающей среды

Взаимодействие излучения с рассеивающей средой описывается УПИ, в которое характеристики рассеивающей среды входят в качестве феноменологических параметров. Этими характеристиками являются неоднородный коэффициент поглощения излучения $\mu_a(\mathbf{r})$ и неоднородный дифференциальный по углам коэффициент рассеяния излучения (индикатриса рассеяния) $\mu_S(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega)$, где \mathbf{r} — точка среды, Ω' и Ω — направления фотона до рассеяния и после рассеяния соответственно. Считая среду изотропной, определим

$$\mu_a(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta P_a(\Delta l)}{\Delta l}, \quad (1)$$

где $\Delta P_a(\Delta l)$ — вероятность поглощения кванта излучения при прохождении пути Δl вблизи точки \mathbf{r} . Аналогично

$$\mu_S(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0, \Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P_S(\Delta l, \Delta \Omega)}{\Delta l / \Delta \Omega}, \quad (2)$$

где $\Delta P_S(\Delta l, \Delta \Omega)$ — вероятность рассеяния кванта излучения, движущегося в направлении Ω' , в телесный угол $\Delta \Omega$ вблизи направления Ω при прохождении пути Δl вблизи точки \mathbf{r} .

Феноменологическое определение характеристик среды (1) и (2) не только позволяет не конкретизировать микроскопические механизмы процессов поглощения и рассеяния, но и является основой для экспериментального измерения значений коэффициента поглощения и индикатрисы рассеяния в реальных образцах.

Определений (1) и (2) достаточно для вывода стационарного УПИ в односкоростном приближении (приближении упругого рассеяния), которое можно записать в

виде [1–4]

$$\Omega \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \mu(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \Omega) - \iint_{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, \Omega') \mu_S(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' = S(\mathbf{r}, \Omega), \quad (3)$$

где $\Phi(\mathbf{r}, \Omega)$ — плотность потока квантов излучения в точке \mathbf{r} , движущихся в направлении Ω , $S(\mathbf{r}, \Omega)$ — функция распределения источников излучения и

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_a(\mathbf{r}) + \iint_{4\pi} \mu_S(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega'$$

— коэффициент экстинкции (ослабления). При этом точные граничные условия учитывают, что излучение порождается только источниками, находящимися внутри рассеивающей области, и никакого излучения, входящего извне внутрь рассеивающей области, нет

$$\Phi(\mathbf{r}_b, \Omega)|_{(\mathbf{n}\Omega) < 0} = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{r}_b — произвольная точка на границе рассеивающего объекта, \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе в точке \mathbf{r}_b .

В таком общем виде УПИ (3) для произвольных $\mu_a(\mathbf{r})$, $\mu_S(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega)$, $S(\mathbf{r}, \Omega)$ и граничных условий (4) не имеет аналитического решения. Поэтому без дополнительных предположений обойтись невозможно. В настоящее время, по-видимому, единственным примером рассеивающей среды, допускающей аналитическое решение УПИ в общем случае, является ПРС.

Пропорциональную рассеивающую среду можно определить следующим образом. Сначала определим трехмерную рассеивающую среду со свойством „рассеяние прямо назад“, для которой

$$\mu_S(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) = \mu_S(\mathbf{r})\delta_2(-\Omega'\Omega), \quad (5)$$

где

$$\mu_S(\mathbf{r}) = \iint_{4\pi} \mu_S(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega'$$

— коэффициент рассеяния, а $\delta_2(\bullet)$ — поверхностная дельта-функция (двумерная дельта-функция на поверхности единичной сферы [1]). При этом процесс рассеяния в трехмерном пространстве по существу сводится к обратному рассеянию в каждом акте рассеяния. Основным свойством такой рассеивающей среды, обеспечивающим эффективность сделанного предположения для томографии, является то, что сохраняется понятие линии проецирования, т.е. если квант (фотон) двигался вдоль некоторой прямой линии, то он останется на этой линии, лишь меняя время от времени направление движения на противоположное. Следовательно, можно осуществить декомпозицию трехмерной задачи на набор двумерных, что важно для эффективного решения обратной томографической задачи. По-видимому, предположение (5)

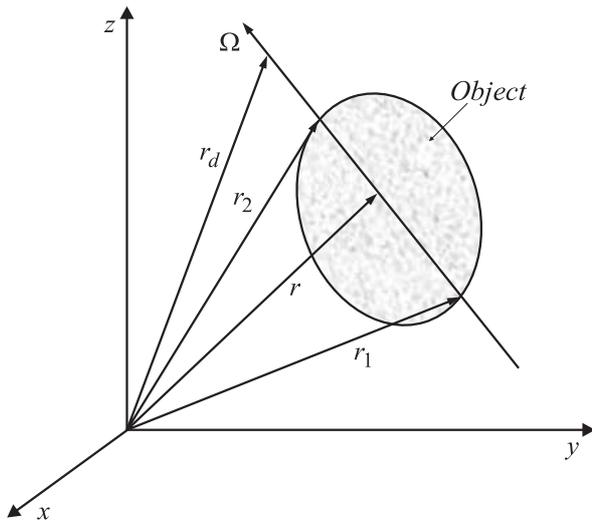


Рис. 1. К решению уравнения (8).

единственное, обладающее таким свойством, если не считать тривиальное „рассеяние прямо вперед“:

$$\mu_S(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) = \mu_S(\mathbf{r})\delta_2(+\Omega'\Omega),$$

при котором среда неотличима от чисто поглощающей, т.е. ее рассеивающие свойства полностью теряются.

Далее, предположим, что пространственно-неоднородные коэффициенты поглощения и рассеяния связаны соотношением

$$\mu_S(\mathbf{r}) = \alpha\mu_a(\mathbf{r}) = \beta\mu(\mathbf{r}), \tag{6}$$

где α и $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ — не зависящие от координат коэффициенты, а $\mu(\mathbf{r}) = \mu_a(\mathbf{r}) + \mu_S(\mathbf{r})$. Объединяя (5) и (6), получим соотношение, определяющее ПРС:

$$\mu_S(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) = \alpha\mu_a(\mathbf{r})\delta_2(-\Omega'\Omega) = \beta\mu(\mathbf{r})\delta_2(-\Omega'\Omega). \tag{7}$$

При использовании предположения (7) УПИ резко упрощается:

$$\Omega \text{ grad } \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \mu(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \Omega) - \beta\mu(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, -\Omega) = S(\mathbf{r}, \Omega). \tag{8}$$

Обозначим на линии, проходящей через произвольную точку \mathbf{r} в объекте в направлении Ω (к детектору), точку входа в рассеивающую область \mathbf{r}_1 , точку выхода из рассеивающей области \mathbf{r}_2 и точку детектирования \mathbf{r}_d (рис. 1).

Учитывая, что излучение порождается только источниками, находящимися внутри рассеивающей области, и никакого излучения, входящего извне внутрь рассеивающей области, нет, запишем точные граничные условия

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{r}_1, \Omega) = 0, \\ \Phi(\mathbf{r}_2, -\Omega) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Ранее [23] было получено точное аналитическое решение уравнения (8) с точными граничными условиями для произвольной области распределения источников излучения и произвольной области распределения коэффициентов поглощения и рассеяния. Считая, что источники излучения полностью погружены внутрь объекта, т.е. $S(\mathbf{r}_d, \Omega) = 0$ в точке детектирования \mathbf{r}_d , это решение можно записать в виде

$$\Phi(\mathbf{r}_d, \Omega) = \int_{-|\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_1|}^{-|\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_2|} S(\mathbf{r}_d + R'\Omega, \Omega) \times \left[\frac{k \text{ch} \left(\int_{-|\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_1|}^{R'} k\mu(\mathbf{r}_d + R''\Omega) dR'' \right) + (1 + \beta) \text{sh} \left(\int_{-|\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_1|}^{R'} k\mu(\mathbf{r}_d + R''\Omega) dR'' \right)}{k \text{ch} \left(\int_{-|\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_1|}^{-|\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_2|} k\mu(\mathbf{r}_d + R'''\Omega) dR''' \right) + \text{sh} \left(\int_{-|\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_1|}^{-|\mathbf{r}_d-\mathbf{r}_2|} k\mu(\mathbf{r}_d + R'''\Omega) dR''' \right)} \right] dR', \tag{10}$$

где $k = \sqrt{1-\beta^2}$, $\text{sh}(\bullet)$ и $\text{ch}(\bullet)$ — синус гиперболический и косинус гиперболический соответственно.

Решение (10) является точным аналитическим решением для уравнения переноса излучения в пропорциональной рассеивающей среде с точными граничными условиями для произвольного распределения источников излучения и произвольного распределения коэффициента экстинкции.

Однофотонная эмиссионная томография в ПРС

Точное решение обратной задачи в ТВТ для томографической реконструкции пространственного распределения коэффициента экстинкции в пропорциональной рассеивающей среде на основе решения уравнения переноса излучения (10) было получено в [23]. Если в ТВТ за счет управления распределением источников излучения реализуется томографическая схема облучения объекта, то в ЭВТ реконструкции подлжит само пространственное распределение источников излучения, и томографическая схема реализуется за счет управления процессом измерения [7]. При этом источники излучения полагают изотропными, т.е. $S(\mathbf{r}, \Omega) = S(\mathbf{r})$, а распределение коэффициента поглощения в ЧПС считают известным. Хотя можно ставить задачу реконструкции пространственного распределения источников излучения при известном, но произвольном распределении коэффициента поглощения, обычно предполагают однородное в пределах объекта распределение коэффициента поглощения с известным его численным значением $\mu_a(\mathbf{r}) = \mu_a = \text{const}$,

что приводит к экспоненциальному преобразованию Радона [7]. В случае ПРС к коэффициенту поглощения добавляется еще и коэффициент рассеяния, который также будем считать известным и распределенным однородно в пределах объекта $\mu_S(\mathbf{r}) = \mu_S = \text{const}$. При этом в целом из-за наличия границ объекта распределения коэффициентов поглощения и рассеяния остаются неоднородными. Заметим, что внутри объекта условие (5), т.е. условие пропорциональности рассеивающей среды, выполняется автоматически. Так как внутри объекта $\mu(\mathbf{r}) = \mu_a(\mathbf{r}) + \mu_S(\mathbf{r}) = \mu = \mu_a + \mu_S = \text{const}$,

$$\Phi(\mathbf{r}_d, \Omega) = \int_{-|\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_1|}^{-|\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_2|} S(\mathbf{r}_d + R'\Omega) \times \left[\frac{k \operatorname{ch}(k\mu(|\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_1| + R')) + (1 + \beta) \operatorname{sh}(k\mu(|\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_1| + R'))}{k \operatorname{ch}(k\mu(-|\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_2| + |\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_1|)) + \operatorname{sh}(k\mu(-|\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_2| + |\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_1|))} \right] dR'. \quad (11)$$

В ПРС понятие линии проецирования сохраняется, поэтому можно проводить реконструкцию в каждом двумерном сечении независимо. Введем декартову систему координат (x, y, z) с осью z , совпадающей с осью вращения детектора вокруг объекта. Рассмотрим сечение $S(x, y, z_0)$ объекта в плоскости $z = z_0$ (рис. 2, a). Как обычно в томографии [7], введем в плоскости сечения наряду с неподвижной системой координат (x, y) вращающуюся (повернутую на угол θ) систему координат (ξ, ζ) , в которой ось ξ всегда параллельна линии проецирования. В эмиссионной томографии линии проецирования выделяются с помощью коллимирующего устройства, например многоканального коллиматора с параллельными каналами, который задает круговую геометрию измерений с параллельными проекциями (рис. 2, b). При этом коллиматор, как правило, совмещен с позиционно-чувствительным детектором (ПЧД).

Во вращающейся системе координат $\mathbf{r}_d = (\xi, R, z_0)$, $\mathbf{r}_1 = (\xi, L_1, z_0)$, $\mathbf{r}_2 = (\xi, L_2, z_0)$, $\Omega = (0, 1, 0)$, $S_\theta(\xi, \zeta, z_0) = S(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z_0)$ и выражение (11), сделав замену переменных $\xi = R' + R$, можно записать в виде

$$\Phi(\mathbf{r}_d, \Omega) = \int_{L_1}^{L_2} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \times \frac{[k \operatorname{ch}(k\mu(\xi - L_1)) + (1 + \beta) \operatorname{sh}(k\mu(\xi - L_1))]}{k \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1))} d\xi. \quad (12)$$

При значении β , стремящемся к нулю, выражение (12) непрерывно переходит в правильное выражение, соответствующее ЧПС, что позволяет использовать его как для сред с сильным рассеянием, так и для сред со слабым рассеянием. В пределе при $\beta = 0$, для ЧПС получим известное экспоненциальное преобразование

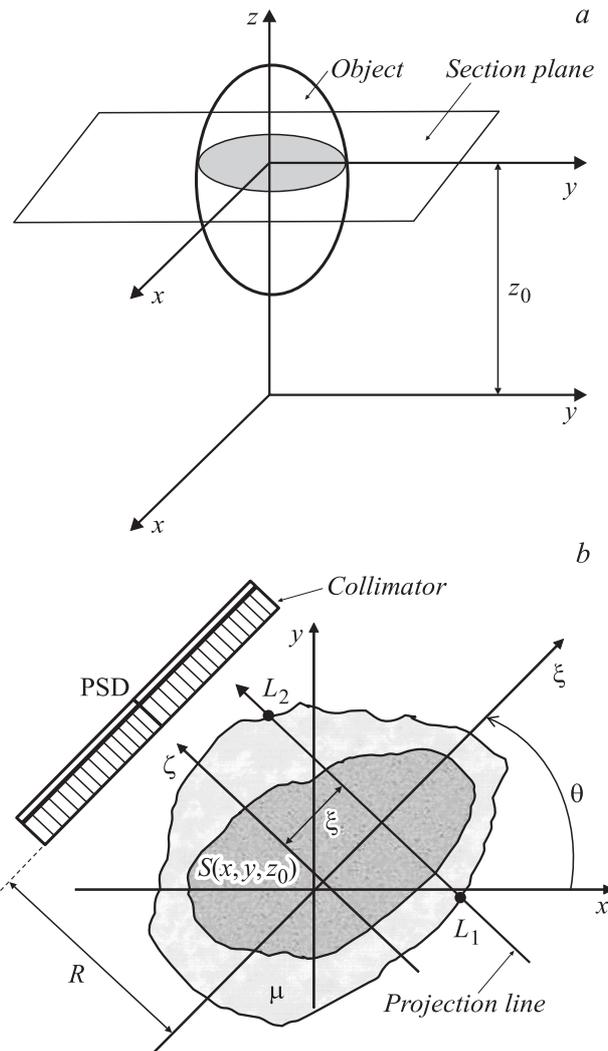


Рис. 2. Выделение двумерного сечения в трехмерном объекте (a); неподвижная (x, y) и вращающаяся (ξ, ζ) системы координат в круговой схеме измерений с параллельными проекциями (b), R — радиус вращения ПЧД.

Радона [7,9–11]

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_d, \Omega)|_{\beta=0} &= \exp(-\mu_a L_2) \int_{L_1}^{L_2} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu_a \xi) d\xi \\ &= \exp(-\mu_a L_2) \int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu_a \xi) d\xi \\ &= \exp(-\mu_a L_2) \mathfrak{R}_{\mu_a} \{S(x, y, z_0)\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathfrak{R}_{\mu_a} \{\bullet\}$ — экспоненциальное преобразование Радона с параметром μ_a . При этом проекцией $p(\xi, \theta)$ называют именно экспоненциальное преобразование Радона, освобожденное от влияния границы объекта, т.е. от множителя $\exp(-\mu_a L_2)$ в выражении (13), что всегда можно сделать, так как границы объекта считаются

известными заранее

$$p(\xi, \theta) = \exp(\mu_a L_2) \Phi(\mathbf{r}_d, \Omega) \Big|_{\beta=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\xi, \xi, z_0) \exp(\mu_a \xi) d\xi = \mathfrak{R}_{\mu_a} \{S(x, y, z_0)\}. \quad (14)$$

Выражение (12) существенно сложнее выражения (13), тем не менее из него также можно найти экспоненциальное преобразование Радона, освобожденное от влияния границ объекта, что позволяет для решения обратной задачи использовать хорошо разработанный аппарат обратного экспоненциального преобразования Радона. Для этого наряду с прямым измерением (12) необходимо ввести понятие оппозитного измерения, т.е. измерения вдоль той же линии проецирования, но после поворота на 180°. Для оппозитного измерения $\Phi'(\mathbf{r}'_d, \Omega')$: $\Omega' = -\Omega$, $\mathbf{r}'_d = (\xi', R, z_0) = (-\xi, R, z_0)$, $\mathbf{r}'_1 = (\xi', L_1, z_0) = (-\xi, -L_2, z_0)$, $\mathbf{r}'_2 = (\xi', L_2, z_0) = (-\xi, -L_1, z_0)$ и

$$\Phi'(\mathbf{r}'_d, \Omega') = \int_{L_1}^{L_2} S_\theta(\xi, \xi, z_0) \times \frac{[k \operatorname{ch}(k\mu(\xi - L_2)) - (1 + \beta) \operatorname{sh}(k\mu(\xi - L_2))]}{k \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1))} d\xi. \quad (15)$$

Используя прямое (12) и оппозитное (15) измерения, можно получить выражение для проекции $p(\xi, \theta)$, т.е. интеграла вдоль прямой линии, представляющее собой экспоненциальное преобразование Радона (14) с параметром $k\mu$ вместо μ_a :

$$p(\xi, \theta) = \int_{L_1}^{L_2} S_\theta(\xi, \xi, z_0) \exp(k\mu \xi) d\xi = \mathfrak{R}_{k\mu} \{S(x, y, z_0)\} = \frac{\Phi(\mathbf{r}_d, \Omega)(a+b) \exp(k\mu L_2) - \Phi'(\mathbf{r}'_d, \Omega')(a-b) \exp(k\mu L_1)}{2ab \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + (a^2 + b^2) \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1))}, \quad (16)$$

где

$$a = \frac{k}{k \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1))},$$

$$b = \frac{(1 + \beta)}{k \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1))}.$$

Следовательно, для реконструкции пространственного распределения $S(x, y, z_0)$ можно использовать методы обращения экспоненциального преобразования Радона [7,9–11].

Таким образом, получено точное решение обратной томографической задачи нахождения пространственного распределения источников излучения в пропорциональной рассеивающей среде в виде

$$S(x, y, z_0) = \mathfrak{R}_{k\mu}^{-1} \{p(\xi, \theta)\}, \quad (17)$$

где $\mathfrak{R}_{k\mu}^{-1} \{\bullet\}$ — обратное экспоненциальное преобразование Радона с параметром $k\mu = \sqrt{1 - \beta^2}(\mu_a + \mu_s) =$

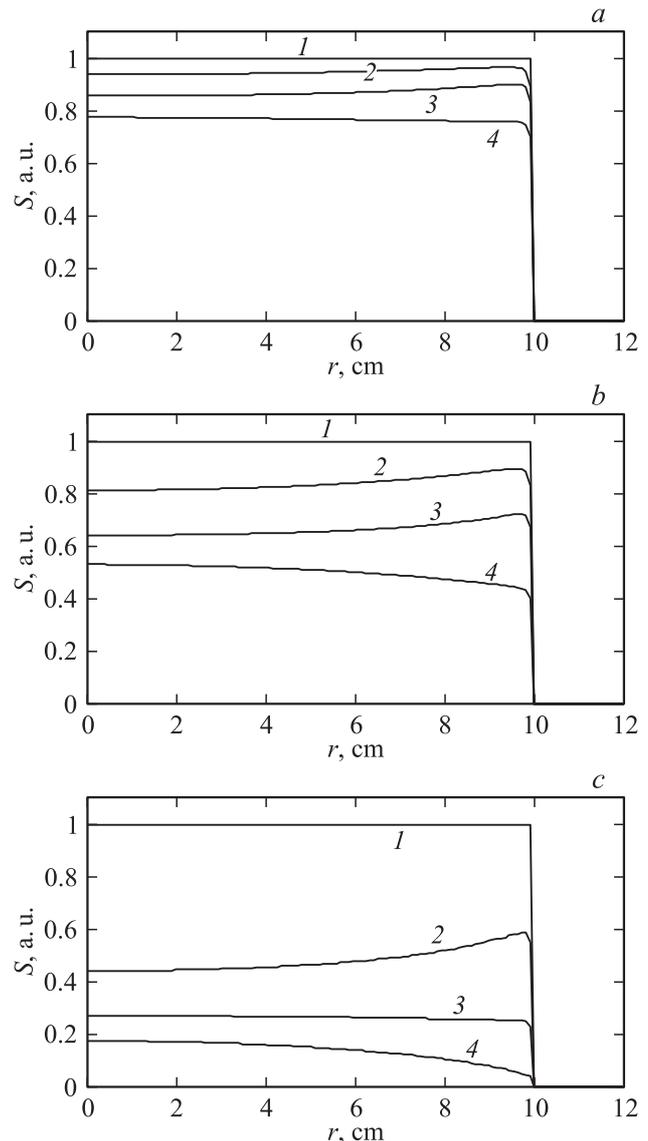


Рис. 3. Истинный профиль (1) и восстановленные профили радиальных сечений при $\beta = 0.3$ (a), $\beta = 0.6$ (b), $\beta = 0.9$ (c) для $\mu_a R = 0.5$ (2), $\mu_a R = 1.0$ (3), $\mu_a R = 2.0$ (4).

$= \sqrt{\mu_a(\mu_a + 2\mu_s)}$, а $p(\xi, \theta)$ определяется выражением (16) по результатам оппозитных измерений.

Влияние рассеяния на результаты томографической реконструкции

Учет рассеяния в разработанном методе основан на двух основных отличиях от обычных алгоритмов ОФЭВТ, основанных на предположении об отсутствии рассеяния. Во-первых, на специальной предобработке измеренных данных в соответствии с выражением (16). Во-вторых, на выполнении обратного экспоненциального преобразования Радона (17) не с параметром μ_a , а с параметром $k\mu$. Представляет интерес рассмотреть

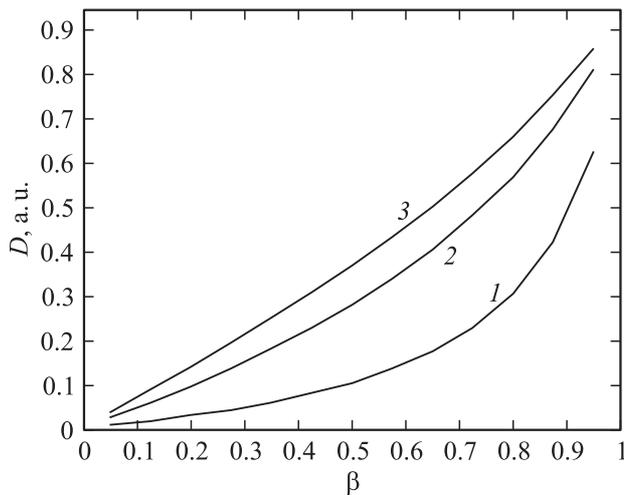


Рис. 4. Зависимость среднеквадратичного отклонения D от параметра β для $\mu_a R = 0.5$ (1), 1.0 (2), 2.0 (3).

искажения, вносимые рассеянием в результаты томографической реконструкции, при использовании стандартных алгоритмов для чисто поглощающей среды. В этом случае искаженные проекции $\tilde{p}(\xi, \theta)$ находят не по формуле (16), а по формуле

$$\tilde{p}(\xi, \theta) = \exp(\mu_a L_2) \Phi(\mathbf{r}_d, \Omega), \quad (18)$$

а восстановленное распределение $\tilde{S}(x, y, z_0)$ находят как обратное экспоненциальное преобразование Радона с параметром μ_a вместо $k\mu$:

$$\tilde{S}(x, y, z_0) = \mathfrak{R}_{\mu_a}^{-1} \{ \tilde{p}(\xi, \theta) \}. \quad (19)$$

Для рассмотрения был выбран тестовый двумерный объект в виде однородного распределения источников излучения в пределах круга радиуса $R_0 = 10$ см, погруженного в рассеивающую среду с однородным распределением коэффициента поглощения и коэффициента рассеяния в пределах концентрического круга радиуса $R = 12$ см. Для радиально-симметричного объекта экспоненциальное преобразование Радона сводится к экспоненциальному преобразованию Абея [24], что позволяет при реконструкции использовать обратное экспоненциальное преобразование Абея.

Отклонение восстановленного распределения источников излучения $\tilde{S}(x, y, z_0)$ от истинного $S(x, y, z_0)$ можно оценивать по значениям нормированного среднеквадратичного отклонения восстановленного радиального профиля от истинного радиального профиля.

Искажения восстановленного распределения источников излучения от истинного будут зависеть как от величины коэффициента пропорциональности β , так и от значения безразмерной величины μR . На рис. 3 показаны профили радиального сечения восстановленного распределения источников излучения, демонстрирующие характер и масштаб возникающих искажений. На рис. 4

приведены зависимости нормированного среднеквадратичного отклонения восстановленного распределения источников излучения от истинного при различных сочетаниях μR и β . Хорошо видно, что с ростом рассеивающих свойств среды резко падает амплитуда восстановленного распределения, причем это падение усиливается с ростом габаритов объекта. Кроме того, существенным искажениям подвергаются области на краю объекта, что, естественно, проявится на границах внутренних неоднородностей объекта.

Заключение

Пропорциональная рассеивающая среда (7) позволяет найти точное аналитическое решение (10) уравнения переноса излучения (3) с точными граничными условиями (4) для произвольного распределения источников излучения и произвольного распределения коэффициента экстинкции. В настоящее время ПРС является единственным примером рассеивающей среды, для которой точно решена обратная томографическая задача не только для трансмиссионной вычислительной томографии [23], но и в настоящей работе для однофотонной эмиссионной вычислительной томографии при реконструкции пространственного распределения источников излучения.

Получены формулы обращения (16)–(17) соответствующего интегрального преобразования (12). Исследовано влияние процесса рассеяния на точность реконструкции при использовании алгоритмов для чисто поглощающей среды, не учитывающих рассеяние излучения.

Поскольку полученное решение для ПРС является точным, оно может служить критерием для оценки точности других алгоритмов томографической реконструкции пространственного распределения источников излучения, претендующих на применимость к произвольным рассеивающим средам, а следовательно, и к ПРС. Полученные результаты могут быть полезны при реконструкции пространственных распределений источников излучения, например, при диагностике ТВЭЛ ядерных реакторов, а также при разработке новых типов эмиссионных томографов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.575.21.0090, идентификатор RFMEFI57514X0090).

Список литературы

- [1] Case K.M., Zweifel P.F. Linear Transport Theory. London: Addison–Wesley, 1967. 360 p.
- [2] Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978. 256 с.

- [3] *Ishimaru A.* Wave Propagation and Scattering in Random Media. NY.: Academic Press, 1978. Vol. 1. 268 p.; Vol. 2. 304 p.
- [4] *Апресян Л.А., Кравцов Ю.А.* Теория переноса излучения. М.: Наука, 1983. 216 с.
- [5] Image Reconstruction from Projections: Implementaton and Applications / Ed. by G.T. Herman. Berlin and NY.: Springer–Verlag, 1979. 252 p.
- [6] *Herman G.T.* Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. NY.: Academic Press, 1980. 316 p.
- [7] *Терещенко С.А.* Методы вычислительной томографии. М.: Физматлит, 2004. 320 с.
- [8] *Radon J.* // Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1917. Vol. 69. P. 262–277.
- [9] *Bellini S., Piacentini M., Cafforio C., Rocca F.* // IEEE Tr. on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1979. Vol. ASSP–27. N 3. P. 213–218.
- [10] *Tretiak O., Metz C.* // SIAM J. of Appl. Mathematics. 1980. Vol. 39. N 2. P. 341–354.
- [11] *Gullberg G.T., Budinger T.F.* // IEEE Tr. on Biomedical Engineering. 1981. Vol. BME–28. N 2. P. 142–157.
- [12] *Тучин В.В.* Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике. М.: Физматлит, 2013. 812 с.
- [13] Selected Papers on Optical Tomography: Fundamentals and Applications in Medicine // Proc. SPIE, 1998, Vol. MS147/HC. 736 p.
- [14] *Arridge S.R.* // Inverse Problems. 1999. Vol. 15. P. R41–R93.
- [15] Photon Migration and Diffuse-Light Imaging II // Proc. SPIE. 2005. Vol. 5859. 280 p.
- [16] Optical Tomography and Spectroscopy of Tissue X. // Proc. SPIE. 2013. Vol. 8578. 632 p.
- [17] Emission Tomography: The Fundamentals of PET and SPECT / Ed. by M.N. Wernick, J.N. Aarsvold. San Diego, CA: Elsevier Academic Press, 2004. 580 p.
- [18] *Axelsson B., Msaki P., Israelsson A.* // J. Nucl. Medicine. 1984. Vol. 25. P. 490–494.
- [19] *Levin C.S., Hoffman E.J.* // Phys. Medicine and Biology. 1999. Vol. 44. P. 781–799.
- [20] *Zaidi H.* // European J. Nuclear Medicine. 2000. Vol. 27. N 12. P. 1813–1826.
- [21] *Zaidi H., Koral K.F.* // European J. Nucl. Medicine. 2004. Vol. 31. N 5. P. 761–782.
- [22] *Tereshchenko S.A., Dolgushin S.A., Titenok S.A.* // Opt. Commun. 2013. Vol. 306. P. 26–34.
- [23] *Терещенко С.А.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 5. С. 69–75.
- [24] *Терещенко С.А.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 13–18.