Журнал технической физики, 2017, том 87, вып. 9

03

Влияние наклонного электростатического поля на неустойчивость Кельвина–Гельмгольца при течении жидкого диэлектрика и газа

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
119192 Москва, Россия
e-mail: verazhan@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 20 ноября 2015 г. В окончательной редакции 4 марта 2017 г.)

В линейной постановке на базе уравнений и граничных условий гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости и электростатики изучен эффект, вызываемый действием поверхностных пондеромоторных сил на неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Выписаны в виде неравенств условия, которым должны удовлетворять величины определяющих параметров задачи, чтобы неустойчивое при отсутствии электрического поля течение переходило в устойчивый режим после наложения горизонтального электрического поля. Показано, что на границе устойчивости длина волны наиболее неустойчивой моды не зависит от пондеромоторных сил. Установлено, что в случае жидкости с большой диэлектрической проницаемостью имеется устойчивый режим течения, для которого условие устойчивости отличается лишь малыми безразмерными величинами от условия устойчивости заряженной поверхности покоящегося жидкого проводника, граничащего с неподвижным газом.

DOI: 10.21883/JTF.2017.09.44902.1674

Введение

Система уравнений и граничных условий электрогидродинамики, описываемая моделью Тейлора–Мелчера [1,2], представляет результаты экспериментальных и теоретических исследований, проведенных во второй половине XX в. Эта модель учитывает как уход из рассматриваемого объема жидкого диэлектрика свободных электрических зарядов, образующихся в результате различных физико-химических процессов в объеме и на его границе, так и поступление в этот объем свободных зарядов извне.

Наряду с моделью Тейлора–Мелчера в электрогидродинамике используется более простая модель однородного по температуре (и другим физическим характеристикам) несжимаемого жидкого диэлектрика, не содержащего свободных электрических зарядов (см., например, работы [3–7]). Теоретические основы такого подхода были заложены в конце XIX в. [8]. В этой модели запись пондеромоторных сил является частным случаем общих формул электродинамики сплошных сред [9].

В однородном несжимаемом жидком диэлектрике при отсутствии свободных электрических зарядов объемные пондеромоторные силы отсутствуют. Ввиду этого в рамках такой модели электрическое поле оказывает силовое воздействие на жидкость лишь за счет пондеромоторных сил, локализованных на поверхности раздела с газом или с жидкостью, имеющей другую диэлектрическую проницаемость.

Известно, что при включении и последующем квазистатическом увеличении напряженности однородного электрического поля, перпендикулярного горизонтальной свободной поверхности покоящегося жидкого диэлектрика, при превышении критической величины поля реализуется гидростатическое состояние жидкости с неплоской свободной поверхностью. В отличие от этого поверхностные пондеромоторные силы, порождаемые статическим параллельным полем, оказывают стабилизирующее действие на вызываемые различными факторами неустойчивости поверхностей раздела диэлектрическая жидкость–газ.

При движении тонкой плоской струи жидкости в потоке воздуха, имеющем другую по величине, но одинаково направленную скорость, при наличии продольного электрического поля неустойчивость наступает при более высокой скорости струи [3]. При капиллярном распаде цилиндрической струи, находящейся в продольном электрическом поле и окруженной газом с постоянным давлением, область неустойчивости (в плоскости параметров „волновое число — квадрат частоты") уменьшается за счет смещения ее правой границы в сторону более длинных волн [4]. В рамках нелинейной теории показано, что продольное поле препятствует вызываемому капиллярными силами разрыву тонкой пленки невязкой диэлектрической жидкости [5]. Достаточно сильное продольное поле гасит растущие возмущения в сверхтонком (толщиной 100–1000 Å) плоском слое диэлектрической жидкости, динамика которой наряду с капиллярными, вязкими и пондеромоторными силами определяется также расклинивающим давлением, создаваемым силами Ван-дер-Ваальса [6].

В отличие от имеющихся публикаций в настоящей работе исследовано влияние наклонного электрического поля на неустойчивость стационарного течения с одинаково направленными скоростями расположенных друг над другом газа и диэлектрической жидкости, имеющих разрыв скорости на горизонтальной поверхности раздела.

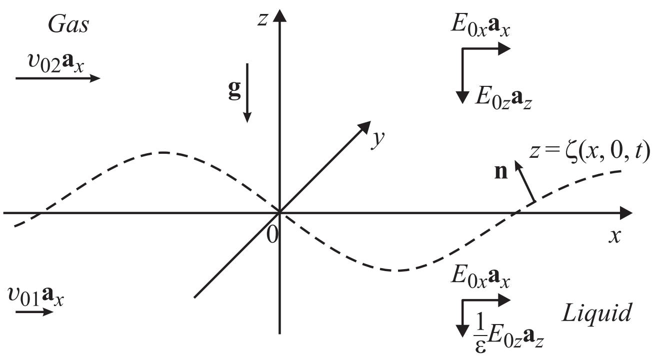

Рис. 1. Геометрия задачи и обозначения.

Определяющие уравнения и граничные условия

В достаточно большой области трехмерного пространства рассматриваются горизонтальные потоки невязкой диэлектрической жидкости и расположенного над ней газа. Предполагается, что вдали от поверхности раздела сред в газе с помощью внешних устройств создано наклонное электростатическое поле $\mathbf{E}_0$ — рис. 1. В жидкости и в газе свободные электрические заряды отсутствуют. Поле E_0, естественно, не превышает пробивного значения E_b. Для сухого воздуха $E_b = 30\,\mathrm{kV/cm}$ [8]. Далее в качестве основной системы единиц используется система CGS.

Введем декартову систему координат x, y, z, у которой ось x параллельна горизонтальной составляющей электрического поля $\mathbf{E}_0$, а ось z направлена вертикально. Обозначим через $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ соответствующие орты. Далее индексами $j = 1, 2$ отмечаются физические величины, относящиеся к жидкости ($j = 1$) и к газу ($j = 2$). Пусть уравнение $z = \xi$ представляет форму поверхности раздела жидкости и газа. Ввиду наличия случайных возмущений, неизбежно возникающих в экспериментах, $\xi = \xi(x, y, t)$, где t — время.

Распределения электрических полей $\mathbf{E}_j = -\nabla u_j \times (x, y, z, t)$ описываются уравнениями и граничными условиями электростатики диэлектриков

$$\nabla^2 u_j = 0,\ \ \nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z},\ \ j = 1, 2, \quad (1)$$

$$\text{при } z = \xi(z, y, t): \quad u_1 = u_2, \qquad \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}, \quad (2)$$

$$\text{при } z \to +\infty: \quad \nabla u_2 \to -\mathbf{E}_0 = -E_{0x}\mathbf{a}_x - E_{0z}\mathbf{a}_z, \quad (3)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость жидкости, а $\mathbf{n}(x, y, t)$ — единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный в сторону газа:

$$\mathbf{n}(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2}}\left(-\frac{\partial\xi}{\partial x}\,\mathbf{a}_x - \frac{\partial\xi}{\partial y}\,\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z\right).$$

Течения сред описываются уравнениями неразрывности и уравнениями Эйлера

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

$$\rho_j\left[\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j, \nabla)\mathbf{v}_j\right] = -\nabla p_j + \rho_j\mathbf{g}, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{v}_j(x, y, z, t) = (v_{jx}, v_{jy}, v_{jz})$ — скорость, ρ_j — плотность, $p_j(x, y, z, t)$ — давление, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести. Предполагается, что течения потенциальны.

Два кинематических условия и динамическое условие на поверхности раздела газ–жидкость имеют вид

$$\text{при } z = \xi(x, y, t): \frac{\partial\xi}{\partial t} + \mathbf{v}_j\nabla\xi = v_{jz},\ \ j = 1, 2, \quad (6)$$

$$\text{при } z = \xi(x, y, t): p_1 - p_2 = \alpha \operatorname{div}\mathbf{n} - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\left[(\nabla u_1)^2 + (\varepsilon - 1)\left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)^2\right], \quad (7)$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

Пропорциональное $\varepsilon-1$ слагаемое в правой части динамического условия (7) представляет вклад поверхностных пондеромоторных сил [9].

Предполагается, что вдали от поверхности раздела сред жидкость и газ движутся горизонтально с постоянными скоростями $v_{0j}\mathbf{a}_x t$,

$$\text{при } z \to +\infty: \quad \mathbf{v}_1 \to v_{01}\mathbf{a}_x,$$

$$\text{при } z \to +\infty: \quad \mathbf{v}_2 \to v_{02}\mathbf{a}_x, \quad (8)$$

причем $0 < v_{01} < v_{0.2}$.

Задача (1)–(8) имеет точное решение

$$\xi_0 = 0, \quad u_{01}(x, z) = -E_{0x}x - \frac{1}{\varepsilon}E_{0z}z,$$
$$u_{02}(x, z) = -E_{0x}x - E_{0z}z, \quad (9)$$
$$\mathbf{v}_{01} = v_{01}\mathbf{a}_x, \quad \mathbf{v}_{02} = v_{02}\mathbf{a}_x,$$
$$p_{01}(z) = p_0 - \rho_1 gz - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\left[E_{0x}^2 + \frac{1}{\varepsilon}E_{0z}^2\right],$$
$$p_{02}(z) = p_0 - \rho_2 gz,$$

где p_0 — постоянное давление.

При исследовании неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в отсутствие электрического поля [10] выражения (9) с $\mathbf{E}_0 = 0$ представляют основное течение.

Постановка задачи

Для исследования устойчивости точного стационарного решения (9) по отношению к бесконечно малым возмущениям применим стандартный подход [11]. Предварительно с целью упрощения дальнейших выкладок перейдем к системе координат, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_{01}$, сохраняя при этом обозначения x, y, z для координат и полагая $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{02} - \mathbf{v}_{01}$.

Наложим на решение (9) малые возмущения:

при $z < \xi(x, y, t)$: $u_1(x, y, z, t) = u_{01}(x, z) + \psi_1(x, y, z, t)$, (10)

$$\mathbf{v}_1(x, y, z, t) = \nabla\varphi_1(x, y, z, t),$$

$$p_1(x, y, z, t) = p_{01}(z) + q_1(x, y, z, t),$$

при $z > \xi(x, y, t)$: $u_2(x, y, z, t) = u_{02}(x, z) + \psi_2(x, y, z, t)$, (11)

$$\mathbf{v}_2(x, y, z, t) = \mathbf{v}_0 + \nabla\varphi_2(x, y, z, t),$$

$$p_2(x, y, z, t) = p_{02}(z) + q_2(x, y, z, t).$$

Считается, что возмущение $\xi(x, y, t)$ плоской поверхности раздела $z = 0$ таково, что возмущенная поверхность раздела удовлетворяет требованию малости наклонов [12]. Физически данное требование означает, что локальное вертикальное отклонение $|\xi(x, y, t)|$ возмущенной поверхности от горизонтального положения $z = 0$ много меньше характерной протяженности горба или впадины. В уравнении движения (5) в таком случае инерционный член $(\mathbf{v}_j, \nabla)\mathbf{v}_j$ мал по сравнению с линейным членом $\partial\mathbf{v}_j/\partial t$ и ввиду этого опускается.

Подстановка выражений (10), (11) в уравнения (1), (4), (5) приводит к результату

$$\nabla^2\psi_j = 0, \quad \nabla^2\varphi_j = 0, \quad j = 1, 2, \tag{12}$$

$$q_1 = -\rho_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}, \quad q_2 = -\rho_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + v_0 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right). \tag{13}$$

После линеаризации граничных условий электростатики (2) и гидродинамики (6), (7), проведенной с учетом выражений (10), (11), (13), получаем

при

$$z = 0: \quad \psi_2 - \psi_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E_{0z}\xi,$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = (\varepsilon - 1)E_{0x} \frac{\partial\xi}{\partial x}, \tag{14}$$

$$\rho_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \rho_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + v_0 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) + g\xi(\rho_1 - \rho_2)$$

$$- \alpha\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right) + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left(E_{0x} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} - E_{0z} \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E_{0x}E_{0z} \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}.$$

В силу (3), (8), (10), (11) имеем

при

$$z \to +\infty: \quad \nabla\psi_2 \to 0, \quad \nabla\varphi_2 \to 0,$$

при

$$z \to -\infty: \quad \nabla\varphi_1 \to 0. \tag{15}$$

Далее рассматривается задача (12), (14), (15).

Дисперсионное уравнение

Исследование поведения с ростом времени решения сформулированной линейной задачи, зависящего от x, y, z, t, проведем с использованием метода нормальных мод [10]. Положим

$$\left[\xi(x, y, t), \psi_j(x, y, z, t), \varphi_j(x, y, z, t)\right] = \left[Z, \Psi_j(z), \Phi_j(z)\right]$$

$$\times \exp\left\{\left[i\left(k_x x + k_y y - \omega(k_x, k_y)t\right)\right]\right\}, \quad j = 1, 2, \tag{16}$$

где Z — константа, i — мнимая единица, $\mathbf{k} = k_x\mathbf{a}_x + k_y\mathbf{a}_y$, $-\infty < k_x < +\infty$, $-\infty < k_y < +\infty$, $k_x^2 + k_y^2 \neq 0$ — волновой вектор (действительный параметр), а функция $\omega = \omega(k_x, k_y)$ подлежит нахождению из уравнений и граничных условий.

После подстановки выражений (16) в уравнения Лапласа (12) получаем

$$\frac{d^2\Psi_j}{dz^2} - k^2\Psi_j = 0, \quad \frac{d^2\Phi_j}{dz^2} - k^2\Phi_j = 0,$$

$$j = 1, 2, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \tag{17}$$

Граничные условия (14) принимают вид

$$\text{при } z = 0: \quad \Psi_2 - \Psi_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E_{0z}Z,$$

$$\frac{d\Psi_2}{dz} - \varepsilon \frac{d\Psi_1}{dz} = i(\varepsilon - 1)ZE_{0x}k_x, \tag{18}$$

$$i\omega(\rho_2\Phi_2 - \rho_1\Phi_1) - ik_x\rho_2 v_0\Phi_2 + [g(\rho_1 - \rho_2) + \alpha k^2]Z$$

$$+ \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left[ik_x E_{0x}\left(\Psi_1 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E_{0z}Z\right) - E_{0z} \frac{d\Psi_1}{dz}\right],$$

$$i\omega Z + \frac{d\Phi_1}{dz} = 0,$$

$$i(k_x v_0 - \omega)Z - \frac{d\Phi_2}{dz} = 0.$$

Исчезающие при $z \to \pm\infty$ решения уравнений (17) имеют вид

$$\Psi_1 = A_1 \exp(kz), \quad \Psi_2 = A_2 \exp(-kz),$$

$$\Phi_1 = B_1 \exp(kz), \quad \Phi_2 = B_2 \exp(-kz),$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные константы.

После подстановки выписанных решений в граничные условия (18) приходим к следующей системе уравнений относительно A_1, A_2, B_1, B_2, Z:

$$A_1 - A_2 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E_{0z}Z = 0, \tag{19}$$

$$k(\varepsilon A_1 + A_2) + i(\varepsilon - 1)E_{0x}k_x Z = 0,$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}(ik_x E_{0x} - kE_{0z})A_1 - i\rho_1\omega B_1 - i\rho_2(k_x v_0 - \omega)B_2$$

$$+ \left[\alpha k^2 + g(\rho_1 - \rho_2)\right]Z = 0,$$

$$kB_1 + i\omega Z = 0,$$

$$kB_2 - i(k_x v_0 - \omega)Z = 0.$$

Условие существования нетривиального решения системы однородных уравнений (19) — равенство нулю ее определителя

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - 2k_x\rho_2 v_0\omega + k_x^2\rho_2 v_0^2 - gk(\rho_1 - \rho_2) - \alpha k^3$$

$$- m\big[\varepsilon(E_{0x}k_x)^2 - (E_{0z}k)^2\big] = 0, \ m = \frac{(\varepsilon - 1)^2}{4\pi\varepsilon(\varepsilon + 1)} \quad (20)$$

представляет дисперсионное уравнение.

Влияние пондеромоторных сил на течение

Обращаясь к (20), легко найти корни дисперсионного уравнения

$$\omega_{1,2}(k_x, k_y) = \frac{\rho_2 v_0}{\rho_1 + \rho_2} k_x \pm \sqrt{\frac{f(k_x, k_y)}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad (21)$$

где

$$f(k_x, k_y) = \alpha(k_x^2 + k_y^2)^{3/2} - mE_{0z}^2(k_x^2 + k_y^2) + g(\rho_1 - \rho_2)(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} + sk_x^2,$$

$$s = m\varepsilon E_{0x}^2 - \frac{\rho_1\rho_2 v_0^2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Из (16), (21) следует, что при заданных значениях определяющих параметров задачи моды с волновыми векторами $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, для которых $g(k_x, k_y) > 0$, устойчивы. Если $f(k_x, k_y) < 0$, то двузначная комплексная функция $\omega(k_x, k_y)$ имеет ветвь, на которой $\operatorname{Im}\omega(k_x, k_y) > 0$. Ввиду этого моды, соответствующие таким k_x, k_y, экспоненциально растут по времени. В случае $f(k_x, k_y) = 0$ мода нейтрально устойчива.

Таким образом, при заданных v_0, E_{0x}, E_{0z} течение сред с конкретными физическими свойствами устойчиво, если $f(k_x, k_y) > 0$ при $-\infty < k_x < +\infty$, $-\infty < k_y < +\infty$, $k_x^2 + k_y^2 \neq 0$.

С целью упрощения исследования функции $f(k_x, k_y)$ перейдем в плоскости переменных k_x, k_y к полярной системе координат k, ϑ:

$$k_x = k\cos\vartheta, \quad k_y = k\sin\vartheta, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi,$$

В результате получаем

$$f(k_x, k_y) = kq(k, \vartheta),$$

$$q(k, \vartheta) = \alpha k^2 + (s\cos^2\vartheta - mE_{0z}^2)k + g(\rho_1 - \rho_2).$$

Поскольку функция $q(k, \vartheta)$ является периодической по ϑ с периодом π, для устойчивости течения требуется $q(k, \vartheta) > 0$ при $0 < k < \infty$, $0 \le \vartheta \le \pi$.

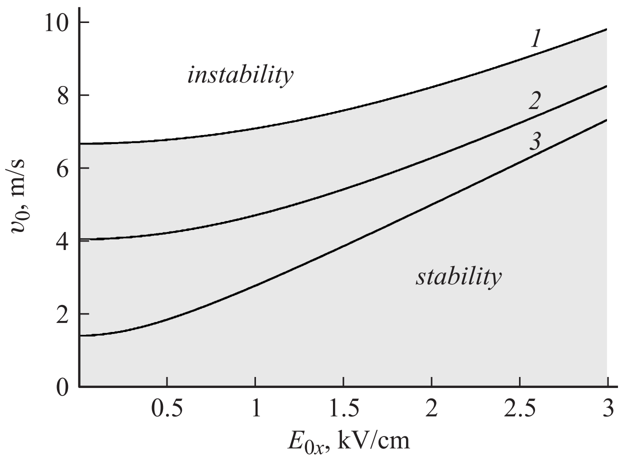

Рис. 2. Кривые нейтральной устойчивости. Линии *1–3* соответствуют значениям $E_{0z} = 0$, 19.5, 24 kV/cm.

При особом режиме течения, когда $s = 0$, поверхность, представляемая уравнением $f = f(k_x, k_y)$, является поверхностью вращения. В этом случае предыдущее неравенство принимает вид

$$q\big|_{s=0} = \alpha k^2 - mE_{0z}^2 k + g(\rho_1 - \rho_2) > 0.$$

Для выполнения этого условия требуется, чтобы дискриминант квадратного трехчлена $q|_{s=0}$ был отрицателен.

Таким образом, течение устойчиво, если

$$m^2E_{0z}^4 < 4\alpha g(\rho_1 - \rho_2). \quad (22)$$

В предельном случае, при $\varepsilon \to \infty$, $\rho_2/\rho_1 \to 0$ следует $E_{0z}^4 < 64\pi^2\alpha\rho_1 g$. Это выражение совпадает с условием устойчивости граничащей с покоящимся газом горизонтальной поверхности неподвижного жидкого проводника, на которой находятся электрические заряды, создающие вертикальное электрическое поле $E_{0z} = 4\pi\sigma_0$, где σ_0 — поверхностная плотность зарядов. Впервые явление неустойчивости для жидких проводников было исследовано Тонксом и Френкелем [9], [13], [14].

Таким образом, при особом режиме течения газа и жидкого диэлектрика, имеющего бóльшую ($\varepsilon \gg 1$) диэлектрическую проницаемость, условие устойчивости (22) отличается лишь безразмерными величинами порядков ε^{-1}, $\rho_2/\rho_1 \ll 1$ от условия устойчивости заряженной плоской поверхности покоящегося жидкого проводника в поле тяжести.

Рассмотрим случай $s < 0$. Обозначим $\tau = \cos^2\vartheta$, тогда

$$q(k, \vartheta) = r(k, \tau) = \alpha k^2 + (s\tau - mE_{0z}^2)k + g(\rho_1 - \rho_2),$$

$$0 \le \tau \le 1.$$

Выпишем дискриминант $D(k, \tau)$ квадратного трехчлена $r(k, \tau)$, зависящего от параметра τ:

$$D(k, \tau) = (s\tau - mE_{0z}^2)^2 - 4\alpha g(\rho_1 - \rho_2).$$

При $s < 0$ имеем $dD/d\tau > 0$, т.е. на отрезке $0 \le \tau \le 1$ при любом $k > 0$ функция $D(k, \tau)$ возрастает с ростом τ. Ввиду этого условие устойчивости течения записывается следующим образом:

$$\left[\frac{\rho_1\rho_2 v_0^2}{\rho_1+\rho_2} + m(E_{0z}^2 - \varepsilon E_{0x}^2)\right]^2 - 4\alpha g(\rho_1-\rho_2) < 0. \quad (23)$$

В отсутствие электрического поля это выражение совпадает с условием устойчивости тангенциального разрыва в поле тяжести с учетом поверхностного натяжения [11].

Из (23) следует

$$v_0 < \left\{\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}\left[\sqrt{4\alpha g(\rho_1-\rho_2)} + m(\varepsilon E_{0x}^2 - E_{0z}^2)\right]\right\}^{1/2}.$$

В качестве примера рассмотрим относительное движение воздуха и воды. При температуре 20°C имеем $\rho_1 = 0.9982\,\mathrm{g/cm^3}$, $\rho_2 = 1.205\cdot10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$, $\alpha = 72.8\,\mathrm{dym/cm}$ [15], а для перегнанной в вакууме воды $\varepsilon = 78.3$ [16].

На рис. 2 в плоскости переменных E_{0x}, v_0 при различных значениях E_{0z} показаны кривые нейтральной устойчивости, вдоль которых левая часть неравенства (23) обращается в нуль. Из графиков видно, что неустойчивое при $\mathbf{E}_0 = 0$ течение можно перевести в устойчивый режим путем наложения горизонтального поля достаточно высокой напряженности. Наличие вертикальной компоненты поля сужает диапазон разрыва скорости, в котором капиллярные силы и горизонтальная компонента электрического поля подавляют неустойчивость Кельвина–Гельмгольца.

Применительно к случаю $s < 0$ с использованием выписанных выражений легко находится длина волны $\lambda_m = 2\pi/k_m$, $k_m = \sqrt{\alpha^{-1}g(\rho_1-\rho_2)}$ наиболее неустойчивой моды на границе устойчивости, когда выполнены условия $r(k,1) = 0$, $(mE_{0z} - s)^2 = 4\alpha g(\rho_1-\rho_2)$.

В случае устойчивого течения именно мода с длиной волны λ_m первой теряет устойчивость при фиксированной величине E_{0x} и бесконечно малом увеличении хотя бы одного из определяющих параметров E_{0z}, v_0. Отметим, что пондеромоторные силы не влияют на величину λ_m.

Заключение

В рамках систем уравнений и граничных условий гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости и электростатики исследовано влияние поверхностных пондеромоторных сил на устойчивость стационарного течения газа и диэлектрической жидкости. Рассматриваемые среды движутся горизонтально в одном направлении при наличии заданного на поверхности их раздела разрыва скорости. Использована модель однородного по своим физическим характеристикам жидкого диэлектрика, температура которого постоянна. Свободных электрических зарядов в рассматриваемой системе нет. Предполагается, что в газе вдали от поверхности раздела задано наклонное однородное электростатическое поле.

Выведено квадратное относительно частоты дисперсионное уравнение. Изучено влияние заданных вертикальной и горизонтальной компонент электрического поля и величины разрыва скорости на расположение корней дисперсионного уравнения в плоскости, представляющей в общем случае комплексную частоту. Использование полярной системы координат при записи двумерного волнового вектора существенно упрощает исследование.

В результате проведенного анализа найдены в виде неравенств условия, которым должны удовлетворять величины определяющих параметров задачи, для того чтобы неустойчивое при отсутствии электрического поля течение после наложения горизонтального электрического поля переходило в устойчивый режим. Вертикальная компонента электрического поля всегда оказывает дестабилизирующее действие.

Установлено, что на границе устойчивости длина волны наиболее неустойчивой моды определяется гравитационными и капиллярными силами и не зависит от пондеромоторных сил.

Показано, что при выполнении некоторого равенства, в котором фигурируют квадрат заданного разрыва скорости и квадрат заданной горизонтальной компоненты электрического поля, возможен особый режим течения газа и жидкости с любой диэлектрической проницаемостью ε. В этом случае при $\varepsilon \gg 1$ найденное условие устойчивости, определяющее верхнюю границу величины вертикальной компоненты электрического поля, отличается лишь малыми безразмерными величинами от найденного Тонксом и Френкелем условия устойчивости, граничащей с неподвижным газом поверхности покоящегося заряженного жидкого проводника в поле тяжести при учете поверхностного натяжения [13], [14].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-00056, 17-01-00037).

Список литературы

[1] *Melcher J.R., Taylor G.I.* // Annu. Rev. Fluid Mech. 1969. Vol. 1. P. 111–146.
[2] *Saville D.A.* // Annu. Rev. Fluid Mech. 1997. Vol. 29. P. 27–64.
[3] *El–Sayed M.F.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. N 6. P. 7588–7591.
[4] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 45–50.
[5] *Tilley B.S., Petropoulos P.G., Papageorgiou D.T.* // Phys. Fluid. 2001. Vol. 13. N 12. P. 3547–3563.
[6] *Savettaseranee K., Papageorgiou D.T., Petropoulos P.G., Tilley B.S.* // Phys. Fluid. 2003. Vol. 15. N 3. P. 641–652.
[7] *Коровин В.М.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 10. С. 12–19.
[8] *Сивухин Д.В.* Электричество. М.: Наука, 1983. 688 с.
[9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1992. 664 с.

[10] *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 287 с.
[11] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
[12] *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
[13] *Tonks L.* // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562–568.
[14] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. Вып. 4. С. 347–350.
[15] *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
[16] *Таблицы* физических величин. Под ред. Кикоина И.К. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.