

05

## Гистерезис в поведении трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды в магнитном поле при малых значениях параметра пиннинга

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: marzelik@mail.ru

(Поступило в Редакцию 15 декабря 2016 г.)

На базе подхода, основанного на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения потенциала Гиббса, рассчитана кривая намагничивания трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды при циклическом изменении внешнего магнитного поля для случая малых значений параметра пиннинга. Показано, что при любых точках поворота петля гистерезиса представляет собой часть некоторой универсальной кривой, обладающей строгой периодичностью по обоим осям. Существование универсальной кривой и ее периодичность объясняются на основе анализа вихревых конфигураций.

DOI: 10.21883/JTF.2017.09.44908.2138

### Введение

Вид кривой намагничивания материала определяется процессами, происходящими при проникновении магнитного поля в образец. Представляет интерес исследование кривой намагничивания высокотемпературных гранулированных сверхпроводников (ВТСП). Их поведение в магнитном поле заметно отличается от поведения обычных сверхпроводников. В массивных сверхпроводниках 2-го рода, помещенных во внешнее магнитное поле  $H_e$ , начиная со значения  $H_e = H_{C1}$  становится энергетически выгодным переход в смешанное состояние, когда магнитное поле частично проникает в толщу сверхпроводника в виде вихревых нитей. В то же время уравнения электродинамики формально допускают вплоть до термодинамического критического поля  $H_C$  равновесные решения мейснеровского типа с проникновением поля в тонкую приповерхностную область. Таким образом, существует возможность задержки проникновения вихрей в сверхпроводник для полей  $H_e > H_{C1}$ . С точки зрения термодинамики это явление представляет собой „перегрев“ мейснеровского состояния. Максимальное поле  $H_{S1}$ , до которого возможен этот „перегрев“, определяется как граница устойчивости метастабильного мейснеровского состояния по отношению к малым флуктуациям [1,2].

Аналогичная картина имеет место и в ВТСП. Однако физика происходящих в них процессов заметно отличается от того, что происходит в обычных сверхпроводниках. Важнейшую роль играет тот факт, что ВТСП состоят из сверхпроводящих гранул, в точках соприкосновения которых друг с другом возникают джозефсоновские контакты. Поэтому иной вид имеют вихри, иной физике соответствуют критические поля. В частности, характерные величины полей столь малы, что речь не может идти о переходе гранул в нормальное

состояние (поэтому поле  $H_{S2}$ , до которого существует мейснеровское решение, отличается от термодинамического поля  $H_C$ ). Вихри располагаются не в отдельных гранулах, а вовлекают в себя большое количество их, при этом токи проходят через джозефсоновские контакты между гранулами. Достаточно вспомнить, что такой контакт является существенно нелинейным элементом, чтобы представить себе сложность возникающей картины. Добавим к этому еще и зацепление (пиннинг) вихрей на пустотах между гранулами. Все эти моменты делают исследование поведения ВТСП во внешнем магнитном поле достаточно сложной задачей, требующей специального подхода.

В работах [3,4] предложена простая модель гранулированного ВТСП, представляющая собой кубическую решетку, состоящую из сверхпроводящих проводов, каждый из которых содержит один джозефсоновский контакт. На базе условий квантования флюксоида в ячейках этой среды получена система уравнений для расчета структуры возможных токовых состояний. Как показали расчеты [3–5], такой модели, которую принято называть трехмерной упорядоченной джозефсоновской средой, присущи все свойства, характерные для сверхпроводников во внешнем магнитном поле: мейснеровские экранирующие токи, взаимодействующие друг с другом вихри, набор характерных магнитных полей и т.п., причем даже количественные соотношения аналогичны имеющим место в обычных и высокотемпературных сверхпроводниках. Поэтому использование этой модели целесообразно при анализе процессов, происходящих в реальных ВТСП.

В работе [5] рассмотрена устойчивость мейснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах. Показано, что величина  $H_{S1}/H_{S2}$  растет с увеличением параметра пиннинга  $I$  и находится в пределах

от 0.84 до 1, что согласуется с результатами, полученными для обычных сверхпроводников 2-го рода.

В сверхпроводниках 2-го рода предел мейсснеровского состояния определяется равенством энергий нормального и сверхпроводящего состояний с учетом энергии экранирующих токов и равен  $H_C$ . Если внешнее поле больше  $H_C$ , то образец переходит в нормальное состояние. В рассматриваемом случае джозефсоновской среды эти соображения неприменимы. Что же будет происходить, когда внешнее поле превысит величину  $H_{S2}$  и мейсснеровское состояние невозможно? В работе [6] предложен подход, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения потенциала Гиббса. Расчет [6] показал, что характер вихревой картины определяется величиной так называемого параметра пиннинга  $I$ , определение которого будет дано далее. При значениях  $I$ , больших некоторого критического  $I_C$  (находящегося в диапазоне 0.7–0.8), вихри с ростом поля постепенно продвигаются от границы внутрь, а магнитное поле в глубине образца остается равным нулю. В [6] проведено исследование этого случая. Если же  $I < I_C$ , то такая приграничная структура может существовать лишь до значения внешнего поля  $H_{\max}(I)$ . При  $H_e > H_{\max}$  магнитное поле проникает внутрь образца на всю его глубину. Этот случай подробно исследован в работе [7]. В частности, детально анализируется полученная при монотонном увеличении внешнего магнитного поля начальная кривая намагничивания. Однако использованный метод дает возможность анализа ситуации не только при увеличении, но и при уменьшении магнитного поля, а также при его циклическом изменении.

Целью настоящей работы является расчет полной кривой намагничивания и исследование гистерезиса при циклическом изменении магнитного поля для случая  $I < I_C$ . Сначала будем увеличивать внешнее магнитное поле  $H_e$ . До значения поля  $H_S$  реализуется мейсснеровское решение. Далее, при  $H_S < H_e < H_{\max}$  возникает приграничная последовательность вихрей, полностью компенсирующая внешнее поле в глубине образца. При  $H_e > H_{\max}$  вихри проникают в образец на всю его глубину. Дойдя до некоторого значения поля  $H_a$ , начнем отслеживать развитие ситуации при его уменьшении. Далее, достигнув значения  $-H_a$ , снова начнем увеличивать поле. Таким способом будет исследован весь цикл. Введем обозначения  $h = H_e/H_0$  и  $b = V/B_0$ , — нормированные напряженность и индукция магнитного поля, где  $H_0 = \Phi_0/\mu_0 S$  и  $B_0 = \Phi_0/S$  — значения внешнего поля, при котором через каждую ячейку площадью  $S$  проходит 1 квант магнитного потока  $\Phi_0$ .

### Мейсснеровская конфигурация

Рассмотрим сначала токовую конфигурацию мейсснеровского типа, т.е. когда вдоль поверхности образца текут параллельные ей токи, замыкающиеся на беско-

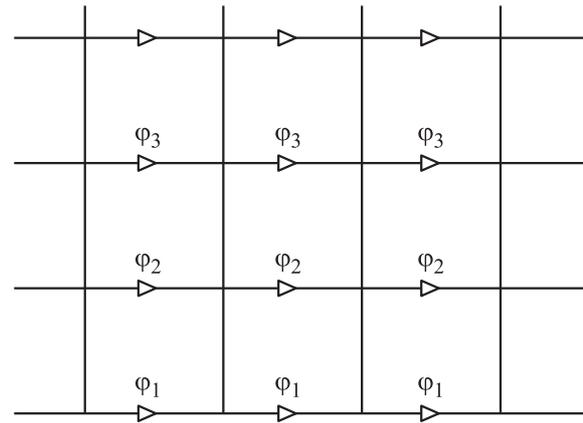


Рис. 1. Конфигурация мейсснеровского типа.

нечности (рис. 1). Сила тока, текущего в граничном слое, равна  $J_1 = J_C \sin \phi_1$ . По мере углубления в образец имеем  $J_m = J_C \sin \phi_m$  для  $m = 2, 3, \dots$ . В глубине образца токи равны нулю, что является одним из граничных условий.

В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида [3], согласно которому сумма скачков фазы по замкнутому контуру с джозефсоновскими контактами должна равняться нормированному магнитному потоку через контур, т.е.

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \sum_k \varphi_k^{(m)} = 0, \tag{1}$$

где  $\sum_k \varphi_k^{(m)}$  — сумма скачков фазы на джозефсоновских контактах  $m$ -й ячейки с учетом знака,  $\Phi_0$  — квант магнитного потока,  $\Phi_m$  — полный магнитный поток через  $m$ -ю ячейку. Обычно в правой части условия квантования флюксоида пишется член  $2\pi N_m$ , где  $N_m$  — целое число, равное величине флюксоида в  $m$ -й ячейке. При этом скачки фазы по модулю не должны превышать величины  $\pi$ . Мы же не будем накладывать на них никаких ограничений. Найдя решение, мы сможем вычислить  $N_m$ , пересчитав фазы, как будет показано далее.

Для рассматриваемой мейсснеровской конфигурации (1) принимает вид

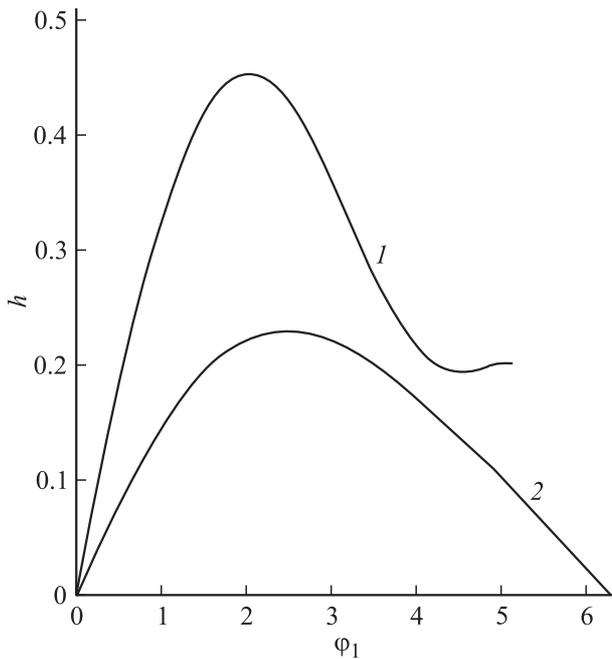
$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \varphi_m - \varphi_{m+1} = 0, \tag{2}$$

а магнитный поток  $\Phi_m$  описывается выражением [3]

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \mu_0(a - 2\delta) \int_{\delta}^{a-\delta} H(r) dr \\ &= \mu_0(a - 2\delta)^2 \left( \sum_{k=1}^m \frac{J_k}{a} + \frac{b}{a} (J_{m-1} - J_m) - H_e \right), \end{aligned} \tag{3}$$

где параметр

$$b = \frac{1}{2\pi(1 - 2\delta/a)} \ln \frac{1 - \exp(-2\pi(1 - \delta/a))}{1 - \exp(-2\pi\delta/a)}.$$



**Рис. 2.** Зависимость нормированной напряженности внешнего магнитного поля от скачка фазы на участке, ближайшем к границе, для  $I = 1.6$  — кривая 1 и  $I = 0.5$  — кривая 2.

Далее мы будем рассматривать такие значения  $I$  и  $b$ , что  $Ib \ll 1$ , где  $I$  — параметр пиннинга, определяемый выражением (4). Тогда после подстановки (3) в (1) появляется возможность пренебречь вторым членом в (3). Отметим, что такое рассмотрение справедливо также для искусственной структуры, созданной из сверхпроводящих нитей, склеенных друг с другом по всей длине, так что джозефсоновскими контактами являются поверхности соединения нитей. Внешнее поле направлено вдоль нитей. Поперечное сечение структуры должно представлять собой квадратную решетку, при этом форма ячейки не обязана быть квадратной, в частности, она может быть образована нитями круглого сечения. Легко показать, что в этой ситуации поле в ячейках однородно и  $b = 0$ .

Подставив (3) в (2) для различных  $m$  и вычтя из уравнения для  $(m - 1)$ -й ячейки уравнение для  $m$ -й, получим следующую систему разностных уравнений:

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2), \quad (4)$$

где  $I = 2\pi\mu_0(a - 2\delta)^2 J_C / a\Phi_0$  — так называемый параметр пиннинга.

В качестве граничных условий к (4) используем стремление к нулю  $\varphi_m$  при стремлении  $m$  к бесконечности, а также условие (1) для  $m = 1$ , имеющее вид

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -I \sin \varphi_1 + 2\pi h, \quad (5)$$

где  $h = H_e / H_0$  — нормированная напряженность внешнего поля,  $H_0 = \Phi_0 / \mu_0 S$  — значение внешнего поля, при

котором через каждую ячейку площадью  $S = (a - 2\delta)^2$  проходит 1 квант магнитного потока  $\Phi_0$ .

Найдем точное решение системы (4). Представим ее в виде рекуррентного закона

$$\varphi_{m+1} = 2\varphi_m - \varphi_{m-1} + I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2). \quad (6)$$

Задаваясь значениями  $\varphi_1$ , будем численно искать соответствующие им возможные значения  $\varphi_2$ , при которых существует решение в виде монотонно убывающей с ростом  $m$  комбинации значений  $\varphi_m$ . Из уравнения (5) найдем соответствующее полученному решению значение нормированной напряженности внешнего магнитного поля  $h$ . На рис. 2 приведены полученные графики зависимости  $h(\varphi_1)$  для некоторых значений  $I$ . Начальный участок кривой до максимума соответствует мейсснеровскому режиму. Максимально возможное значение  $h_{S2}$  соответствует величине магнитного поля  $H_{S2}$ , выше которой мейсснеровское решение отсутствует. Развитие ситуации при дальнейшем увеличении поля будем исследовать на базе анализа потенциала Гиббса системы.

### Методика вычислений

В работе [5] показано, что флуктуации, относительно которых мейсснеровская конфигурация неустойчива, представляют собой быстро затухающие вглубь (на нескольких слоях) периодически повторяющиеся знакопеременные структуры шириной в 1 ячейку. Это дает основания предположить, что в процессе развития неустойчивости распределение скачков фазы будет сохранять такую же геометрию (рис. 3). Равенство модулей и противоположность знаков скачков фазы в соседних вертикальных участках следует из периодичности конфигурации и условия непрерывности токов в узлах.

Будем рассматривать образец конечной длины  $2N + 1$  ячеек. Пусть распределение фаз симметрично относительно центральной плоскости образца, как показано на рис. 3.

Потенциал Гиббса такой конфигурации высотой в 1 м записывается в виде [5]

$$G = E_J + E_H - \int B H dV, \quad (7)$$

где  $E_J$  и  $E_H$  — джозефсоновская и магнитная энергии единицы длины (вдоль  $H_e$ ), равные

$$E_J = \frac{E_C}{a} \sum_k (1 - \cos \psi_k) = I E_0 \sum_k (1 - \cos \psi_k), \quad (8)$$

$$E_H = \sum_i \frac{B^2}{2\mu_0} V_i = E_0 \frac{1}{2} \sum_i \left( \sum_l \psi_{il} \right)^2, \quad (9)$$

где  $E_C = \Phi_0 J_C / 2\pi$  — энергия джозефсоновского контакта,  $B_i = \Phi_i / S$  — магнитная индукция в  $i$ -й ячейке,  $B_i^2 / 2\mu_0$  — плотность магнитной энергии в  $i$ -й ячейке,  $V_i = S$  — объем единицы длины,  $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 S$  —

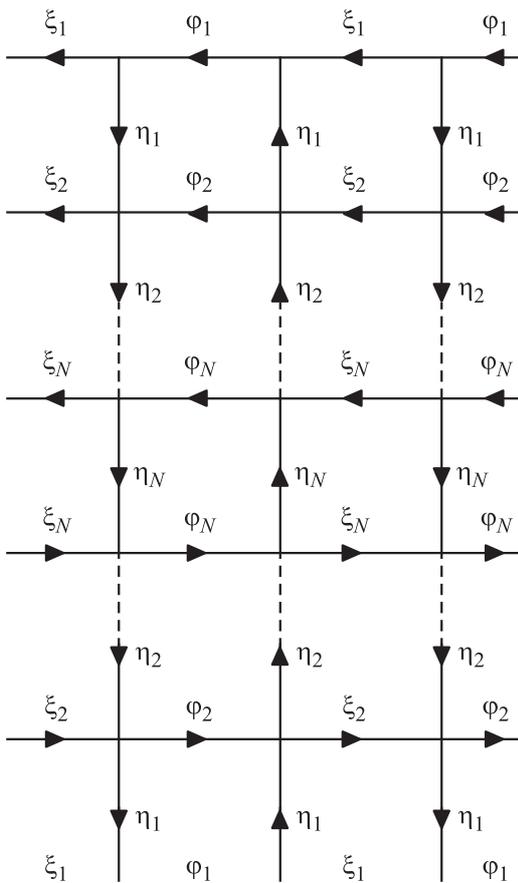


Рис. 3. Распределение скачков фазы в рассматриваемой конфигурации.

нормировочная постоянная. Суммирование по  $k$  в (8) ведется по всем джозефсоновским контактам, по  $i$  в (9) — по всем ячейкам, по  $l$  во внутренней сумме в (9) — по всем четырем контактам  $i$ -й ячейки (с учетом знака). Обозначение  $\psi_m$  введено для любого скачка фазы с индексом  $m$ . При выводе (9) мы воспользовались условием квантования флюксоида (1).

Как известно, в рассматриваемой геометрии термодинамическая напряженность магнитного поля  $H$  во всех точках одна и та же и равна напряженности внешнего поля  $H_e$ , поэтому последний член в (7) можно записать в виде

$$H_e \sum_i \Phi_i = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_i \sum_l \psi_{il} = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_n \psi_{1n}, \quad (10)$$

где  $\psi_{il}$  — скачок фазы в  $l$ -м контакте  $i$ -й ячейки, а сумма по  $n$  берется по всем контактам граничных рядов. При выводе (10) мы учли, что при суммировании по всем ячейкам все значения  $\psi_{il}$  для контактов внутри конфигурации входят в сумму дважды, причем с разными знаками, поэтому остается только суммирование по граничным контактам.

С учетом вышесказанного выражение для потенциала Гиббса принимает вид

$$G = E_0 \left( \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi_k - \varphi_{k+1} + 2\eta_k)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (\xi_k - \xi_{k+1} - 2\eta_k)^2 + 2(\varphi_N + \eta_N)^2 + 2(\xi_N - \eta_N)^2 + 2I \sum_{k=1}^N (4 - \cos \varphi_k - \cos \xi_k - 2 \cos \eta_k) - 2I(1 - \cos \eta_N) - 4\pi h(\varphi_1 + \xi_1) \right). \quad (11)$$

Далее будем измерять  $G$  в единицах  $E_0$ . Будем трактовать величину  $G$  как высоту (или потенциальную энергию) горного рельефа, заданного на многомерном множестве координат  $\varphi_i, \xi_i$ . Установившаяся при каком-либо значении внешнего поля  $h$  мейсснеровская конфигурация (набор координат) соответствует минимуму энергии (впадине) в рельефе. С ростом  $h$  рельеф постепенно изменяется, мейсснеровская конфигурация слегка смещается, но ей продолжает соответствовать локальный минимум. При достижении магнитным полем значения  $h_{S1}$  этот минимум становится седловой точкой. Если теперь система „сделает шаг“ в соответствующем направлении, т.е. получит нужную флуктуацию, то она окажется на склоне рельефа. Дальнейшее изменение формы этой конфигурации можно рассматривать как „скатывание“ по рельефу с уменьшением „потенциальной энергии“, в результате которого система окажется в другом минимуме, в котором конфигурация уже не будет мейсснеровской. Пусть этот процесс происходит как результат большого количества маленьких шагов. Логично предположить, что в каждой „точке“ скатывание происходит вдоль линии наиболее быстрого спуска, т.е. вдоль градиента функции  $G$ . Это значит, что при каждом шаге все „координаты“  $\psi_i$  (т.е.  $\varphi_i, \xi_i$ ) получают приращения, пропорциональные соответствующей проекции градиента:  $\Delta\varphi_i = -\frac{\partial G}{\partial \psi_i} \delta$ , где  $\delta > 0$  — малый постоянный множитель, задающий величину шага. Далее вычисляем все  $\frac{\partial G}{\partial \psi_i}$  в новой точке, т.е. при новых значениях  $\psi_i$ , и производим следующий шаг. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не придем к новой устойчивой конфигурации, находящейся в минимуме рельефа. Этим завершается первый этап расчета.

На втором этапе анализируется развитие ситуации при дальнейшем увеличении магнитного поля. Если  $h$  увеличится на какую-то малую величину, это приведет к некоторому видоизменению рельефа, в результате чего конфигурация, соответствовавшая минимуму прежнего рельефа, теперь окажется на склоне нового и „скатится“ в новый минимум. Последовательно увеличивая  $h$ , можно исследовать распределение скачков фазы  $\varphi_i, \xi_i$ , а значит, токов и магнитных полей, во всем диапазоне изменения внешнего поля.

Перед тем как записать выражения для  $\frac{\partial G}{\partial \psi_i}$ , учтем условия непрерывности токов в узлах. Последовательно записывая эти условия в узлах каждого ряда, начиная от граничного, получим

$$\sin \eta_k = \sum_{i=1}^k (\sin \varphi_i - \sin \xi_i), \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (12)$$

откуда можно выразить значения  $\eta_k$  в виде функций от  $\varphi_i$  и  $\xi_i$ :

$$\eta_k = \arcsin \sum_{i=1}^k (\sin \varphi_i - \sin \xi_i). \quad (13)$$

Отметим, что в рассматриваемой геометрии исчезает граничное условие равенства нулю магнитного поля в глубине образца, которое было важным для бесконечно-го образца [6].

Тогда выражения для „проекции градиента“  $G$  по осям  $\varphi_i$  принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \varphi_i} = & 2 \left( 2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1} + 2(\eta_i - \eta_{i-1}) + I \sin \varphi_i \right. \\ & + 2 \cos \varphi_i \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1} - \xi_k + \xi_{k+1} + 4\eta_k + I \sin \eta_k}{\cos \eta_k} \\ & \left. + \frac{\cos \varphi_i}{\cos \eta_N} (2\varphi_N - 2\xi_N + 4\eta_N + I \sin \eta_N) \right), \quad (2 \leq i \leq N-1), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \varphi_1} = & 2 \left( -2\pi h + \varphi_1 - \varphi_2 + 2\eta_1 + I \sin \varphi_1 \right. \\ & + 2 \cos \varphi_1 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1} - \xi_k + \xi_{k+1} + 4\eta_k + I \sin \eta_k}{\cos \eta_k} \\ & \left. + \frac{\cos \varphi_1}{\cos \eta_N} (2\varphi_N - 2\xi_N + 4\eta_N + I \sin \eta_N) \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \varphi_{N+1}} = & 2 \left( 3\varphi_N - \varphi_{N-1} + 2(\eta_N - \eta_{N-1}) + I \sin \varphi_N \right. \\ & \left. + \frac{\cos \varphi_N}{\cos \eta_N} (2\varphi_N - 2\xi_N + 4\eta_N + I \sin \eta_N) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Производные по  $\xi_i$  можно получить из выражений (14)–(16), меняя местами все  $\varphi_i$  и  $\xi_i$  и поменяв везде знак у  $\eta_i$  на обратный.

На рис. 4 приведены полученные в [5] графики зависимостей от  $I$  величины  $h_{S1}/h_{S2}$ , а также  $\varphi_{1\min}$ , соответствующей значению  $h_{S1}$ . В качестве начальной точки алгоритма возьмем мейсснеровскую конфигурацию при внешнем поле, немного превышающем  $h_{S1}$ . Для этого рассчитаем мейсснеровскую конфигурацию по алгоритму (6) для начального значения, чуть большего  $\varphi_{1\min}$  для выбранного  $I$ . Далее дадим величинам  $\varphi_k$  и  $\xi_k$  для малых  $k$  небольшие приращения, соответствующие неустойчивой флуктуации [5] при внешнем

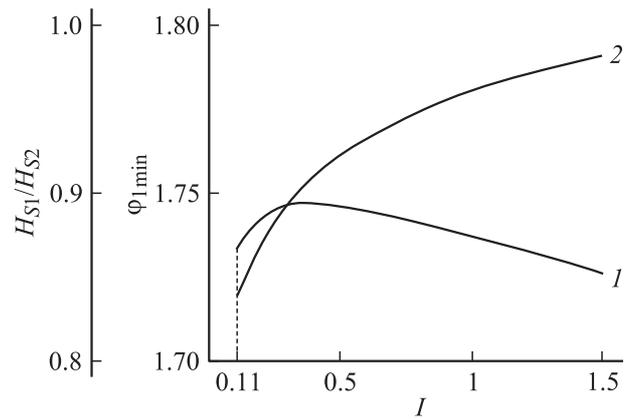


Рис. 4. Зависимости величин  $\varphi_{1\min}$  (кривая 1) и  $H_{S1}/H_{S2}$  (кривая 2) от параметра  $I$ .

поле, равном  $h_{S1}$ . Например, в табл. 2 в [5] приведены рассчитанные для  $I = 1$  и  $I = 0.1$  величины таких приращений, нормированные на „амплитуду“ флуктуации. Для использованного в настоящей работе значения  $I = 0.7$  расчет дает 0.3101, 0.0609, 0.0098, 0.0015. Умножим эти числа на какую-то малую „амплитуду“, например 0.001, добавим полученные значения к соответствующим  $\varphi_k$  и  $\xi_k$  и предоставим возможность „точке“ двигаться по „линии наискорейшего спуска“, как это объяснялось выше. В смысле программирования это означает задать цикл, в каждом шаге которого новые значения  $\varphi_m$  и  $\xi_m$  при  $1 \leq m \leq N$  вычисляются по формуле  $\psi_m = \psi_m - \frac{\partial G}{\partial \psi_m} \delta$  с учетом (14)–(16). В конце концов придем к конфигурации, в которой все производные  $\partial G/\partial \psi_i$  обратятся в ноль, т.е. будут выполнены условия (1). Это и есть искомая равновесная конфигурация, отличающаяся от исходной мейсснеровской. Она является итогом первого этапа расчета. Начиная от нее, как говорилось выше, можно дать приращение  $\Delta h$  магнитному полю, проследить переход системы в новое равновесное состояние и т.д. Это приращение может быть и отрицательным, что означает движение в сторону уменьшения внешнего магнитного поля. Дойдя при положительных  $\Delta h$  до некоторого значения поля  $h_a$ , сменим знак  $\Delta h$  и начнем отслеживать развитие ситуации при уменьшении поля. Далее, достигнув значения  $-h_a$ , снова начнем увеличивать поле. Таким способом будет исследован весь цикл.

Выполнение условий (1) будем проверять, вычисляя магнитное поле  $h_m = \Phi_m/\Phi_0$  внутри  $m$ -й ячейки по формуле

$$2\pi h_m = -2\pi h + I \sum_{i=1}^m \sin \psi_i. \quad (17)$$

Такая проверка показывает, что условия (1) с высокой точностью выполняются в конце как первого этапа, так и каждого цикла расчетов (при новом значении  $h$ ) на втором этапе.

### Результаты расчетов, их интерпретация и анализ

Критическое значение параметра пиннинга  $I_C$ , вычисленное в работе [6], находится в диапазоне 0.7–0.8. Для исследования было выбрано значение  $I = 0.7 < I_C$ , при котором  $h_{S1} = 0.260$ ,  $h_{S2} = 0.277$ ,  $h_{max} = 0.318$ . Длина образца составляла  $2N - 1 = 59$  ячеек.

Компьютерные расчеты полностью подтвердили возможность использования предложенного алгоритма для расчета проникновения поля в среду. Действительно, постепенным увеличением значения  $h$  от  $h_{S1} = 0.260$  удается проследить постепенное изменение конфигурации токов, причем при каждом  $h$  найденные конфигурации удовлетворяют условиям (1). Получающиеся решения имеют период вдоль границы, равный двум ячейкам (рис. 3). Будем далее называть конфигурацию шириной в две ячейки, периодическое повторение которой дает искомые токовые распределения основой. Основа состоит из двух столбцов. При исследовании конфигурации основы оказывается удобной интерпретация ее как последовательности вихрей, проникших в образец. При этом анализ распределения скачков фазы [6] показывает, что центры вихрей находятся в тех ячейках, в которых  $\psi_m$  (т.е.  $\varphi_m$  или  $\xi_m$ ) впервые (если двигаться из глубины) превосходят значения  $2\pi K + \pi$  ( $K$  — целое число). Отсюда следует, что для трактовки картины как последовательности вихрей нужно каждый раз, как только  $\psi_m$  превосходит  $\pi$ , вычитать из него целое число раз по  $2\pi$  так, чтобы все  $|\psi_m| < \pi$ . При этом количество вычтенных  $2\pi$  минус аналогичная величина на предыдущем разе даст значение флюксоида в соответствующей ячейке.

Характер вихревых последовательностей при увеличении магнитного поля для случая  $I < I_C$  подробно исследовался в [7]. Настоящее исследование позволяет найти вид этих последовательностей при циклическом изменении внешнего поля.

Нормированную на  $B_0 = \mu_0 H_0$  магнитную индукцию  $b$ , определяемую как среднее значение магнитного поля в образце, найдем как сумму значений поля  $h_m = \Phi_m / \Phi_0$  по всем ячейкам обоих столбцов основы, деленную на число этих ячеек, равное  $2(2N - 1)$ . Аналогично (10) получим

$$b = B/B_0 = (\varphi_1 + \xi_1)/2\pi(2N - 1). \quad (18)$$

Расчеты позволяют получить кривую намагничивания (рис. 5), т.е. зависимость средней индукции  $b$  от внешнего поля  $h$ . Основная кривая намагничивания, т.е. участок от  $A$  до  $B$ , получена в [7]. Интерес представляет обратный ход зависимости, начиная от точки  $I$ . На рис. 6 изображены основы, полученные на базе предложенного алгоритма при  $I = 0.7$  для различных значений  $h$ , приведенных в нижней строке. Нижний ряд на рис. 6 соответствует границе образца, а верхний — его середине. Ячейки с флюксоидом, равным 1, обозначены

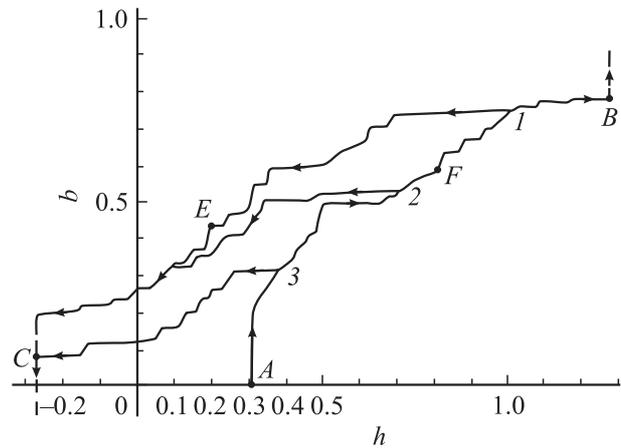


Рис. 5. Кривая намагничивания.

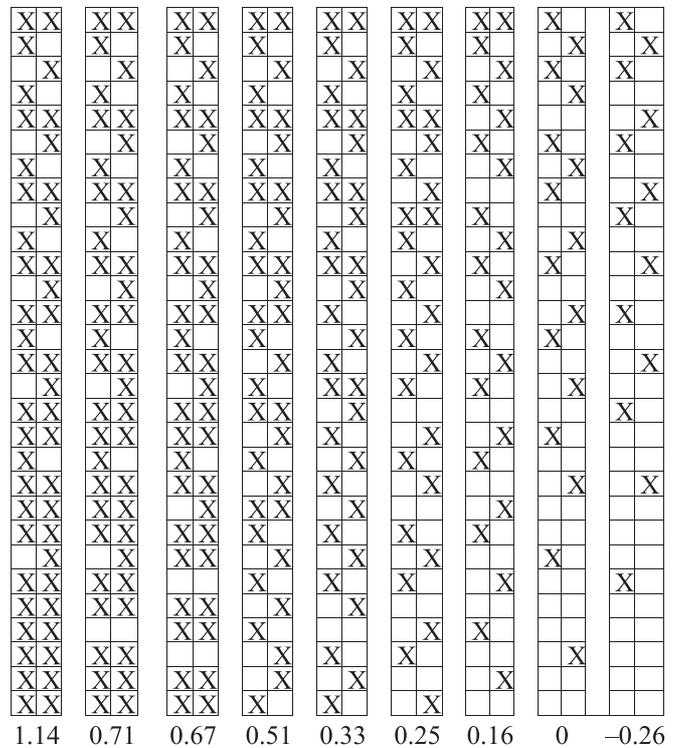


Рис. 6. Вихревые конфигурации основы для точки поворота  $I$  при различных значениях внешнего поля  $h$  (они указаны внизу).

крестами. При  $h < -0.26$  (как и при  $h > 1.273$  в [7]) используемый алгоритм перестает работать, поскольку сумма в (12) становится по модулю больше единицы. Из рис. 6 можно видеть, что по мере уменьшения внешнего поля некоторые вихри, по одиночке или парами, покидают основу. Причиной этого является взаимное отталкивание одинаково ориентированных вихрей. Внешнее поле, подобно внешней силе, сжимающей пружину, заставляло вихри войти в образец и удерживало их там. При уменьшении поля его влияние ослабевает, и отталкивание заставляет часть вихрей покинуть образец.

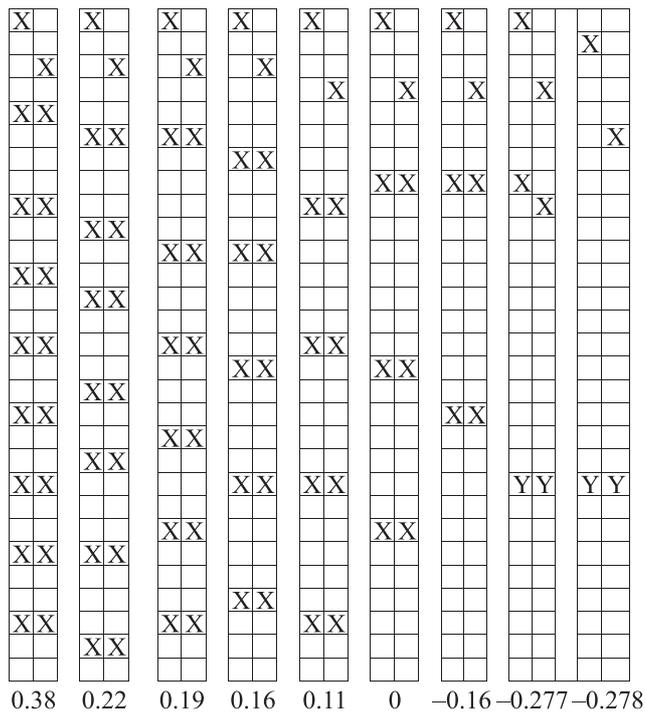


Рис. 7. Вихревые конфигурации основы для точки поворота  $\beta$  при различных значениях внешнего поля  $h$ .

Кроме того, вихри удерживаются внутри еще и за счет пиннинга. При отрицательном внешнем поле внутрь образца могут входить вихри противоположной ориентации. Это можно увидеть на рис. 7, где изображены основы, соответствующие кривой  $\beta$ -С на графике рис. 5. Буквой  $Y$  обозначены вихри с флюксоидом, равным  $-1$ . При  $h = -0.277$  такие вихри начинают проникать в образец. Поскольку вихри противоположных ориентаций притягиваются друг к другу, а при достаточно малом расстоянии между ними пиннинг не может их удержать, то они сливаются, что соответствует взаимному уничтожению („аннигиляции“). Поэтому существование вихрей обеих ориентаций возможно только при значительном расстоянии между ними. При  $h = -0.278$  отрицательные вихри уничтожают следующую пару положительных и т.д. К сожалению, при  $h < -0.278$  из-за невозможности выполнения (12) алгоритм также перестает работать, что не позволяет отследить дальнейшее проникновение отрицательных вихрей в образец. Однако, как и в [7], можно воспользоваться аналогией с проникновением магнитного поля в длинный джозефсоновский контакт [8]. В работе [9] рассчитана петля гистерезиса для намагниченности такого контакта при циклическом изменении внешнего магнитного поля для случая  $I < I_C$ . Можно ожидать, что и в рассматриваемом случае существует некоторая универсальная кривая, обладающая следующими свойствами.

1. При любых точках разворота петля, за исключением коротких участков на ее концах, лежит на универсальной кривой.

2. Вся кривая обладает строгой периодичностью с периодом 1 по обеим осям.

3. Участки обратного хода петли представляют собой перевернутые и направленные в противоположную сторону участки прямого хода. Иными словами, верхняя часть петли симметрична нижней относительно начала координат.

Основной причиной этих особенностей кривой намагничивания является тот факт, что на всех участках резкого роста или спада кривой вихри скачком проникают в образец на бесконечную глубину, т.е. происходит полная перестройка вихревой последовательности, в результате чего токовая конфигурация приобретает один и тот же стандартный вид и далее с изменением поля трансформируется одинаково до следующего круглого участка.

Дополнительным аргументом в пользу этих предположений является тот факт, что обратная кривая повторяет основную кривую намагничивания, начиная с некоторой точки. Поясним это утверждение. Любое распределение вихрей можно рассматривать двумя способами: либо положительные вихри на фоне нулевого уровня (когда в каждой ячейке нулевой флюксоид), либо отрицательные на единичном фоне (когда в каждой ячейке флюксоид равен 1). Например, крайняя левая основа на рис. 6 может трактоваться как почти полное заполнение вихрями с единичным флюксоидом (ячейки с крестиками) или же как существование вихрей с флюксоидом  $-1$  (пустые ячейки) на фоне заполненного состояния. Расчет показывает, что при  $h = 0.2$  (точка  $E$ ) распределение вихрей с  $+1$  на обратной кривой в точности совпадает с распределением вихрей с  $-1$  при  $h = 0.8$  (точка  $F$ ) на основной. Это значит, что  $1 - b(F) = b(E)$ . Совпадают не только последовательности вихрей, но и сами значения скачков фазы во всех контактах (точнее говоря, скачки фазы  $\varphi_k$  в одном случае равны  $2\pi - \varphi_k$  в другом).

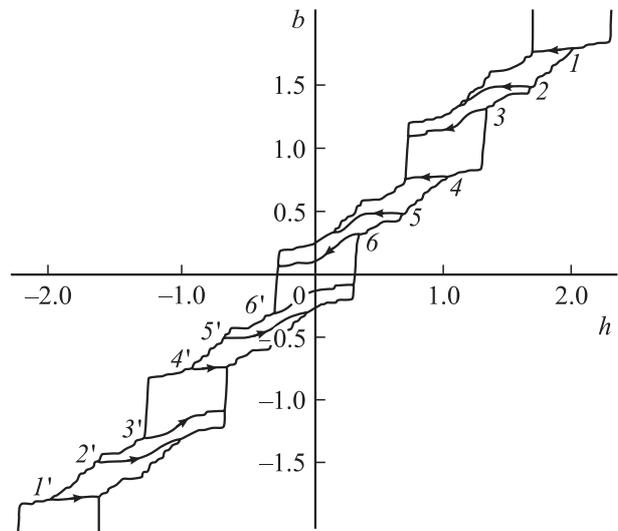


Рис. 8. Универсальная кривая зависимости средней индукции  $b$  от внешнего поля  $h$ . Цифрами обозначены точки разворота.

Ясно, что дальнейший ход обратной кривой влево от точки  $E$  аналогичен ходу прямой зависимости вправо от точки  $F$ .

По аналогии с длинным периодически модулированным джозефсоновским контактом [9] была построена универсальная кривая (рис. 8). Все петли гистерезиса, за исключением небольших участков на концах, представляют собой участки этой кривой. Вид петли определяется точкой поворота  $h_a$ :  $1-1'$ ,  $2-2'$  и т.д. При уменьшении внешнего поля некоторое количество вихрей покидает контакт, после чего график выходит на стандартную кривую.

С уменьшением  $I$  качественный ход кривых рис. 8 сохраняется, но уменьшаются высота и ширина „прямоугольников“, а также толщина соединяющих их участков. Например, при  $I = 0.1$  „прямоугольники“ имеют ширину и высоту примерно 0.1, а толщина соединяющих участков не превышает 0.02. Гистерезис продолжает проявляться при сколь угодно малых значениях параметра пиннинга. Казалось бы, при малых значениях параметра пиннинга решение системы разностных уравнений должно быть аналогично решению дифференциального уравнения, соответствующего отсутствию пиннинга. Однако дифференциальное уравнение не дает ни периодичности по магнитному полю, ни гистерезиса при циклическом изменении поля, что соответствует сверхпроводникам II рода. Дело в том, что периодичность решения системы разностных уравнений является следствием дискретности среды и поэтому не может проявиться в дифференциальном уравнении. Причина различий заключается в том, что при отсутствии пиннинга предполагается, что вся последовательность вихрей устанавливается сразу же, как только это становится энергетически выгодным, т.е. при  $H_{C1}$ . В настоящей же работе мы имеем дело с „перегревом“ этого состояния до момента возникновения неустойчивости, т.е. до  $H_S$ . И даже после этого мгновенный переход к энергетически выгодному состоянию, которому соответствует равномерное распределение вихрей по всей глубине образца, невозможен из-за пиннинга, который хоть и мал, но существует.

## Заключение

На базе подхода, основанного на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения потенциала Гиббса, рассчитана кривая намагничивания трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды при циклическом изменении внешнего магнитного поля для малых значений параметра пиннинга. При любых точках поворота петля гистерезиса представляет собой часть некоторой универсальной кривой, обладающей строгой периодичностью по обеим осям. Существование универсальной кривой и ее периодичность объясняются на основе анализа вихревых конфигураций.

## Список литературы

- [1] Галайко В.П. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 717.
- [2] Kramer L. // Phys. Rev. 1968. Vol. 170. P. 475.
- [3] Zelikman M.A. // Supercond. Sci. Tech. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469–474.
- [4] Zelikman M.A. // Supercond. Sci. Tech. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795–800.
- [5] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 8. С. 14–21.
- [6] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 47–57.
- [7] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 3. С. 21–30.
- [8] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 12. С. 19–25.
- [9] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 9. С. 39–44.