11,05

Фазовая диаграмма $O(n)$-модели с дефектами типа „случайное локальное поле“ и справедливость теоремы Имри и Ма

© А.А. Берзин[1], А.И. Морозов[2,¶], А.С. Сигов[1]

[1] Московский технологический университет (МИРЭА),
Москва, Россия
[2] Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия
[¶] E-mail: mor-alexandr@yandex.ru

(Посупила в Редакцию 10 апреля 2017 г.)

Показано, что теорема Имри и Ма, утверждающая, что в пространстве размерности $d < 4$ введение сколь угодно малой концентрации дефектов типа „случайное локальное поле“ в систему с непрерывной симметрией n-компонентного векторного параметра порядка ($O(n)$-модель) приводит к исчезновению дальнего порядка и появлению неоднородного состояния, несправедлива, если анизотропное распределение направлений случайных локальных полей дефектов в пространстве параметра порядка создает эффективную анизотропию типа „легкая ось“. В случае слабо анизотропного распределения полей в пространстве размерности $2 \leq d < 4$ существует критическая концентрация дефектов, при превышении которой неоднородное состояние Имри–Ма может существовать как равновесное. При меньшей концентрации дефектов в системе имеет место дальний порядок. В случае сильно анизотропного распределения полей состояние Имри–Ма полностью подавляется, и состояние с дальним порядком реализуется при любой концентрации дефектов.

Работа поддержана грантом Президента РФ НШ-8003.2016.

DOI: 10.21883/FTT.2017.10.44970.119

1. Введение

После выхода в 1975 г. классической работы Имри и Ма [1] в физике неупорядоченных систем прочно установилась точка зрения, что в пространстве размерности $d < 4$ введение сколь угодно малой концентрации дефектов типа „случайное локальное поле“ в систему с непрерывной симметрией n-компонентного векторного параметра порядка приводит к исчезновению дальнего порядка и появлению неоднородного состояния, которое в дальнейшем будем называть состоянием Имри–Ма, а само утверждение — теоремой Имри и Ма.

Доказательство этой теоремы основано на простых энергетических соображениях. Пусть в каждой области исследуемой системы с линейным размером L параметр порядка выстроится по суммарному полю, создаваемому дефектами в этой области за счет преобладания одного направления поля вследствие концентрационных флуктуаций. При этом выигрыш в объемной плотности энергии составит величину $w_{\text{int}} \propto L^{-d/2}$.

В разных областях системы направления суммарного поля отличаются. Это вызывает неоднородность параметра порядка на пространственном масштабе L. Проигрыш в объемной плотности обменной энергии за счет возникновения неоднородности параметра порядка составит величину $w_{\text{ex}} \propto L^{-2}$.

Легко видеть, что при $d < 4$ и для больших значений L выигрыш в энергии превосходит проигрыш. Таким образом, в пространстве размерности $d < 4$ неизбежно возникновение неоднородного состояния.

Заметим, что данное рассуждение справедливо только в отсутствие анизотропии системы. Наличие слабой анизотропии типа „легкая ось“ приводит к тому, что разрушение дальнего порядка и возникновение неоднородного состояния Имри–Ма происходит при превышении концентрацией дефектов некоторого критического значения [2].

Казалось бы, данное замечание не относится к исходно изотропной $O(n)$-модели. Однако, как было показано в нашей недавней работе [3], анизотропное распределение направлений случайных локальных полей дефектов в n-мерном пространстве параметра порядка ведет к возникновению в системе индуцируемой дефектами эффективной анизотропии.

Для качественного объяснения механизма возникновения эффективной анизотропии рассмотрим воздействие локального поля l-го дефекта $\mathbf{h}_l$ на однородное распределение параметра порядка. При этом, для простоты, будем пренебрегать продольной восприимчивостью системы в области низких температур, много меньших температуры магнитного упорядочения.

Перпендикулярная направлению параметра порядка $\mathbf{s}_0$ в чистой системе составляющая случайного поля $\mathbf{h}_l^{\perp}$ приводит к его локальному отклонению и появлению ортогональной $\mathbf{s}_0$ компоненты $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$. В результате возникает отрицательная добавка к энергии основного состояния, пропорциональная $(\mathbf{h}_l^{\perp})^2$. Она максимальна по модулю, когда направление $\mathbf{s}_0$ перпендикулярно локальному полю дефекта. Поэтому параметру порядка выгодно сориентироваться перпендикулярно преимущественному направлению случайных полей.

Таким образом, теорема Имри и Ма заведомо справедлива только при идеально изотропном распределении направлений случайных локальных полей, а случай анизотропного распределения полей нуждается в тщательном анализе, которому и посвящена данная работа.

2. Энергия системы классических спинов

Энергия обменного взаимодействия n-компонентных локализованных спинов $\mathbf{s}_i$ фиксированной единичной длины (длина вектора может быть включена в соответствующие константы взаимодействия или поля), образующих d-мерную простую кубическую решетку, в приближении взаимодействия ближайших соседей имеет вид

$$W_{\text{ex}} = -\frac{1}{2} J \sum_{i,\delta} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i+\delta}, \tag{1}$$

где J — обменный интеграл, суммирование по i ведется по всей решетке спинов, а по δ — по ближайшим к данному спину соседям.

Энергия взаимодействия спинов со случайными локальными полями дефектов равна

$$W_{\text{def}} = -\sum_{l} \mathbf{s}_l \mathbf{h}_l, \tag{2}$$

суммирование ведется по случайно расположенным в узлах решетки дефектам, а плотность распределения случайных локальных полей $\mathbf{h}$ в спиновом пространстве (пространстве параметра порядка) обладает свойством $\rho(\mathbf{h}) = \rho(-\mathbf{h})$, что обеспечивает отсутствие в бесконечной системе среднего поля.

Разложим суммарную энергию $W = W_{\text{ex}} + W_{\text{def}}$ в ряд по $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$. Составляющая $s_i^{\parallel}$ параметра порядка, параллельная его среднему значению, равна

$$s_i^{\parallel} = \sqrt{1 - \left(\mathbf{s}_i^{\perp}\right)^2}. \tag{3}$$

Тогда

$$\mathbf{s}_i \mathbf{s}_{i+\delta} = \sqrt{\left(1 - (\mathbf{s}_i^{\perp})^2\right)\left(1 - \left(\mathbf{s}_{i+\delta}^{\perp}\right)^2\right)} + \mathbf{s}_i^{\perp} \mathbf{s}_{i+\delta}^{\perp}. \tag{4}$$

Величину $\mathbf{s}_{i+\delta}^{\perp}$ можно выразить через значение $\mathbf{s}_i^{\perp}$, разлагая в континуальном представлении функцию $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора. Обсудим вопрос о пренебрежении членами этого ряда, содержащими старшие производные. Такое пренебрежение справедливо, если характерный масштаб искажений параметра порядка намного превосходит радиус взаимодействия (в нашем случае — межатомное расстояние). Как показывает анализ, искажения, вызванные случайными полями дефектов, удовлетворяют этому условию в случае двумерной системы ($d = 2$) и не удовлетворяют в случае $2 < d < 4$. В последнем случае старшие производные перенормируют только величину, но не угловую и концентрационную зависимости энергии анизотропии. Поэтому для оценки энергии анизотропии по порядку величины ограничимся слагаемыми, содержащими наименьшую степень производных по координатам.

Первые два члена разложения энергии неоднородного обмена по степеням $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$ с учетом (1) и (4) имеют вид

$$W_{\text{ex}} = \frac{D}{2} \int d^d\mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{s}^{\perp}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{s}^{\perp}}{\partial x_i} + \frac{D}{8} \int d^d\mathbf{r} \left[\nabla \left(\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})\right)^2\right]^2, \tag{5}$$

где $D = Jb^{2-d}$, b — междоузельное расстояние.

Энергия взаимодействия случайного поля $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ с параметром порядка $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ имеет в континуальном представлении вид

$$W_{\text{def}} = -b^{-d} \int d^d\mathbf{r}\, \mathbf{h}(\mathbf{r})\mathbf{s}(\mathbf{r}), \tag{6}$$

где

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = b^d \sum_{l} \mathbf{h}_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l). \tag{7}$$

Энергия взаимодействия случайного поля с продольной составляющей параметра порядка равна нулю в силу соотношения $\rho(\mathbf{h}) = \rho(-\mathbf{h})$. Поэтому W_{def} можно записать в виде

$$W_{\text{def}} = -b^{-d} \int d^d\mathbf{r}\, \mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{r})\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r}), \tag{8}$$

где

$$\mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{r}) = b^d \sum_{l} \left[\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)\right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l). \tag{9}$$

3. Эффективная анизотропия. Квадратичное по $\mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{r})$ приближение

A. Случай $2 < d < 4$

В данном приближении для энергии неоднородного обмена можно ограничиться первым слагаемым в правой части уравнения (5). Функция Грина такой задачи хорошо известна [1].

Фурье-компонента функции $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{k})$ связана с Фурье-компонентой случайного поля $\mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{k})$ соотношением

$$\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{k}) = \chi^{\perp}(\mathbf{k})\mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{k}), \tag{10}$$

где

$$\chi^{\perp}(\mathbf{k}) = \left(Jb^2k^2\right)^{-1}, \tag{11}$$

$$\mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{k}) = \frac{1}{V} \int d^d\mathbf{r}\, \mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\,\mathbf{r})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l} [\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)] \exp(-i\mathbf{k}\,\mathbf{r}_l), \tag{12}$$

V — объем системы, а N — число элементарных ячеек. Тогда

$$\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \chi^{\perp}(\mathbf{k}) \sum_{l} [\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)] \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l)], \tag{13}$$

суммирование по $\mathbf{k}$ ведется по зоне Бриллюэна. Подстановка этого выражения в (8) дает

$$W_{\text{def}} = -\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\chi^{\perp}(\mathbf{k})\sum_{l,m}[\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)] \times [\mathbf{h}_m - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_m)]\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_l)]. \quad (14)$$

В силу случайного распределения дефектов в координатном пространстве и случайного выбора локальных полей дефектов отличное от нуля значение W_{def} обусловлено слагаемыми с $l = m$. Поэтому

$$W_{\text{def}} = -\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}}\chi^{\perp}(\mathbf{k})\sum_{l}[\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)]^2 = -x\sum_{\mathbf{k}}\chi^{\perp}(\mathbf{k})\left\langle[\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)]^2\right\rangle, \quad (15)$$

где x — безразмерная концентрация дефектов (их число на одну ячейку), а скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по полям всех дефектов. Переходя от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию по зоне Бриллюэна и вводя обозначение

$$\tilde{\chi}^{\perp} = \int\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}\chi^{\perp}(\mathbf{k}), \quad (16)$$

получаем для объемной плотности энергии взаимодействия со случайными полями дефектов [3]

$$w_{\text{def}} = -x\tilde{\chi}^{\perp}\left[\left\langle\mathbf{h}_l^2\right\rangle - \left\langle(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)^2\right\rangle\right]. \quad (17)$$

В пространстве размерности $2 < d < 4$ величина $\tilde{\chi}^{\perp}$ не имеет особенностей при $\mathbf{k} = 0$.

В случае анизотропного распределения направлений случайных полей второе слагаемое в квадратных скобках в выражении (17) индуцирует анизотропию в пространстве параметра порядка.

Вклад энергии неоднородного обмена в объемную плотность энергии анизотропии находится аналогично. Он вдвое меньше по модулю, чем w_{def} (17) и имеет противоположный знак. Поэтому результирующая объемная плотность энергии анизотропии имеет вид

$$w_{\text{an}} = \frac{x\tilde{\chi}^{\perp}}{2}\left[s_{01}^2\langle h_{l1}^2\rangle + s_{02}^2\langle h_{l2}^2\rangle + \ldots + s_{0n}^2\langle h_{ln}^2\rangle\right], \quad (18)$$

где h_{lj} и s_{0j} — j-ые компоненты поля $\mathbf{h}_l$ и параметра порядка $\mathbf{s}_0$ соответственно. В качестве константы эффективной анизотропии K_{eff} выбирается значение

$$K_{\text{eff}} = 2b^d(w_{\text{an}}^{\max} - w_{\text{an}}^{\min}), \quad (19)$$

где $w_{\text{an}}^{\max}$ и $w_{\text{an}}^{\min}$ — максимальное и минимальное значение w_{an} как функции направления вектора $\mathbf{s}_0$.

B. Случай $d = 2$

Особенность двумерных моделей состоит в отсутствии дальнего порядка в чистой системе при конечной температуре. Поэтому необходимо сделать предположение о наличии дальнего порядка, индуцированного случайными полями, и решать самосогласованную задачу [4].

Поскольку под действием случайного поля параметр порядка отклоняется от легкого направления к трудному, то $\chi^{\perp}(\mathbf{k})$ имеет вид

$$\chi^{\perp}(\mathbf{k}) = \left(Jb^2k^2 + K_{\text{eff}}\right)^{-1}. \quad (20)$$

Легко видеть, что K_{eff} обрезает расходимость $\tilde{\chi}^{\perp}$ при малых $\mathbf{k}$, которые дают основной вклад в $\tilde{\chi}^{\perp}$ при $d = 2$. В результате

$$\tilde{\chi}^{\perp} = \frac{1}{4\pi b^2 J}\ln\frac{4\pi J}{K_{\text{eff}}}. \quad (21)$$

Величина K_{eff} находится путем решения уравнения самосогласования (19) после подстановки в него значения $\tilde{\chi}^{\perp}$.

C. Примеры распределений направлений случайных полей

В частном случае анизотропного распределения направлений случайных полей, когда все $\mathbf{h}_l$ коллинеарны, параметру порядка энергетически выгодно ориентироваться перпендикулярно этому направлению. Таким образом, в случае $X - Y$ модели ($n = 2$) возникает анизотропия типа „легкая ось“, а в случае модели Гейзенберга ($n = 3$) — анизотропия типа „легкая плоскость“. Объемная плотность энергии анизотропии принимает вид

$$w_{\text{an}} = \frac{1}{2}x\tilde{\chi}^{\perp}\langle\mathbf{h}_l^2\rangle\cos^2\varphi \equiv \frac{1}{2}K_{\text{eff}}b^{-d}\cos^2\varphi, \quad (22)$$

где φ — угол между вектором параметра порядка и осью „тяжелого намагничивания“, которой коллинеарны случайные поля дефектов.

В случае компланарного и изотропного в выделенной плоскости распределения случайных полей в модели Гейзенберга объемная плотность энергии анизотропии равна

$$w_{\text{an}} = -\frac{1}{4}x\tilde{\chi}^{\perp}\langle\mathbf{h}_l^2\rangle\cos^2\varphi \equiv -\frac{1}{2}K_{\text{eff}}b^{-d}\cos^2\varphi, \quad (23)$$

где φ — угол между вектором параметра порядка и нормалью к плоскости, в которой лежат случайные поля, то есть имеет место анизотропия типа „легкая ось“.

Оценка константы эффективной анизотропии K_{eff} по порядку величины дает значение

$$K_{\text{eff}} \approx \tilde{\chi}^{\perp}b^d x\langle\mathbf{h}_l^2\rangle. \quad (24)$$

Для $d = 3$ значение $\tilde{\chi}^{\perp}b^dJ \sim 0.2$, а при $d = 2$ решение уравнения самосогласования для коллинеарного распределения случайных полей в первом приближении дает

$$K_{\text{eff}} = \frac{x\langle\mathbf{h}_l^2\rangle}{4\pi J}\ln\frac{16\pi^2J^2}{x\langle\mathbf{h}_l^2\rangle}. \quad (25)$$

Следует отметить, что именно возникновением в системе эффективной анизотропии типа „легкая ось“ в пространстве с $d = 2$ обусловлено появление в ней дальнего порядка при конечной температуре. Это явление было обнаружено при теоретическом анализе двумерной $X-Y$ модели в работе [5]. Поскольку в чистой системе дальний порядок при конечной температуре отсутствует, а наблюдается фаза Березинского–Костерлица–Таулеса [6,7], это явление получило в дальнейшем название „порядок, индуцированный случайными полями“ („random fields induced order“ — RFIO) [8]. В работе [8] данное явление было обобщено на модель Гейзенберга. В качестве причины RFIO указывалось, что дальний порядок возникает вследствие нарушения непрерывной симметрии параметра порядка, однако микроскопический механизм возникновения дальнего порядка был найден в нашей работе [4].

Появление слабой анизотропии типа „легкая ось“ переводит $X-Y$ модель и модель Гейзенберга в класс моделей Изинга [9], что объясняет появление в системе дальнего порядка при конечной температуре [5].

Индуцированная дефектами анизотропия типа „легкая плоскость“ транслирует модель Гейзенберга в класс $X-Y$ моделей и приводит к возникновению в системе перехода Березинского–Костерлица–Таулеса [9].

В случае более общего эллипсоидального распределения случайных полей в $X-Y$модели: $|\mathbf{h}_l| = \text{const}$,

$$\rho(\mathbf{h}) = A\big[h_x^2 + (1+\varepsilon)h_y^2\big], \tag{26}$$

где постоянная A находится из условия нормировки, а значение $\varepsilon > -1$, величина K_{eff}, рассчитанная по формуле (19), принимает вид

$$K_{\text{eff}} = \frac{|\varepsilon|\tilde{\chi}^{\perp} b^d x \langle \mathbf{h}_l^2\rangle}{2(2+\varepsilon)}. \tag{27}$$

При любом знаке ε дефекты индуцируют анизотропию типа „легкая ось“, ее направление перпендикулярно преимущественному направлению случайных полей.

Для модели Гейзенберга с распределением $|\mathbf{h}_l| = \text{const}$,

$$\rho(\mathbf{h}) = A\left[h_x^2 + h_y^2 + (1+\varepsilon)h_z^2\right] \tag{28}$$

значение K_{eff} равно

$$K_{\text{eff}} = \frac{2|\varepsilon|\tilde{\chi}^{\perp} b^d x \langle \mathbf{h}_l^2\rangle}{5(3+\varepsilon)}. \tag{29}$$

При $-1 < \varepsilon < 0$ в системе возникает легкая ось z, а при $\varepsilon > 0$ — легкая плоскость xy.

4. Эффективная анизотропия четвертого порядка по $\mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{r})$

В случае, когда при анизотропном распределении направлений случайных локальных полей дефектов в n-мерном пространстве векторного параметра порядка, выполняется равенство

$$\langle h_{l1}^2\rangle = \langle h_{l2}^2\rangle = \ldots = \langle h_{ln}^2\rangle, \tag{30}$$

квадратичная по $\mathbf{h}^{\perp}(\mathbf{r})$ эффективная анизотропия в системе не возникает. Примером такого распределения случайных полей дефектов является распределение, при котором поля дефектов с равной вероятностью направлены коллинеарно n взаимно перпендикулярным направлениям в пространстве параметра порядка, которые мы выберем в качестве осей декартовой системы координат.

В этом случае эффективная анизотропия может быть найдена путем подстановки выражения (13) для $\mathbf{s}^{\perp}(\mathbf{r})$ во второе слагаемое в правой части выражения (5). Соответствующая энергия неоднородного обмена $W_{\text{ex}}^{(4)}$ принимает вид

$$\begin{aligned} W_{\text{ex}}^{(4)} = &-\frac{Dd}{2N^4}\int d^d\mathbf{r} \sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4} k_{1x}k_{2x}\chi^{\perp}(\mathbf{k}_1)\chi^{\perp}(\mathbf{k}_2)\chi^{\perp}(\mathbf{k}_3) \\ &\times \chi^{\perp}(\mathbf{k}_4)\sum_{l,m,q,p}\big(\big[\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)\big]\big[\mathbf{h}_q - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_q)\big]\big) \\ &\times \big(\big[\mathbf{h}_m - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_m)\big]\big[\mathbf{h}_p - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_p)\big]\big)\exp\big[i\big(\mathbf{k}_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}_l) \\ &+ \mathbf{k}_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q) + \mathbf{k}_3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m) + \mathbf{k}_4(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p)\big)\big]. \end{aligned} \tag{31}$$

Интегрирование дает $V\delta_{\mathbf{k}_4,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3}$. В итоге

$$\begin{aligned} W_{\text{ex}}^{(4)} = &-\frac{Db^d d}{2N^3}\sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3} k_{1x}k_{2x}\chi^{\perp}(\mathbf{k}_1)\chi^{\perp}(\mathbf{k}_2)\chi^{\perp}(\mathbf{k}_3) \\ &\times \chi^{\perp}(-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\sum_{l,m,q,p}\big(\big[\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)\big] \\ &\times \big[\mathbf{h}_q - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_q)\big]\big)\big(\big[\mathbf{h}_m - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_m)\big]\big[\mathbf{h}_p - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_p)\big]\big) \\ &\times \exp\big[-i\big(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_l + \mathbf{k}_2\mathbf{r}_q + \mathbf{k}_3\mathbf{r}_m - (\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\mathbf{r}_p\big)\big]. \end{aligned} \tag{32}$$

Перейдем теперь к усреднению по случайным полям дефектов. Результат усреднения отличен от нуля, когда $l = m = q = p$ или когда индексы попарно совпадают (например, $l = q$, $m = p$). В последнем случае результат усреднения энергии системы при выполнении условия (30) оказывается независящим от направления среднего параметра порядка.

Поэтому ограничимся слагаемым с четырьмя совпадающими индексами. Для него экспонента в правой части выражения (32) равна единице, а сумма по дефектам принимает вид

$$\begin{aligned} &\sum_l \big([\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)][\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)]\big) \\ &\quad\times \big([\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)][\mathbf{h}_l - \mathbf{s}_0(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)]\big) = \sum_l \big[(\mathbf{h}_l)^2 - (\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)^2\big]^2 \\ &= \sum_l \big[(\mathbf{h}_l)^4 - 2(\mathbf{h}_l)^2(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)^2 + (\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)^4\big]. \end{aligned} \tag{33}$$

Если случайные локальные поля дефектов направлены с одинаковой вероятностью коллинеарно всем координатным осям в пространстве параметра порядка, величины $\langle \mathbf{h}_l^2 h_{lj}^2 \rangle$ одинаковы для всех $j = 1, \ldots, n$, и слагаемое $2(\mathbf{h}_l)^2(\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)^2$ в правой части выражения (33) не создает эффективной анизотропии в пространстве параметра порядка. За возникновение эффективной анизотропии, характерной для кубических кристаллов, ответственно слагаемое

$$\sum_l (\mathbf{s}_0\mathbf{h}_l)^4 = Nx \sum_{j=1}^{n} s_{0j}^4 \langle h_{lj}^4 \rangle, \tag{34}$$

суммирование в правой части (34) происходит по компонентам векторов в пространстве параметра порядка.

В рассматриваемом случае величины $\langle h_{lj}^4 \rangle$ одинаковы для всех j и значение

$$\langle h_{lj}^4 \rangle = \frac{1}{n} \langle \mathbf{h}_l^4 \rangle, \quad \text{а} \quad \sum_{j=1}^{n} s_{0j}^4 \langle h_{lj}^4 \rangle = \frac{1}{n} \langle \mathbf{h}_l^4 \rangle \sum_{j=1}^{n} s_{0j}^4.$$

Максимальное значение суммы $\sum_{j=1}^{n} s_{0j}^4$ равно 1, если вектор $\mathbf{s}_0$ параллелен одной из осей декартовой системы координат в пространстве параметра порядка, а минимальное значение равно $1/n$, когда этот вектор направлен вдоль одной из главных диагоналей данной системы.

В итоге, объемная плотность энергии анизотропии принимает вид

$$w_{\text{an}} = \beta \sum_{j=1}^{n} s_{0j}^4, \tag{35}$$

где константа $\beta > 0$ равна

$$\beta = -\frac{b^{2d-6} d \langle \mathbf{h}_l^4 \rangle}{2nJ^3} \int \frac{k_{1x} k_{2x} d^d\mathbf{k}_1 d^d\mathbf{k}_2 d^d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^{3d}(\mathbf{k}_1)^2(\mathbf{k}_2)^2(\mathbf{k}_3)^2(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)^2}, \tag{36}$$

интегрирование по каждому волновому вектору ведется по зоне Бриллюэна. При размерности координатного пространства $2 < d < 4$ интеграл не имеет особенности при малых $\mathbf{k}$. Вводя безразмерную переменную $\mathbf{y} = b\mathbf{k}/\pi$, получаем

$$\beta = -\frac{d \langle \mathbf{h}_l^4 \rangle}{2^{3d+1}\pi^6 nJ^3 b^d} \int \frac{y_{1x} y_{2x} d^d\mathbf{y}_1 d^d\mathbf{y}_2 d^d\mathbf{y}_3}{(\mathbf{y}_1)^2(\mathbf{y}_2)^2(\mathbf{y}_3)^2(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3)^2}, \tag{37}$$

интегрирование по каждому $\mathbf{y}$ ведется по d-мерному кубу с ребрами, равными 2, и параллельными осям системы координат, центр куба расположен в начале координат. В случае $d = 3$ интеграл в правой части выражения (37) приближенно равен -200.

Поскольку $\beta > 0$, в равновесном состоянии вектор $\mathbf{s}_0$ направлен вдоль одной из главных диагоналей декартовой системы координат в пространстве параметра порядка.

Оценка константы эффективной анизотропии K_{eff} для $d = 3$ по порядку величины дает значение

$$K_{\text{eff}} \sim 10^{-3} \frac{x \langle \mathbf{h}_l^4 \rangle}{J^3}. \tag{38}$$

По сравнению со случаем коллинеарной ориентации случайных полей константа эффективной анизотропии содержит малый параметр $\langle \mathbf{h}_l^2 \rangle / J^2$, что естественно, так как разложение энергии по четным степеням случайного поля происходит именно по этому безразмерному параметру.

Количество компонент параметра порядка ($n = 2$ — модель X-Y или $n = 3$ — модель Гейзенберга) не играет существенной роли, поскольку, в отличие от квадратичной по $\mathbf{h}_l$ анизотропии, анизотропия четвертого и более старших порядков по $\mathbf{h}_l$ индуцирует появление легких осей, а не легких плоскостей.

При размерности координатного пространства $d = 2$ интеграл, стоящий в правой части выражения (36), имеет логарифмическую расходимость при малых $\mathbf{k}$. Поэтому, как и в предшествующем разделе, задачу следует решать самосогласованно, предполагая наличие дальнего порядка, индуцированного эффективной анизотропией, величина которой находится из уравнения самосогласования. Используя выражение (20), находим

$$K_{\text{eff}} \approx \frac{x \langle \mathbf{h}_l^4 \rangle}{J^3} \ln \frac{J}{K_{\text{eff}}}. \tag{39}$$

В результате первой итерации получаем

$$K_{\text{eff}} \approx \frac{x \langle \mathbf{h}_l^4 \rangle}{J^3} \ln \frac{J^4}{x \langle \mathbf{h}_l^4 \rangle}. \tag{40}$$

Аналогично могут быть получены слагаемые, содержащие более высокие степени $\mathbf{h}_l$.

5. Фазовая диаграмма системы

Как видно из вышеизложенного, анизотропное распределение направлений случайных локальных полей дефектов индуцирует как анизотропию типа „легкая ось“, так и анизотропию типа „легкая плоскость“. Подавляет неоднородное состояние Имри–Ма только анизотропия типа „легкая ось“ [2]. Поэтому рассмотрим подробнее ситуацию, возникающую при эффективной анизотропии типа „легкая плоскость“.

Для решения вопроса о том, возникнет ли в системе дальний порядок с вектором $\mathbf{s}_0$, лежащим в легкой плоскости, или неоднородное состояние Имри–Ма, следует спроектировать все случайные поля на указанную гиперплоскость размерности m ($n > m \geq 2$) в пространстве параметра порядка и рассмотреть задачу на этой гиперплоскости. При возникновении в ней анизотропии типа „легкая плоскость“ операцию следует повторить. В результате мы придем к одному из трех возможных случаев:

– проекции случайных полей на легкую плоскость равны нулю. При этом поведение системы аналогично поведению чистой системы с числом компонент параметра порядка, соответствующим размерности гиперплоскости. В любом случае, неоднородное состояние Имри–Ма не возникает, хотя случайные поля индуцируют появление составляющих параметра порядка, перпендикулярных легкой плоскости;

– в самой легкой плоскости имеет место анизотропия типа „легкая ось“. Тогда задача сводится к задаче с такой анизотропией, но с числом компонент параметра порядка, равным m. Она будет рассмотрена ниже;

– распределение проекций случайных локальных полей дефектов на легкую плоскость является идеально изотропным. В этом случае теорема Имри и Ма справедлива.

Для того, чтобы понять, реализуется ли в системе с эффективной анизотропией типа „легкая ось“ неупорядоченное состояние Имри–Ма, необходимо сравнить величину константы эффективной анизотропии с критическим значением, при котором происходит подавление указанного состояния.

Действительно, чтобы следовать за флуктуациями случайного поля, параметру порядка приходится отклоняться от направления, соответствующего минимуму энергии анизотропии. Это приводит к возрастанию энергии анизотропии. Когда такое изменение уже не компенсируется выигрышем энергии за счет следования параметра порядка за флуктуациями случайного поля, неоднородное состояние Имри–Ма становится энергетически невыгодным и в системе восстанавливается дальний порядок.

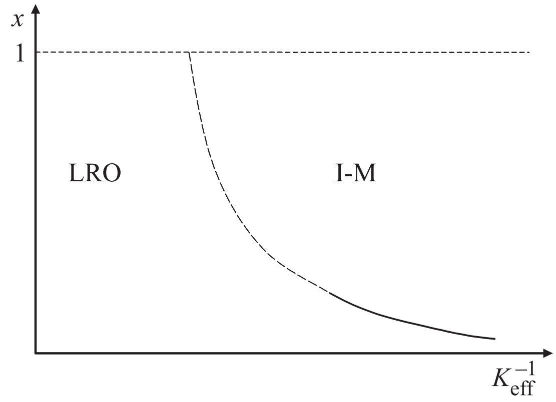
Как показано в работе [2], соответствующее критическое значение равно

$$K_{\mathrm{cr}} \approx J\left[\frac{x\langle \mathbf{h}_l^2\rangle}{J^2}\right]^{\frac{2}{4-d}}. \tag{41}$$

Как видно из разделов 3 и 4, эффективная анизотропия, вызванная полями дефектов, пропорциональна их концентрации x. В то же время в пространстве с размерностью $2 < d < 4$ величина K_{cr} содержит более высокую степень концентрации дефектов. В частности, в случае трехмерного координатного пространства $K_{\mathrm{cr}} \propto x^2$. Из этого следует, что в пределе $x \to 0$ эффективная анизотропия, возникающая в любом порядке по $\mathbf{h}_l$, будет превосходить критическое значение.

В случае $d = 2$ величина $K_{\mathrm{eff}} \propto -x \ln x$, то есть в области малых концентраций также превосходит критическое значение $K_{\mathrm{cr}} \propto x$.

Таким образом, теорема Имри и Ма несправедлива при любой сколь угодно слабой эффективной анизотропии типа „легкая ось“, индуцированной случайными локальными полями дефектов. Сравнивая выражения (24), (25) и (41), можно убедиться, что в случае сильно анизотропных распределений случайных полей, создающих анизотропию типа „легкая ось“, состояние Имри–Ма не реализуется во всем возможном диапазоне концентраций дефектов $x < 1$.



Фазовая диаграмма системы в переменных „концентрация дефектов x — константа эффективной анизотропии типа „легкая ось“ K_{eff}“: LRO — фаза с дальним порядком, I–M — неупорядоченная фаза Имри–Ма.

Для слабо анизотропных распределений случайных полей условие $K_{\mathrm{eff}} < K_{\mathrm{cr}}$ дает ограничение снизу на концентрацию дефектов, при которой наблюдается неупорядоченное состояние Имри–Ма. Например, при $d = 3$ для распределения случайных полей дефектов, задаваемого формулой (26), получаем неравенство

$$x > 0.1\varepsilon\frac{J^2}{\langle \mathbf{h}_l^2\rangle}. \tag{42}$$

При $J^2/\langle \mathbf{h}_l^2\rangle \sim 100$ и $\varepsilon \sim 10^{-3}$ имеем $x > 0.01$.

Характерная фазовая диаграмма системы приведена на рисунке.

6. Заключение

Анизотропное распределение направлений случайных локальных полей дефектов индуцирует эффективную анизотропию типа „легкая ось“ либо „легкая плоскость“ в пространстве параметра порядка.

Теорема Имри и Ма, в которой утверждается, что в пространстве размерности $d < 4$ введение *сколь угодно малой* концентрации дефектов типа „случайное локальное поле“ в систему с непрерывной симметрией n-компонентного векторного параметра порядка ($O(n)$-модель) приводит к исчезновению дальнего порядка и появлению неоднородного состояния, несправедлива при возникновении анизотропии типа „легкая ось“, вызванной дефектами, призванными разрушить дальний порядок.

В случае слабо анизотропного распределения полей существует критическая концентрация дефектов, при превышении которой неоднородное состояние Имри–Ма может существовать как равновесное.

В случае сильно анизотропного распределения полей это состояние полностью подавляется, и состояние с дальним порядком реализуется для всех концентраций дефектов.

Список литературы

[1] Y. Imry, S.-K. Ma. Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
[2] А.И. Морозов, А.С. Сигов. Письма в ЖЭТФ **90**, 818 (2009).
[3] А.Ф. Берзин, А.И. Морозов, А.С. Сигов. ФТТ **58**, 1614 (2016).
[4] А.Ф. Берзин, А.И. Морозов, А.С. Сигов. ФТТ **58**, 1783 (2016).
[5] B.J. Minchau, R.A. Pelcovits. Phys. Rev. B **32**, 3081 (1985).
[6] В.Л. Березинский. ЖЭТФ **59**, 907 (1971); **61**, 1144 (1972).
[7] J.M. Kosterlitz, D.G. Thouless. J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
[8] J. Wehr, A. Niederberger, L. Sanchez-Palencia, M. Lewenstein. Phys. Rev. B **74**, 224448 (2006).
[9] С.Б.Хохлачев. ЖЭТФ **70**, 265 (1976).