09

Ход световых лучей в квазипериодическом волноводе или многопроходном резонаторе с плавно меняющимися свойствами

© В.Ю. Матьев

Российский федеральный ядерный центр–Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607188 Саров, Нижегородская обл., Россия
e-mail: Matev@expd.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 15 февраля 2017 г.)

Построен ход лучей в квазипериодической оптической системе (волноводе или резонаторе), свойства которой плавно меняются по ходу луча. Вычислена лучевая матрица для большого числа проходов луча и показано, что обычное условие устойчивости (модуль следа лучевой матрицы одного прохода меньше двух) не обеспечивает ограниченности лучевой траектории после большого числа проходов.

DOI: 10.21883/JTF.2017.10.45000.2208

Введение

Рассмотрена квазипериодическая оптическая система (волновод или резонатор), оптические свойства которой плавно меняются (например, из-за разогрева). Волновод может содержать как элементы, дискретно изменяющие ход лучей (линзы; резонатор — еще и зеркала), так и ячейки с непрерывным показателем преломления (с неоднородной плотностью) (рис. 1.) В рамках параксиальной оптики участок волновода (проход резонатора) характеризуется лучевой матрицей, равной произведению лучевых матриц отдельных элементов [1,2]. Плавное изменение свойств волновода означает, что соответствующие элементы лучевой матрицы для соседних участков различаются мало. Аналогом такого волновода является многопроходный лазерный резонатор с разогревом среды [3,4]. Другой пример — резонатор с прокачкой среды [5,6] (рис. 2), в котором поперечный профиль плотности развивается вдоль потока газа (по оси x). Луч при движении вдоль оптической оси z отклоняется против потока газа, так что лучевая матрица одного прохода луча плавно меняется.

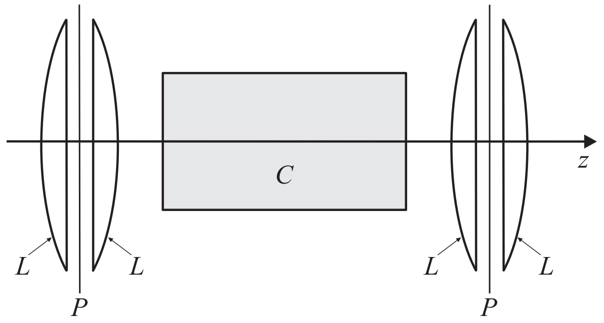

Рис. 1. Схематическое изображение периодического волновода: P — опорные плоскости, разделяющие периоды волновода, L — линзы, C — ячейка с непрерывной средой (газовая или твердотельная), z — оптическая ось.

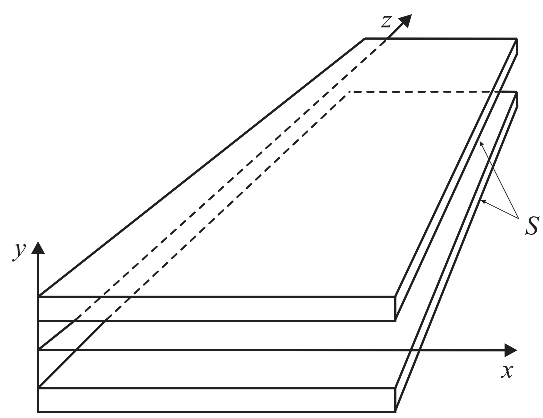

Рис. 2. Схематическое изображение прокачного лазера. S — стенки кюветы, между которыми течет газ (по направлению x), z — оптическая ось.

Итак, ход лучей через участок волновода (через резонатор) задан лучевой матрицей $\mathbf{m}_n$, которая немного различна для соседних участков:

$$\begin{pmatrix} y_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \mathbf{m}_n \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{dy}{dz}, \tag{1}$$

где y_n — поперечное смещение луча после прохождения n участков волновода (n проходов резонатора), φ_n — соответствующий угол наклона лучевой траектории к оптической оси z. Требуется найти лучевую матрицу для N участков (N проходов):

$$\begin{pmatrix} y_N \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{N-1} \mathbf{m}_{N-k} \begin{pmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_N \begin{pmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_N = \prod_{k=0}^{N-1} \mathbf{m}_{N-k}, \tag{2}$$

где y_0 — начальное смещение луча, φ_0 — начальный угол наклона луча.

Плавное изменение оптических свойств по ходу луча означает, что

$$|\Delta A_n/A_n| \ll 1, \quad |\Delta B_n/B_n| \ll 1,$$

$$|\Delta C_n/C_n| \ll 1, \quad |\Delta D_n/D_n| \ll 1. \tag{3}$$

Здесь и далее $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$ для величины X; так, $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$, и т.д.

Матрица $\mathbf{m}_n$ как произведение унимодулярных лучевых матриц отдельных элементов также унимодулярна, $\det \mathbf{m}_n = A_n D_n - B_n C_n = 1$.

Ход лучей через многопроходный резонатор

Матрицу полного прохода луча через резонатор можно симметризовать по главной диагонали, $A = D$. Действительно, зеркало радиуса r оптически эквивалентно системе из плоского зеркала и линзы с фокусным расстоянием $f = r$ [7]; совместим опорные плоскости резонатора с плоскими зеркалами (рис. 1). Если ход лучей в резонаторе развернуть вдоль оптической оси, то получится картина, аналогичная периодическому волноводу. Для произвольной $abcd$-матрицы $\mathbf{w}$ полупрохода резонатора от одной опорной плоскости до другой обратная матрица $\mathbf{w}^{-1}$, матрица обратного полупрохода $\mathbf{w}_R$ и матрица полного прохода $\mathbf{m}$ имеют вид [1]

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_R = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{w}_R \mathbf{w} = \begin{pmatrix} da + bc & db + bd \\ ca + ac & cb + ad \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Элементы матрицы $\mathbf{m}$ можно выразить через тригонометрические (или гиперболические) функции. Поскольку $AD - BC = 1$, $AD = A^2 = 1 + BC$. Если $BC < 0$, то $A^2 < 1$; можно положить $A = D = \cos\Omega$, $BC = -\sin^2\Omega$, задав (по модулю) „фазу" прохода Ω. Полагая $B = \sin\Omega/\omega$, $C = -\omega\sin\Omega$, можно определить „частоту" прохода ω и знак фазы Ω. Если $BC > 0$, то $A^2 > 1$; $A = D = \pm\operatorname{ch}\Omega$, $B = \operatorname{sh}\Omega/\omega$, $C = \omega\operatorname{sh}\Omega$. Итак, если $BC \neq 0$, то

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & (1/\omega)\sin\Omega \\ -\omega\sin\Omega & \cos\Omega \end{pmatrix}, \ BC < 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \pm\operatorname{ch}\Omega & (1/\omega)\operatorname{sh}\Omega \\ \omega\operatorname{sh}\Omega & \pm\operatorname{ch}\Omega \end{pmatrix}, \ BC > 0. \tag{6}$$

Такие матрицы описывают ход лучей через непрерывную среду с параболическим профилем показателя преломления $n^*(y)$ поперек оптической оси z [2,7]; для убывающей параболы, $\omega^2 = -(1/y)(\partial n^*/\partial y) > 0$, лучевое уравнение имеет вид $d^2y/dz^2 + \omega^2 y = 0$ [2,7], а его решение

$$y(z) = y_0\cos(\omega z) + \frac{\varphi_0}{\omega}\sin(\omega z). \tag{7}$$

Следовательно, ход лучей через резонатор с плавным изменением свойств можно трактовать как прохождение луча через непрерывную среду с плавным изменением частоты $\omega = \omega(z)$. Лучевую траекторию в такой среде можно найти с помощью преобразований Лиувилля

$$\Omega(z) = \int_0^z \omega(z')dz',$$

$$y(\Omega) = Y(\Omega)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\Omega \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{d\Omega'}d\Omega'\right)$$

$$= Y(\Omega)\sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(z)}}.$$

Подставляя эти преобразования в лучевое уравнение, легко получить

$$\frac{d^2Y}{d\Omega^2} + W^2(\Omega)Y = 0, \quad W^2(\Omega) = 1 + w(\Omega), \tag{8}$$

$$w(\Omega) = \frac{-1}{\sqrt{\omega(\Omega)}}\frac{d^2}{d\Omega^2}\left(\sqrt{\omega(\Omega)}\right).$$

Если на периоде осцилляции z_1, задаваемом условием $\omega z_1 = \pi$, изменение частоты $\Delta\omega_Z \ll \omega$, то $(d\omega/dz)/(2\omega^2) \cong \Delta\omega_Z/(2\omega^2 z_1) \ll 1$, $W(\Omega) \approx 1$, так что

$$Y(\Omega) = Y_0\cos\Omega + Y_0'\sin\Omega,$$

$$Y'(\Omega) = -Y_0\sin\Omega + Y_0'\cos\Omega, \tag{9}$$

$$Y'(\Omega) = \frac{1}{\omega(z)}\frac{d}{dz}\left(y(z)\sqrt{\frac{\omega(z)}{\omega(0)}}\right) \approx \frac{\varphi(z)}{\sqrt{\omega(z)\omega(0)}},$$

$$Y_0 = y_0, \qquad Y_0' = \frac{\varphi_0}{\omega(0)}.$$

Аналогично ход лучей в резонаторе с плавным изменением частоты и фазы прохода для большого числа проходов можно записать в виде (2)

$$\begin{pmatrix} y_N \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \mathbf{M}_N \begin{pmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_N}}\cos\Phi_N & \frac{1}{\sqrt{\omega_N\omega_1}}\sin\Phi_N \\ -\sqrt{\omega_N\omega_1}\sin\Phi_N & \sqrt{\frac{\omega_N}{\omega_1}}\cos\Phi_N \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\Phi_N = \sum_{k=1}^N \Omega_k,$$

где ω_k и Ω_k — частота и фаза k-прохода, фаза суммируется по проходам.

Действие матрицы (5) на вектор (y_n, φ_n) эквивалентно повороту вектора $(y_n, \varphi_n/\omega$[6) на угол Ω без изменения длины. Действительно,

$$y_n = \cos\Omega y_{n-1} + \sin\Omega\frac{\varphi_{n-1}}{\omega},$$

$$\frac{\varphi_n}{\omega} = -\sin\Omega y_{n-1} + \cos\Omega\frac{\varphi_{n-1}}{\omega}.$$

Действие же матрицы (10) эквивалентно повороту вектора (Y, Y') на угол Φ_N, при этом инвариантна величина

$$\left(\sqrt{\omega(z)}y(z)\right)^2 + \left(\varphi(z)/\sqrt{\omega(z)}\right)^2 = \text{const}. \qquad (11)$$

Для возрастающей параболы показателя преломления $n^*(y)$, когда $\omega^2 = (1/y)(\partial n^*/\partial y) > 0$, матрица $\mathbf{M}_N$ аналогична (10); нужно лишь заменить $\cos\Phi_n \to \operatorname{ch}\Phi_n$, $\sin\Phi_n \to \operatorname{sh}\Phi_n$ и поменять знак в матричном элементе $(\mathbf{M}_N)_{21}$, ср. (5), (6); инвариант такой матрицы аналогичен (11), только будет разность квадратов вместо суммы. Матрица вида (10) и аналогичная ей гиперболическая матрица имеют групповой характер: произведение двух соседних матриц имеет тот же вид, что и исходная матрица:

$$\mathbf{M}(\omega_{n+1}, \omega_n, \Phi_n)\mathbf{M}(\omega_n, \omega_{n-1}, \Phi_{n-1}) = \mathbf{M}(\omega_{n+1}, \omega_{n-1}, \Phi_n + \Phi_{n-1}),$$

это и позволяет легко перемножать матрицы для большого числа проходов.

Решение (10) получено эвристическим путем; оно наводит на мысль, что один проход через резонатор следует описывать матрицей вида (10), а не (5) и характеризовать тремя параметрами: фазой Ω и двумя частотами (входной частотой, характеризующей резонатор перед прохождением луча, и выходной, характеризующей резонатор после прохождением луча). Действительно, частота прохода ω плавно меняется, и выходная частота прохода равна входной частоте следующего прохода. В исходной постановке задачи частота прохода менялась скачком; это менее физично, а матрицы (5) не обладают групповым характером, если частоты проходов различны. Можно, однако, полагать, что частота прохода — это выходящая частота, матрица (10) применима для нескольких проходов, а один проход луча описывается матрицей (5); это несоответствие при малых скачках частоты несущественно. Далее более строго рассмотрен общий случай.

Разностные уравнения хода луча и их решение

В общем случае квазипериодического волновода, когда $A_n \neq D_n$, матрица одного прохода не может быть записана в виде (5) или (6). Используем метод конечных разностей [7]. Для двух соседних участков, согласно (1),

$$\begin{cases} y_{n+1} = A_{n+1}y_n + B_{n+1}\varphi_n, \\ \varphi_{n+1} = C_{n+1}y_n + D_{n+1}\varphi_n, \end{cases} \quad \begin{cases} y_n = A_n y_{n-1} + B_n\varphi_{n-1}, \\ \varphi_n = C_n y_{n-1} + D_n\varphi_{n-1}. \end{cases} \qquad (12)$$

Отсюда с учетом унимодулярности лучевой матрицы $\mathbf{m}_n$

$$y_{n+1} - \sigma_{n+1}y_n + \gamma_{n+1}y_{n-1} = 0, \qquad (13)$$

$$\sigma_{n+1} = A_{n+1} + D_n(B_{n+1}/B_n),\ \ \gamma_{n+1} = B_{n+1}/B_n,\ \ B_n \neq 0; \qquad (14)$$

$$\varphi_{n+1} - \xi_{n+1}\varphi_n + \eta_{n+1}\varphi_{n-1} = 0, \qquad (15)$$

$$\xi_{n+1} = D_{n+1} + A_n(C_{n+1}/C_n),$$
$$\eta_{n+1} = C_{n+1}/C_n, \qquad C_n \neq 0. \qquad (16)$$

Для периодического волновода $\sigma_n = \xi_n = S = A + D$, $\gamma_n = \eta_n = 1$. Тогда

$$y_{n+1} - Sy_n + y_{n-1} = 0, \quad \varphi_{n+1} - S\varphi_n + \varphi_{n-1} = 0. \qquad (17)$$

Такие же уравнения были бы для резонатора (когда $A = D$), поэтому решение для волновода можно искать в том же виде [7]

$$y_n = \exp(\pm\Theta_n), \quad \varphi_n = \exp(\pm\Theta_n), \quad \Theta_n = n\theta, \qquad (18)$$

где θ — комплексная фаза одного участка. Подставляя (18) в (17), можно определить фазу θ (с точностью до знака) характеристическим уравнением

$$\exp\theta + \exp(-\theta) = 2\operatorname{ch}\theta = S. \qquad (19)$$

Тогда общее решение уравнений (17) имеет вид

$$y_n = C_{y1}\operatorname{ch}\Theta_n + C_{y2}\operatorname{sh}\Theta_n,$$
$$\varphi_n = C_{\varphi1}\operatorname{sh}\Theta_n + C_{\varphi2}\operatorname{ch}\Theta_n, \qquad (20)$$

ср. (7). Из начальных условий, $C_{y1} = y_0$ и $C_{\varphi2} = \varphi_0$, а константы C_{y2} и $C_{\varphi1}$ определяются подстановкой в (20) уравнений (12) для первого прохода

$$y_1 = y_0\operatorname{ch}\theta + C_{y2}\operatorname{sh}\theta = Ay_0 + B\varphi_0, \qquad (21)$$

$$\varphi_1 = C_{\varphi1}\operatorname{sh}\theta + \varphi_0\operatorname{ch}\theta = Cy_0 + D\varphi_0. \qquad (22)$$

В итоге матрица $\mathbf{M}_N$ прохода N участков принимает вид

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\Theta_N + \frac{A-\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{sh}\theta}\operatorname{sh}\Theta_N & B\frac{\operatorname{sh}\Theta_N}{\operatorname{sh}\theta} \\ C\frac{\operatorname{sh}\Theta_N}{\operatorname{sh}\theta} & \operatorname{ch}\Theta_N + \frac{D-\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{sh}\theta}\operatorname{sh}\Theta_N \end{pmatrix}, \qquad (23)$$
$$\Theta_N = N\theta.$$

Для ограниченной („устойчивой") лучевой траектории $|S| \leq 2$; $\theta = i\Omega$, $\operatorname{ch}(i\Omega) = \cos\Omega$, $\operatorname{sh}(i\Omega) = i\sin\Omega$, где Ω — действительная фаза прохода, определяемая из (19): $2\cos\Omega = S$; при этом матрица $\mathbf{M}_N$ приобретает известный вид [1,2]. Для неограниченной („неустойчивой") лучевой траектории либо $S \geq 2$, и тогда $\theta = \Omega$, причем $2\operatorname{ch}\Omega = S$; либо $S \leq -2$, и тогда $\theta = \Omega + i\pi$, $\operatorname{ch}\theta = -\operatorname{ch}\Omega$, $\operatorname{sh}\theta = -\operatorname{sh}\Omega$, причем $2\operatorname{ch}\Omega = -S$.

В общем случае квазипериодического волновода удобно положить

$$y_n = \sqrt{B_n}u_n, \qquad \varphi_n = \sqrt{C_n}f_n. \qquad (24)$$

Тогда уравнения (13)–(16) перепишутся так:

$$u_{n+1} - Z_{n+1}u_n + \Gamma_{n+1}u_{n-1} = 0, \qquad (25)$$

$$f_{n+1} - \Sigma_{n+1} f_n + H_{n+1} f_{n-1} = 0, \tag{26}$$

$$Z_{n+1} = \sigma_{n+1}\sqrt{\frac{B_n}{B_{n+1}}} = A_{n+1}\sqrt{\frac{B_n}{B_{n+1}}} + D_n\sqrt{\frac{B_{n+1}}{B_n}}, \tag{27}$$

$$\Sigma_{n+1} = \xi_{n+1}\sqrt{\frac{C_n}{C_{n+1}}} = D_{n+1}\sqrt{\frac{C_n}{C_{n+1}}} + A_n\sqrt{\frac{C_{n+1}}{C_n}}, \tag{28}$$

$$\Gamma_{n+1} = \frac{\sqrt{B_{n+1}B_{n-1}}}{B_n}, \quad \mathrm{H}_{n+1} = \frac{\sqrt{C_{n+1}C_{n-1}}}{C_n}.$$

Согласно условиям (3) плавного изменения B_n и C_n,

$$\Gamma_{n+1} \approx \frac{\sqrt{(B_n + \Delta B_n)(B_n - \Delta B_{n-1})}}{B_n} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta B_n}{B_n}\right)^2 \approx 1,$$

с точностью до членов первого порядка малости. Аналогично, $\mathrm{H}_{n+1} \approx 1$. Тогда уравнения (25), (26) принимают вид, аналогичный (17):

$$u_{n+1} - Z_{n+1}u_n + u_{n-1} = 0, \tag{29}$$

$$f_{n+1} - \Sigma_{n+1} f_n + f_{n-1} = 0. \tag{30}$$

Необходимо доопределить величины u_0 и f_0, положив

$$B_0 = B_1^2/B_2 \approx B_1 - \Delta B_1,$$

$$C_0 = C_1^2/C_2 \approx C_1 - \Delta C_1, \tag{31}$$

где $\Delta B_1 = B_2 - B_1$, $\Delta C_1 = C_2 - C_1$; это следует из уравнений (13), (15) для $n = 1$ и согласуется с условиями $\Gamma_1 \approx 1$, $\mathrm{H}_1 \approx 1$. Отсюда следуют начальные условия для уравнений (29), (30); согласно (24),

$$u_0 = y_0/\sqrt{B_0}, \qquad f_0 = \varphi_0/\sqrt{C_0}. \tag{32}$$

С учетом решений (9) для резонатора и (18) для волновода решение уравнения (29) для квазипериодического волновода можно искать в виде

$$u_N = G_N \prod_{k=1}^{N} \lambda_k, \qquad \lambda_n = \exp(\pm\theta_n), \tag{33}$$

где θ_n — комплексная фаза участка n, а G_n — амплитуда, компенсирующая изменение фазы от участка к участку. Подставляя (33) в (29), получаем

$$G_{n+1}\lambda_{n+1}\lambda_n - Z_{n+1}G_n\lambda_n + G_{n-1} = 0. \tag{34}$$

Характеристическое уравнение, задающее фазу θ_n (с точностью до знака), можно взять в виде (19): $2\,\mathrm{ch}\,\theta_n = Z_n$. Однако величина Z_n задается параметрами соседних проходов согласно (27). Удобно выразить Z_{n+1} через параметры одного прохода. В первом порядке малости

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= (A_n + \Delta A_n)\sqrt{\frac{B_n}{B_n + \Delta B_n}} + D_n\sqrt{\frac{B_n + \Delta B_n}{B_n}} \\ &\approx S_n + \Delta A_n - (A_n - D_n)\frac{\Delta B_n}{2B_n} \\ &= S_n + \frac{\Delta S_n}{2} + \frac{A_n - D_n}{2} - (A_n - D_n)\frac{\Delta B_n}{2B_n} \\ &= S_n + \frac{\Delta S_n}{2} + \frac{B_n}{2}\Delta\left(\frac{R_n}{B_n}\right), \end{aligned}$$

где $S_n = A_n + D_n$, $R_n = A_n - D_n$. Зададим характеристическое уравнение

$$\lambda_n + 1/\lambda_n = \exp\theta_n + \exp(-\theta_n) = 2\,\mathrm{ch}\,\theta_n = S_n + \frac{B_n}{2}\Delta\left(\frac{R_n}{B_n}\right), \tag{35}$$

о переходе от комплексной фазы θ_n к действительной фазе Ω_n см. выше, после (23). Тогда в первом приближении

$$Z_{n+1} = 2\,\mathrm{ch}\,\theta_n + \frac{\Delta S_n}{2}, \tag{36}$$

$$\Delta S_n \approx \Delta\left(\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}\right) \approx \frac{\lambda_n^2 - 1}{\lambda_n^2}\Delta\lambda_n.$$

Аналогично для уравнения (30) с учетом (28), вводя другую фазу ψ_n:

$$\Sigma_{n+1} = 2\,\mathrm{ch}\,\psi_n + \frac{\Delta S_n}{2},$$

$$2\,\mathrm{ch}\,\psi_n = S_n - \frac{C_n}{2}\Delta\left(\frac{R_n}{C_n}\right). \tag{37}$$

Подставляя Z_{n+1} из уравнений (35), (36) в уравнение (34), получаем

$$G_{n+1}\lambda_{n+1}\lambda_n - G_n\left(\lambda_n^2 + 1 + \frac{\lambda_n^2 - 1}{2\lambda_n}\Delta\lambda_n\right) + G_{n-1} = 0. \tag{38}$$

Для малых величин $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$ и $\Delta G_n = G_{n+1} - G_n \approx \Delta G_{n-1} = G_n - G_{n-1}$; разностное уравнение (38) в первом порядке малости можно преобразовать в дифференциальное уравнение и проинтегрировать:

$$(G + \Delta G)(\lambda + \Delta\lambda)\lambda - G\lambda^2 - G\,\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}\Delta\lambda - \Delta G \approx (\lambda^2 - 1)\Delta G + G\lambda\Delta\lambda - G\,\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}\Delta\lambda = 0;$$

$$\frac{dG}{G(\lambda)} + \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 - 1} - \frac{d\lambda}{2\lambda} = 0;$$

$$G(\lambda)\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}} = G(\lambda)\sqrt{\lambda - \frac{1}{\lambda}} = G(\lambda)\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,\theta} = \mathrm{const};$$

$$G_n^{\pm} = G_0^{\pm}\sqrt{\operatorname{sh}\theta_0/\operatorname{sh}\theta_n}, \tag{39}$$

знаки $\pm$ соответствуют разным знакам θ_n. Здесь введена фаза $\theta_0 \approx \theta_1 - \Delta\theta_1 = \theta_1 - (\theta_2 - \theta_1)$; это следует из условия $G_{n+1} - G_n \approx G_n - G_{n-1}$ и общего правила, см. (31). Нулевые значения параметров волновода характеризуют его состояние до прохода излучения. Итак, общее решение уравнения (13), согласно (24) и (33), записывается в виде

$$y_N = \sqrt{B_N}(G_N^+ \exp\Theta_N + G_N^- \exp(-\Theta_N));$$

$$\Theta_N = \sum_{k=1}^{N}\theta_k.$$

Подставляя (39) и вводя $G_0^+ = (G_C + G_S)/2$, $G_0^- = (G_C - G_S)/2$ получаем

$$y_N = \sqrt{B_N\frac{\operatorname{sh}\theta_0}{\operatorname{sh}\theta_N}}(G_C\operatorname{ch}\Theta_N + G_S\operatorname{sh}\Theta_N), \tag{40}$$

ср. (20). Если исходить из характеристического уравнения $2\operatorname{ch}\theta_n = Z_n$ вместо (35), то в амплитуде G_N и фазе Θ_N возникнут дополнительные добавки, которые в первом приближении взаимно сократятся, так что в итоге будет тот же результат (40).

Аналогичным образом из (30) можно получить решение уравнения (15)

$$\varphi_N = \sqrt{C_N\frac{\operatorname{sh}\psi_0}{\operatorname{sh}\psi_N}}(G_{C\varphi}\operatorname{ch}\Psi_N + G_{S\varphi}\operatorname{sh}\Psi_N),$$

$$\Psi_N = \sum_{k=1}^{N}\psi_k, \tag{41}$$

ср. (20); угол ψ_n определяется согласно (37). Из начальных условий

$$G_C = y_0/\sqrt{B_0}, \qquad G_{C\varphi} = \varphi_0/\sqrt{C_0},$$

G_S и $G_{S\varphi}$ можно определить, подставив в соотношения (40), (41) уравнения (12) для первого прохода: $y_1 = A_1y_0 + B_1\varphi_0$, $\varphi_1 = C_1y_0 + D_1\varphi_0$. Тогда

$$y_N = \sqrt{\frac{B_N\operatorname{sh}\theta_0}{B_0\operatorname{sh}\theta_N}}\Bigg\{y_0\operatorname{ch}\Theta_N + \left[\sqrt{\frac{B_0\operatorname{sh}\theta_1}{B_1\operatorname{sh}\theta_0}}(A_1y_0 + B_1\varphi_0) - y_0\operatorname{ch}\theta_1\right]\frac{\operatorname{sh}\Theta_N}{\operatorname{sh}\theta_1}\Bigg\}, \tag{42}$$

$$\varphi_N = \sqrt{\frac{C_N\operatorname{sh}\psi_0}{C_0\operatorname{sh}\psi_N}}\Bigg\{\varphi_0\operatorname{ch}\Psi_N + \left[\sqrt{\frac{C_0\operatorname{sh}\psi_1}{C_1\operatorname{sh}\psi_0}}(C_1y_0 + D_1\varphi_0) - \varphi_0\operatorname{ch}\psi_1\right]\frac{\operatorname{sh}\Psi_N}{\operatorname{sh}\psi_1}\Bigg\}. \tag{43}$$

Фазы θ_n и ψ_n определены согласно (35), (37) с точностью до знака; это не влияет на результат, поскольку гиперболические синусы входят в (42), (43) в виде отношения. Для периодического волновода, когда $\theta_n = \psi_n = \theta$, $B_n = B$, $C_n = C$, формулы (42), (43) сводятся к лучевой матрице (23). Главное отличие от случая периодического волновода (23) — наличие амплитудных факторов. Рассмотрим сначала особые случаи для уравнений (13), (29).

Особые случаи

Решение (39) неприменимо, когда $\lambda_n \to 1$, $\theta_n \to 0$. В этом случае происходит вырождение лучевой траектории. Согласно (27), (36), условие вырождения: $Z_n = 2$, $\sigma_n = 2\gamma_n^{1/2} \approx 2 + \Delta B_n/B_n$. Характеристическое уравнение (35) при этом имеет один кратный корень: $\lambda_n \approx 1$, $\theta_n \approx 0$. Здесь пролегает граница между „устойчивыми“ и „неустойчивыми“ лучевыми траекториями. Вблизи этой границы в уравнении (34) главную роль играют факторы второго порядка малости, которыми пренебрегалось при выводе (39) из (38). Именно, при $\lambda_n = 1$, согласно (34), с учетом (24), (33)

$$G_{n+1} - G_n = G_n - G_{n-1}, \quad u_n = G_n = \frac{y_n}{\sqrt{B_n}}, \tag{44}$$

$$\frac{y_{n+1}}{\sqrt{B_{n+1}}} - \frac{y_n}{\sqrt{B_n}} = \frac{y_n}{\sqrt{B_n}} - \frac{y_{n-1}}{\sqrt{B_{n-1}}} = \dots = \frac{y_1}{\sqrt{B_1}} - \frac{y_0}{\sqrt{B_0}}, \quad B_0 = \frac{B_1^2}{B_2}.$$

Производя суммирование этих равенств и подставляя y_1, получаем

$$\frac{y_N}{\sqrt{B_N}} = \left(\frac{y_1}{\sqrt{B_1}} - \frac{y_0}{\sqrt{B_0}}\right)N + \frac{y_0}{\sqrt{B_0}},$$

$$y_1 = A_1y_0 + B_1\varphi_0. \tag{45}$$

Это решение получено из уравнения (29) в приближении $\Gamma_n = 1$. Более точное условие вырождения лучевой траектории можно получить из (13)

$$\sigma_{n+1} = \sqrt{\frac{B_{n+1}}{B_n}}\left(1 + \frac{\sqrt{B_{n+1}B_{n-1}}}{B_n}\right), \ n \geq 2,$$

само уравнение (13) при этом можно итеративно преобразовать к виду

$$\frac{y_{n+1}}{\sqrt{B_{n+1}}} - \frac{y_n}{\sqrt{B_n}} = \frac{\sqrt{B_{n+1}B_{n-1}}}{B_n}\left(\frac{y_n}{\sqrt{B_n}} - \frac{y_{n-1}}{\sqrt{B_{n-1}}}\right) = \sqrt{\frac{B_{n+1}}{B_n}}\sqrt{\frac{B_1}{B_2}}\left(\frac{y_2}{\sqrt{B_2}} - \frac{y_1}{\sqrt{B_1}}\right).$$

Итерируя аналогичным образом разностное уравнение для меньших индексов и производя суммирование, легко получить точное решение

$$\frac{y_N}{\sqrt{B_N}} = \left(\frac{y_2}{\sqrt{B_2}} - \frac{y_1}{\sqrt{B_1}}\right)\sqrt{\frac{B_1}{B_2}} \times \sum_{k=3}^{N}\sqrt{\frac{B_k}{B_{k-1}}} + \frac{y_2}{\sqrt{B_2}}, \quad N \geq 3. \tag{46}$$

Здесь y_2 рассчитывается, согласно (13), по заданному σ_2; $y_1 = A_1 y_0 + B_1\varphi_0$.

Еще один особый случай: $\sigma_n = 1 + \gamma_n = 2 + \Delta B_n/B_n$, при этом, согласно (27), $Z_n \approx 2$ в первом порядке малости по $\Delta B_n/B_n$. Уравнение (13) в этом случае также легко решается

$$y_{n+1} - y_n = \gamma_{n+1}(y_n - y_{n-1}) = (y_1 - y_0)\prod_{k=1}^{n}\gamma_{k+1} = (y_1 - y_0)(B_{n+1}/B_1).$$

Расписывая разность $y_n - y_{n-1}$ и т.д., после суммирования получаем

$$y_N = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{1}{B_1}\sum_{k=1}^{N} B_k, \ \ y_1 = A_1 y_0 + B_1\varphi_0. \tag{47}$$

Примером такого случая является волновод, состоящий из участков с однородной средой длиной l_k и показателем преломления n_k^*. Для такого волновода матрицы проходов $\mathbf{m}_k$ имеют простой вид и легко перемножаются, приводя к тому же результату, что и (47):

$$\mathbf{m}_k = \begin{pmatrix} 1 & B_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} 1 & P_N \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_N = \sum_{k=1}^{N} B_k, \quad B_k = \frac{l_k}{n_k^*}.$$

Особые случаи легче понять, записав разностное уравнение (13) в виде

$$\Delta^2 y_n = (\sigma_{n+1} - 1 - \gamma_{n+1})y_n + (\gamma_{n+1} - 1)(y_n - y_{n-1}),$$

$$\Delta^2 y_n \equiv (y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1})$$

и сопоставив ему дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{\sigma - 1 - \gamma}{(\Delta z)^2}y + \frac{\gamma - 1}{\Delta z}\frac{dy}{dz}, \ \gamma - 1 = \frac{\Delta z}{B}\frac{dB}{dz}, \tag{48}$$

где Δz — длина участка волновода. Если $\sigma = 1 + \gamma$, то это уравнение решается точно последовательным интегрированием

$$\frac{1}{B(z)}\frac{dy}{dz} = \frac{1}{B_1}\frac{dy}{dz}\bigg|_0,$$

$$y = y_0 + \frac{dy}{dz}\bigg|_0 \frac{1}{B_1}\int_0^z B(z')dz' = y_0 + \frac{\varphi_0}{B_1}\int_0^z B(z')dz', \tag{49}$$

где $B_1 = B(0)$; этот случай соответствует решению (47).

Если $\gamma \neq 1$, то в уравнении (48) следует перейти к новой переменной $u(z)$:

$$y(z) = \exp\left(\frac{P(z)}{2}\right)u(z) = u(z)\sqrt{B(z)},$$

$$P(z) = \int \frac{\gamma - 1}{\Delta z}dz = \ln B(z);$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \left[\frac{\sigma - 1 - \gamma}{(\Delta z)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{B}\frac{dB}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2B}\frac{d^2B}{dz^2}\right]u; \tag{50}$$

это соответствует переходу от (13) к (25), (29); функция $u(z)$ соответствует амплитуде u_n. В правой части (50) второе и третье слагаемые в скобках можно опустить как величины второго порядка малости; тогда

$$\frac{d^2u}{dz^2} \approx \frac{\sigma - 1 - \gamma}{(\Delta z)^2}u. \tag{51}$$

Если $\sigma_n = 2\gamma_n^{1/2}$, то $(\sigma - \gamma - 1) = -(\gamma_n^{1/2} - 1)^2 \approx \approx -(\Delta z/B)^2(dB/dz)^2/4$; правая часть (51) в первом порядке малости обращается в нуль, и тогда

$$\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{y(z)}{\sqrt{B(z)}}\right) = \text{const},$$

$$\frac{y(z)}{\sqrt{B(z)}} = \frac{y_0}{\sqrt{B_1}} + \text{const}\, z, \tag{52}$$

константа определяется по углу φ_0; этот случай соответствует решению (45). При $\sigma = 1 + \gamma$ приближенное решение (52) соответствует точному решению (49) в первом порядке малости, в чем нетрудно убедиться, положив $B(z) = B_1 + z\,dB/dz$.

В окрестности $\lambda_n = 1$, когда $\sigma_n = 2\gamma_n^{1/2} + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, (51) принимает вид

$$\frac{d^2u}{dz^2} \approx \frac{\varepsilon(z)}{(\Delta z)^2}u.$$

Если $\varepsilon(z) = \alpha z(\Delta z)^2$, где α — константа, то общее решение уравнения $u(z)$ будет линейной комбинацией функций Эйри Ai $(\alpha^{1/3}z)$ и Bi $(\alpha^{1/3}z)$.

Ранее предполагалось, что $B_n \neq 0$. Если $B_n = 0$, то уже уравнение (13) не является корректным. В этом специфическом случае из (12) сразу имеем

$$y_N = y_0\prod_{k=1}^{N} A_k.$$

Аналогично могут быть рассмотрены особые случаи уравнений (15), (30). Далее предполагается, что $\theta_n \neq 0$, $B_nC_n \neq 0$.

Унификация основного решения

Для того чтобы привести выражения (42) и (43) к матричному виду и завершить решение задачи, следует унифицировать фазы прохода θ_n и ψ_n, определенные соотношениями (35) и (37). Преобразуем эти соотношения

$$\frac{B_n}{2}\Delta\left(\frac{R_n}{B_n}\right)=\frac{\sqrt{B_nC_n}}{2}\sqrt{\frac{B_n}{C_n}}\Delta\left(\frac{R_n}{\sqrt{B_nC_n}}\sqrt{\frac{C_n}{B_n}}\right)$$

$$=2\Delta T_n+R_n\frac{\Delta\omega_n}{2\omega_n},$$

$$\frac{C_n}{2}\Delta\left(\frac{R_n}{C_n}\right)=\frac{\sqrt{B_nC_n}}{2}\sqrt{\frac{C_n}{B_n}}\Delta\left(\frac{R_n}{\sqrt{B_nC_n}}\sqrt{\frac{B_n}{C_n}}\right)$$

$$=2\Delta T_n-R_n\frac{\Delta\omega_n}{2\omega_n};$$

$$\Delta T_n=\frac{\sqrt{|B_nC_n|}}{4}\Delta\left(\frac{R_n}{\sqrt{|B_nC_n|}}\right),\quad \omega_n=\sqrt{\left|\frac{C_n}{B_n}\right|}. \quad (53)$$

Здесь введена „частота прохода“ ω_n. Тогда уравнения (35) и (37) для фаз прохода θ_n и ψ_n можно представить в виде

$$2\operatorname{ch}\theta_n=S_n+R_n\frac{\Delta\omega_n}{2\omega_n}+2\Delta T_n,$$

$$2\operatorname{ch}\psi_n=S_n+R_n\frac{\Delta\omega_n}{2\omega_n}-2\Delta T_n.$$

Введем единую комплексную фазу прохода ϑ_n:

$$2\operatorname{ch}\vartheta_n=S_n+R_n\frac{\Delta\omega_n}{2\omega_n}$$

$$=A_n\left(1+\frac{\Delta\omega_n}{2\omega_n}\right)+D_n\left(1-\frac{\Delta\omega_n}{2\omega_n}\right)$$

$$\approx A_n\sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}}+D_n\sqrt{\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}}; \quad (54)$$

о переходе от комплексной фазы к действительной см. после (23). Тогда

$$\operatorname{ch}\theta_n=\operatorname{ch}\vartheta_n+\Delta T_n,\ \operatorname{ch}\psi_n=\operatorname{ch}\vartheta_n-\Delta T_n.$$

Преобразуем поправку ΔT_n в малую добавку к фазе прохода $\delta\vartheta_n$:

$$\theta_n\approx\vartheta_n+\delta\vartheta_n,\quad \psi_n\approx\vartheta_n-\delta\vartheta_n, \quad (55)$$

$$\operatorname{ch}(\vartheta_n\pm\delta\vartheta_n)\approx\operatorname{ch}\vartheta_n\pm\operatorname{sh}\vartheta_n\delta\vartheta_n,$$

$$\delta\vartheta_n=\Delta T_n/\operatorname{sh}\vartheta_n. \quad (56)$$

При расчете добавки $\delta\vartheta_n$ можно взять ϑ_n в пренебрежении поправками:

$$\operatorname{sh}\vartheta_n=\pm\sqrt{\operatorname{ch}\vartheta_n^2-1}\approx\pm\sqrt{\frac{(A_n+D_n)^2}{4}-1}$$

$$=\frac{B_n}{|B_n|}\sqrt{\frac{(A_n-D_n)^2}{4}+B_nC_n}, \quad (57)$$

знак ϑ_n здесь установлен для соответствия случаю (5), (6), когда $A=D$. Подставляя (56) и (57) в (53), получаем

$$\delta\vartheta_n=\frac{b\Delta L_n}{2\sqrt{L_n^2+bc}},\qquad L_n=\frac{A_n-D_n}{2\sqrt{|B_nC_n|}}, \quad (58)$$

$$b=\frac{B_n}{|B_n|},\qquad c=\frac{C_n}{|C_n|}.$$

Малое изменение матричных элементов по ходу луча подразумевает, что $b=\text{const}$, $c=\text{const}$. Введем угол β_n, определенный соотношениями

$$L_n=\begin{cases} b\operatorname{sh}\beta_n,\ bc=+1,\\ b\sin\beta_n,\ bc=-1,\ |L_n|<1,\\ \xi\operatorname{ch}\beta_n,\ bc=-1,\ |L_n|>1.\end{cases}\quad \operatorname{sgn}\beta_n=b\xi,\quad \xi=\frac{R_n}{|R_n|}=\text{const}, \quad (59)$$

Если $bc=1$, или $bc=-1$ и $|L_n|>1$, то $\delta\vartheta_n=\Delta\beta_n/2$; в этих случаях фаза прохода ϑ_n действительна (либо $\vartheta_n=\Omega_n+i\pi$) согласно (57). Если $bc=-1$ и $|L_n|<1$, то $\delta\vartheta_n=-i\Delta\beta_n/2$, в этом случае фаза прохода мнимая, $\vartheta_n=i\Omega_n$.

Если в (42), (43) пренебречь в амплитудах малым различием между B_0 и B_1, C_0 и C_1 (эти различия не накапливаются по мере роста числа проходов), а также положить $\theta_0\approx\theta_1\approx\vartheta_1$, $\psi_0\approx\psi_1\approx\vartheta_1$, $\theta_N\approx\psi_N\approx\vartheta_N$, $2\operatorname{ch}\vartheta_1\approx A_1+D_1$, то соотношения (42), (43) можно упростить; с учетом (55)

$$y_N=\sqrt{\frac{B_N\operatorname{sh}\vartheta_1}{B_1\operatorname{sh}\vartheta_N}}\left\{y_0\operatorname{ch}\Theta_N+\left[\frac{A_1-D_1}{2}y_0+B_1\varphi_0\right]\frac{\operatorname{sh}\Theta_N}{\operatorname{sh}\vartheta_1}\right\}, \quad (60)$$

$$\varphi_N=\sqrt{\frac{C_N\operatorname{sh}\vartheta_1}{C_1\operatorname{sh}\vartheta_N}}\left\{\varphi_0\operatorname{ch}\Psi_N+\left[\frac{D_1-A_1}{2}\varphi_0+C_1y_0\right]\frac{\operatorname{sh}\Psi_N}{\operatorname{sh}\vartheta_1}\right\}, \quad (61)$$

$$\Theta_N=\Xi_N+\delta\Xi_N,\quad \Psi_N=\Xi_N-\delta\Xi_N,$$

$$\Xi_N=\sum_{k=1}^N\vartheta_k,\quad \delta\Xi_N=\sum_{k=1}^N\delta\vartheta_k.$$

Эти соотношения можно унифицировать, вводя приведенные переменные

$$\tilde{y}_N=\tilde{y}_0\operatorname{ch}(\Xi_N+\delta\Xi_N)+\left[\frac{R_1}{2}\tilde{y}_0+b\sqrt{|B_1C_1|}\tilde{\varphi}_0\right]$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}(\Xi_N+\delta\Xi_N)}{\operatorname{sh}\vartheta_1}, \quad (62)$$

$$\tilde{\varphi}_N=\tilde{\varphi}_0\operatorname{ch}(\Xi_N-\delta\Xi_N)-\left[\frac{R_1}{2}\tilde{\varphi}_0-c\sqrt{|B_1C_1|}\tilde{y}_0\right]$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}(\Xi_N-\delta\Xi_N)}{\operatorname{sh}\vartheta_1}, \quad (63)$$

$$\tilde{y}_n=y_n\sqrt{|\operatorname{sh}\vartheta_n/B_n|},\ \tilde{\varphi}_n=\varphi_n\sqrt{|\operatorname{sh}\vartheta_n/C_n|}.$$

Целесообразно рассмотреть упомянутые три случая отдельно.

1. $B_nC_n > 0$: $L_n = b\,\mathrm{sh}\beta_n$, $\delta\vartheta_n = \Delta\beta_n/2$, $\delta\Xi_N = (\beta_N - \beta_1)/2$. С учетом (57)–(59) соотношения (62), (63) принимают вид

$$\tilde{y}_N = \tilde{y}_0\,\mathrm{ch}\left(\Xi_N + \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right) + \left(\frac{\mathrm{sh}\beta_1\tilde{y}_0 + \tilde{\varphi}_0}{\mathrm{ch}\beta_1}\right) \times \mathrm{sh}\left(\Xi_N + \frac{\beta_N - B_1}{2}\right), \quad (64)$$

$$\tilde{\varphi}_N = \tilde{\varphi}_0\,\mathrm{ch}\left(\Xi_N - \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right) - \left(\frac{\mathrm{sh}\beta_1\tilde{\varphi}_0 - \tilde{y}_0}{\mathrm{ch}\beta_1}\right) \times \mathrm{sh}\left(\Xi_N - \frac{\beta_N - B_1}{2}\right). \quad (65)$$

Эту систему целесообразно преобразовать к виду

$$\tilde{y}_N\,\mathrm{ch}\beta_1 = \mathrm{ch}\,\Xi_N(\tilde{y}_0\,\mathrm{ch}\beta_s + \tilde{\varphi}_0\,\mathrm{sh}\beta_R) + \mathrm{sh}\,\Xi_N(\tilde{y}_0\,\mathrm{sh}\beta_S + \tilde{\varphi}_0\,\mathrm{ch}\beta_R),$$

$$\tilde{\varphi}_N\,\mathrm{ch}\beta_1 = \mathrm{ch}\,\Xi_N(\tilde{\varphi}_0\,\mathrm{ch}\beta_s - \tilde{y}_0\,\mathrm{sh}\beta_R) - \mathrm{sh}\,\Xi_N(\tilde{\varphi}_0\,\mathrm{sh}\beta_S - \tilde{y}_0\,\mathrm{ch}\beta_R),$$

где $\beta_S = (\beta_N + \beta_1)/2$, $\beta_R = (\beta_N - \beta_1)/2$.

Находя отсюда $\mathrm{ch}\,\Xi_N$ и $\mathrm{sh}\,\Xi_N$, можно исключить накапливаемую фазу Ξ_N с помощью формулы $\mathrm{ch}^2\,\Xi_N - \mathrm{sh}^2\,\Xi_N = 1$ и получить соотношение, связывающее конечные параметры лучевой траектории с начальными:

$$\frac{\tilde{\varphi}_N^2 - \tilde{y}_N^2 + 2\tilde{y}_N\tilde{\varphi}_N\,\mathrm{sh}\beta_N}{\mathrm{ch}^2\beta_N} = \frac{\tilde{\varphi}_0^2 - \tilde{y}_0^2 + 2\tilde{y}_0\tilde{\varphi}_0\,\mathrm{sh}\beta_1}{\mathrm{ch}^2\beta_1} = \mathrm{const}. \quad (66)$$

2. $B_nC_n < 0$, $R_n^2 > 4|B_nC_n|$: $L_n = \xi\,\mathrm{ch}\beta_n$, $\delta\vartheta_n = \Delta\beta_n/2$, $\delta\Xi_N = (\beta_N - \beta_1)/2$. С учетом (57)–(59) соотношения (62), (63) принимают вид

$$\tilde{y}_N = \tilde{y}_0\,\mathrm{ch}\left(\Xi_N + \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right) + \left(\frac{\mathrm{ch}\beta_1\tilde{y}_0 + b\xi\tilde{\varphi}_0}{\mathrm{sh}\beta_1}\right) \times \mathrm{sh}\left(\Xi_N + \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right), \quad (67)$$

$$\tilde{\varphi}_N = \tilde{\varphi}_0\,\mathrm{ch}\left(\Xi_N - \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right) - \left(\frac{\mathrm{ch}\beta_1\tilde{\varphi}_0 + b\xi\tilde{y}_0}{\mathrm{sh}\beta_1}\right) \times \mathrm{sh}\left(\Xi_N - \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right). \quad (68)$$

Значение $\beta_1 = 0$ здесь исключается, поскольку в данном случае, согласно (57)–(59), $\beta_1 = 0$ соответствует $L_1^2 = 1$, $\vartheta_1 = 0$. Для преобразований (67), (68) также существует свой инвариант, который выводится аналогично (66):

$$\frac{\tilde{\varphi}_N^2 + \tilde{y}_N^2 + 2b\xi\tilde{y}_N\tilde{\varphi}_N\,\mathrm{ch}\beta_N}{\mathrm{sh}^2\beta_N} = \frac{\tilde{\varphi}_0^2 + \tilde{y}_0^2 + 2b\xi\tilde{y}_0\tilde{\varphi}_0\,\mathrm{ch}\beta_1}{\mathrm{sh}^2\beta_1} = \mathrm{const}. \quad (69)$$

3. $B_nC_n < 0$, $R_n^2 < 4|B_nC_n|$; фаза ϑ_n мнимая, согласно (57); $\vartheta_n = i\Omega_n$, где Ω_n — действительная фаза прохода, $\mathrm{sh}(\vartheta_n) = i\sin\Omega_n$, $\Xi_N = i\Phi_N$; $\delta\vartheta_n = -i\Delta\beta_n/2$, $\delta\Xi_N = -i(\beta_N - \beta_1)/2$. Соотношения (62), (63) принимают вид

$$\tilde{y}_N = \tilde{y}_0\cos\left(\Phi_N - \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right) + \left(\frac{\sin\beta_1\tilde{y}_0 + \tilde{\varphi}_0}{\cos\beta_1}\right) \times \sin\left(\Phi_N - \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right), \quad (70)$$

$$\tilde{\varphi}_N = \tilde{\varphi}_0\cos\left(\Phi_N + \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right) - \left(\frac{\sin\beta_1\tilde{\varphi}_0 + \tilde{y}_0}{\cos\beta_1}\right) \times \sin\left(\Phi_N + \frac{\beta_N - \beta_1}{2}\right). \quad (71)$$

Эту систему легко преобразовать к виду:

$$\tilde{y}_N\cos\beta_1 = \cos\Phi_N(\tilde{y}_0\cos\beta_s - \tilde{\varphi}_0\sin\beta_R) + \sin\Phi_N(\tilde{y}_0\sin\beta_S + \tilde{\varphi}_0\cos\beta_R),$$

$$\tilde{\varphi}_N\cos\beta_1 = \cos\Phi_N(\tilde{\varphi}_0\cos\beta_s - \tilde{y}_0\sin\beta_R) - \sin\Phi_N(\tilde{\varphi}_0\sin\beta_S + \tilde{y}_0\cos\beta_R).$$

Находя отсюда $\cos\Phi_N$ и $\sin\Phi_N$ и складывая их квадраты, можно исключить накапливаемую фазу Φ_N и получить инвариант, связывающий конечные параметры лучевой траектории с начальными:

$$\frac{\tilde{\varphi}_N^2 + \tilde{y}_N^2 + 2\tilde{y}_N\tilde{\varphi}_N\sin\beta_N}{\cos^2\beta_N} = \frac{\tilde{\varphi}_0^2 + \tilde{y}_0^2 + 2\tilde{y}_0\tilde{\varphi}_0\sin\beta_1}{\cos^2\beta_1} = Q^2. \quad (72)$$

Формулы (70), (71) аналогичны (64), (65) с заменой гиперболических функций тригонометрическими. Однако соотношениям (70), (71) можно придать вид, аналогичный (67), (68), если положить $L_N = \xi\cos\beta_n$, $\mathrm{sgn}\beta_n = b\xi$ вместо (59). Стоит отметить, что фактор $(B_n/\sin\Omega_n)^{1/2}$ пропорционален радиусу гауссовского пучка, самовоспроизводящегося после прохождения периода с лучевой матрицей $\mathbf{m}_n$; фактор $(C_n/\sin\Omega_n)^{1/2}$ пропорционален углу расходимости такого пучка в дальней зоне [1].

Если опорные плоскости волновода выбраны так, что $A_n = D_n$, $R_n = 0$, $\beta_n = 0$, то выражения (70), (71) с учетом (57) принимают простой вид

$$\tilde{y}_N = \tilde{y}_0\cos\Phi_N + \tilde{\varphi}_0\sin\Phi_N, \quad (73)$$

$$\tilde{\varphi}_N = \tilde{\varphi}_0\cos\Phi_N - \tilde{y}_0\sin\Phi_N, \quad (74)$$

$$\tilde{y}_n = y_n\sqrt{\left|\frac{\mathrm{sh}\,\vartheta_n}{B_n}\right|} = y_n\sqrt{\omega_n},$$

$$\tilde{\varphi}_n = \varphi_n\sqrt{\left|\frac{\mathrm{sh}\,\vartheta_n}{C_n}\right|} = \frac{\varphi_n}{\sqrt{\omega_n}}, \quad \omega_n = \sqrt{\left|\frac{C_n}{B_n}\right|}, \quad (75)$$

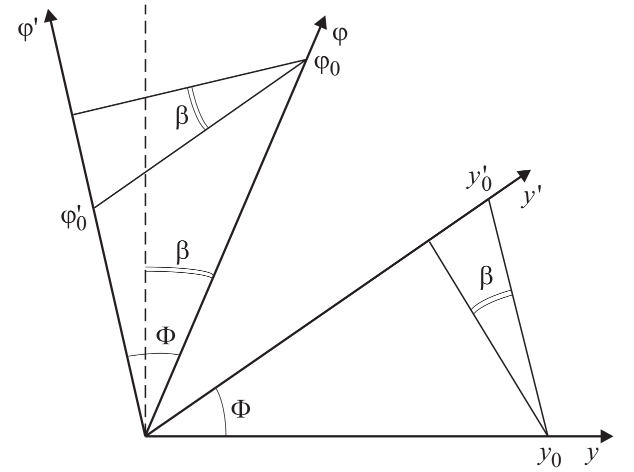

Рис. 3. Преобразование косоугольных координат при повороте системы координат на угол Φ.

а инвариант (72) приобретает вид, аналогичный (11):

$$(\sqrt{\omega_n}y_n)^2+(\varphi_n/\sqrt{\omega_n})^2=\mathrm{const}=(\sqrt{\omega_0}y_0)^2+(\varphi_0/\sqrt{\omega_0})^2. \tag{76}$$

Таким образом, лучевая матрица (10), выведенная ранее эвристически, получила строгое обоснование. Однако исходные приближения (3) следует уточнить: изменение частоты прохода должно быть малым ($\Delta\omega_n \ll \omega_n$) не за проход, а на периоде осцилляции, который задается условием $\Delta\Phi = \pi$.

Выражения (64), (65) при $A_n = D_n$ переходят в гиперболические формулы, аналогичные (73)–(75). Выражения (67), (68) к случаю $R_n = 0$ неприменимы.

Интерпретация основного решения

Вернемся к важнейшему случаю „устойчивой" траектории (70), (71). Если по ходу луча $\omega = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$ ($\Delta_N\beta = 0$), то лучевая матрица, выражающая вектор $(\tilde{y}_N, \tilde{\varphi}_N)$ через начальный вектор $(\tilde{y}_0, \tilde{\varphi}_0)$, имеет вид

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} \cos\Phi_N + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\sin\Phi_N & \frac{\sin\Phi_N}{\cos\beta} \\ -\frac{\sin\Phi_N}{\cos\beta} & \cos\Phi_N - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\sin\Phi_N \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Эта матрица с учетом (57)–(59) соответствует матрице (23) для случая $\theta = i\Omega$, но фактически матрица (77) применима в более широком смысле. Если матрица (23) по своему построению имеет групповой характер по числу проходов n (фазы проходов θ_n одинаковы), то матрица (77) образует группу по фазе Φ_n: для любых фаз Φ_i и Φ_j произведение двух матриц (77) будет иметь такой же вид (77) для фазы $\Phi_i + \Phi_j$.

Геометрический смысл матрицы (77) состоит в том, что она производит поворот вектора $(\tilde{y}, \tilde{\varphi})$ на угол Φ (по часовой стрелке) в косоугольной системе координат, в которой угол между осями равен $\pi/2 - \beta$; при $\beta = 0$ это будет поворот вектора $(\tilde{y}, \tilde{\varphi})$ в прямоугольной системе координат, см. (5). Действительно, при повороте системы координат (y, φ) против часовой стрелки на угол Φ (рис. 3) косоугольная проекция отрезка y_0 на ось y' составит $y'_0 = y_0(\cos\Phi + \sin\Phi\,\mathrm{tg}\beta)$, а проекция отрезка y_0 на ось φ' будет $y'_{0\varphi} = -y_0\sin\Phi/\cos\beta$. Косоугольные же проекции отрезка φ_0 на оси y' и φ' составят $\varphi'_{0y} = \varphi_0\sin\Phi/\cos\beta$ и $\varphi'_0 = \varphi_0(\cos\Phi - \sin\Phi\,\mathrm{tg}\beta)$ соответственно; коэффициенты этих преобразований и составляют матрицу (77).

Если же „распрямить" координаты и ввести новые переменные:

$$\hat{y} = \tilde{y} + \tilde{\varphi}\sin\beta, \qquad \hat{\varphi} = \tilde{\varphi}\cos\beta$$

или

$$\hat{y} = \tilde{y}\cos\beta, \qquad \hat{\varphi} = \tilde{\varphi} + \tilde{y}\sin\beta,$$

то они будут преобразовываться обычной матрицей поворота

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_N \\ \hat{\varphi}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi_N & \sin\Phi_N \\ -\sin\Phi_N & \cos\Phi_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{\varphi}_0 \end{pmatrix}. \tag{78}$$

В обоих случаях инвариантом преобразований (78) будет величина

$$Q_0^2 = \hat{y}_N^2 + \hat{\varphi}_N^2 = \tilde{y}_N^2 + \tilde{\varphi}_N^2 + 2\tilde{y}_N\tilde{\varphi}_N\sin\beta$$
$$= \tilde{y}_0^2 + \tilde{\varphi}_0^2 + 2\tilde{y}_0\tilde{\varphi}_0\sin\beta, \tag{79}$$

равная квадрату диагонали параллелограмма, построенного на отрезках $\tilde{y}_0$ и $\tilde{\varphi}_0$ (рис. 3); инварианты (79) и (11) — это частные случаи величины (72).

В координатах $(\tilde{y}_N, \tilde{\varphi}_N)$ инвариант (72) описывает эллипс, оси которого не совпадают с координатными осями. Действительно, в координатах (x, y) уравнение эллипса с полуосями L_x и L_y, совпадающими с координатными осями (пусть для определенности $L_y > L_x$), имеет вид

$$\left(\frac{x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{L_y}\right)^2 = 1.$$

При повороте координатных осей на угол Φ координаты преобразуются согласно (78); уравнение эллипса при этом приобретает вид, подобный (72):

$$x^2(L_y^2\cos^2\Phi + L_x^2\sin^2\Phi) + y^2(L_y^2\sin^2\Phi + L_x^2\cos^2\Phi)$$
$$+ 2xy\sin\Phi\cos\Phi(L_y^2 - L_x^2) = (L_xL_y)^2. \tag{80}$$

В инварианте (72) коэффициенты при квадратах переменных величин $\tilde{y}$ и $\tilde{\varphi}$ совпадают; это позволяет определить из (80) угол поворота Φ:

$$L_y^2\cos^2\Phi + L_x^2\sin^2\Phi = L_y^2\sin^2\Phi + L_x^2\cos^2\Phi,$$

$$\sin^2\Phi = \cos^2\Phi = 1/2,$$

отсюда $\Phi = \pm\pi/4$; знак угла Φ определяется знаком $\sin\beta_N$. Тогда из (80)

$$x^2 + y^2 + \mathrm{sgn}\,\beta_N 2xy\,\frac{L_y^2 - L_x^2}{L_y^2 + L_x^2} = 2\,\frac{(L_xL_y)^2}{L_y^2 + L_x^2}.$$

Итак, в приведенных координатах $(\tilde{y}_N, \tilde{\varphi}_N)$ инвариант (72) описывает эллипс, повернутый на угол $\pm\pi/4$, полуоси эллипса ($L_y = L_{\max}$ и $L_x = L_{\min}$) определяются соотношениями

$$\frac{L_{\max}^2 - L_{\min}^2}{L_{\max}^2 + L_{\min}^2} = \sin|\beta_N|, \ \ 2\,\frac{(L_{\max}L_{\min})^2}{L_{\max}^2 + L_{\min}^2} = Q^2\cos^2\beta_N.$$

В качестве наглядного примера изложенных результатов рассмотрим классический пустой резонатор, состоящий из двух зеркал с радиусами r_1 и r_2, разнесенных на расстояние l. Круглые зеркала можно заменить на плоские в комбинации с линзами, фокусные расстояния которых $f_1 = r_1$, $f_2 = r_2$. Совмещая опорные плоскости с плоскими зеркалами, оптическую схему резонатора можно уподобить рис. 1 (без ячейки C). Полупроход луча включает в себя преломление на линзе 1, проход через промежуток l и преломление на линзе 2. Лучевая матрица полупрохода имеет вид

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_1} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{r_1} & l \\ -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{l}{r_1 r_2} & 1 - \frac{l}{r_2} \end{pmatrix}.$$

Матрица обратного полупрохода $\mathbf{w}_R$ имеет такой же вид, но с заменой $r_1 \leftrightarrow r_2$. Перемножая $\mathbf{w}_R\mathbf{w}$ или просто используя (4), получаем элементы матрицы $\mathbf{m}$ полного прохода луча через резонатор

$$A = D = \left(1 - \frac{l}{r_1}\right)\left(1 - \frac{l}{r_2}\right) - \frac{l}{r_1} - \frac{l}{r_2} + \frac{l^2}{r_1 r_2}$$
$$= 2g_1g_2 - 1,$$
$$B = 2l\left(1 - \frac{l}{r_2}\right) = 2lg_2,$$
$$C = 2\left(1 - \frac{l}{r_1}\right)\left(-\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{l}{r_1 r_2}\right) = 2\,\frac{g_1}{l}\,(g_1g_2 - 1),$$
$$\omega = \sqrt{\left|\frac{C}{B}\right|}, \qquad \frac{C}{B} = -\frac{g_1}{g_2}\,\frac{1 - g_1g_2}{l^2}, \qquad (81)$$

где $g_1 = 1 - l/r_1$ и $g_2 = 1 - l/r_2$ — приведенные параметры резонатора. При таком выборе опорных плоскостей (когда обратный проход резонатора симметричен прямому проходу) $A = D$ и $\beta = 0$. Условие устойчивости резонатора $|A + D| < 2$ означает [2,7], что

$$-2 < 4g_1g_2 - 2 < 2 \quad \text{или} \quad 0 < g_1g_2 < 1, \qquad (82)$$

при этом $C/B < 0$. Предположим, что условие устойчивости выполняется, но резонатор плавно меняется так, что $r_1 \to l$, $g_1 \to 0$, причем это изменение за один проход невелико. В этом случае ход лучей для большого числа проходов дается выражениями (73)–(75); более наглядное представление дает инвариант (76). Если $g_1 \to 0$, то $\omega \to 0$; при этом $y_n \to \infty$, $\varphi_n \to 0$. Хотя резонатор все еще остается в области устойчивости, однако световые лучи (в опорной плоскости 1) уже выходят за пределы резонатора. И наоборот: если $g_2 \to 0$, то $\omega \to \infty$; при этом $y_n \to 0$, $\varphi_n \to \infty$.

Условие устойчивости (82) глобально и не зависит от выбора опорных плоскостей; в периодическом волноводе след матрицы $A + D$ инвариантен относительно сдвига опорных плоскостей (поскольку для любых двух матриц сумма диагональных элементов матрицы-произведения не зависит от порядка сомножителей). Частота прохода ω, напротив, привязана к опорной плоскости, от которой строится ход лучей; если в рассмотренном выше случае проход отсчитывать от опорной плоскости 2, то $g_1 \leftrightarrow g_2$. Все полученные здесь формулы для многократных проходов относятся к заданной опорной плоскости; чтобы получить координату и угол наклона луча в любой другой плоскости, нужно домножить вектор (y_N, φ_N) на лучевую матрицу прохода от опорной плоскости до нужной.

Заключение

Получены формулы хода лучей и построены лучевые инварианты для многократных проходов волновода (резонатора) с плавным изменением свойств. Дополнительного рассмотрения требует ход лучей при переходе волноводом границы устойчивости; следует также учесть влияние на ход лучей неоднородностей коэффициента усиления.

Список литературы

[1] *Джеррард А., Бёрч Дж.М.* Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978. 343 с.

[2] *Ярив А.* Квантовая электроника. М.: Советское радио, 1980. 488 с.

[3] *Боровков В.В., Лажинцев Б.В., Мельников С.П., Мочкаев И.Н., Нор-Аревян В.А., Синянский А.А., Федоров Г.И.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1990. Т. 54. Вып. 10. С. 2009–2015.

[4] *Матьев В.Ю., Боровков В.В., Мельников С.П.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 1. С. 79–85.

[5] *Боровков В.В., Лажинцев Б.В., Нор-Аревян В.А., Сизов А.Н., Синянский А.А., Федоров Г.И.* // Квант. электрон. 1995. Т. 22. Вып. 12. С. 1187–1191.

[6] *Матьев В.Ю.* // Квант. электрон. 2003. Т. 33. Вып. 6. С. 493–497.

[7] *Маркузе Д.* Оптические волноводы. М.: Мир, 1974. 576 с.